Линейное программирование

Оглавление

Задача линейного программирования (ЛП)

- Задачей ЛП называется оптимизационная задача, в которой целевая функция – линейна на множестве линейных ограничений.

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i,\ i = \overline{1,\ m},\ x_j \ge 0$$

- Ограничения, накладываемые на координаты x_j , могут быть равенствами и неравенствами (I и II рода).

Задачи ЛП – самая обширная часть оптимизационных (примерно 70%)

Этапы построения математической модели

1. Определение переменных задачи.
2. Представление ограничений в виде линейных уравнений или неравенств.
3. Задание линейной целевой функции и смысла оптимизации.

Классические задачи линейного программирования

- Задача технического контроля (слайд 6);
- Транспортная задача (слайд 13);
- Задача о диете (слайд 16);
- Задача об использовании сырья (слайд 19).

Задача технического контроля

Примечание: ОТК – Отдел Технического Контроля

- В ОТК некоторой фирмы работают контролеры 1 и 2 разрядов (К1 и К2);
- Норма выработки ОТК за 8 часов (раб. день) составляет не менее 1800 изделий;
- К1 проверяет 25 изделий/час (точность 98%);
- К2 проверяет 15 изделий/час (точность 95%);
- Заработная плата К1 равна 4$ / час;
- Заработная плата К2 равна 3$ / час;
- При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в 2$;
- Фирма может использовать не более 8 - К1 и 10 - К2;

Определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальны.

Разряд	1	2
Выработка	25 изд/час.	15 изд/час
Точность	98 %	95 %
Зарплата	4$/час	3$/час
Макс. количество	8	10

Построение модели

1. Определим переменные задачи
   - x_1 – число контролеров 1 разряда;
   - x_2 – число контролеров 2 разряда.
2. Представим ограничение в виде неравенств

$$\begin{cases} x_1 \le 8 \\ x_2 \le 10 \end{cases}$$

Построение модели

- В день необходимо изготовить 1800 изделий (за 8 часов работы).

$$8 \cdot (25 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2) \geq 1800$$
$$200 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 \geq 1800$$

Или

$$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45$$

3. Задание целевой функции

$$f(\bar{x}) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2$$

Расходы фирмы имеют две составляющие

- заработная плата контроллеров;
- убытки из-за ошибок контроллеров.

Таким образом, один контроллер соответствующего разряда обходится фирме:

- I разряд $4 + 2 \cdot 0.02 \cdot 25 = 5$ $/час
- II разряд $3 + 2 \cdot 0.05 \cdot 15 = 4.5$ $/час

Целевая функция затрат на ОТК за 8 часов:

$$f(\bar{x}) = 8 \cdot (5 \cdot x_1 + 4.5 \cdot x_2) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2$$

Вся задача технического контроля может быть сформулирована следующим образом.

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2 \to \min \\ \text{при} \quad 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45 \\ \qquad\quad x_1 \leq 8 \;,\; x_2 \leq 10 \\ \qquad\quad x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Транспортная задача

Или задача о рациональном перевозе однородных продуктов из пунктов производства в пункты потребления.

- В каждом пункте A_i производится a_i количество продукта, $i = \overline{1, m}$.
- Пункт B_j потребляет b_j количества продукта, j= $\overline{1, n}$.
- Предполагается, что спрос соответствует предложению:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Транспортные издержки перевозки продукта из пункта A_i в пункт B_j составляют c_{ij} .

Требуется минимизировать транспортные издержки и удовлетворить запросы всех потребителей за счет производства

Математическая модель задачи

Введем переменные

- x_{ij} - количество продукта перевозимого из пункта A_i в пункт B_j.

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j = \overline{1,n} \\ \mathrm{x}_{ij} \geq 0 \end{array}\right\}$$

Задача о диете

Или задача о составлении рациона

Имеется *n* различных продуктов. Стоимость каждого продукта составляет c_j .

Ингредиенты продуктов следующие:

- Калорийность a_{1j} $(j = 1, n)$;
- жиры a_{2j};
- белки a_{3j};
- углеводы a_{4j}.

Суточная потребность конкретного человека в калориях, жирах, белках и углеводах составляет b_1, b_2, b_3, b_4 единиц соответственно.

Требуется удовлетворить суточную потребность в энергии, не превышая потребления жиров, белков, углеводов при минимальных затратах.

Математическая модель задачи

Введем переменные

- x_{ij} - количество потребления j-го продукта.

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \geq b_1; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{3j} \cdot x_j \geq b_3; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j \geq b_2; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{4j} \cdot x_j \geq b_4. \end{array}\right\}$$

Задача об использовании сырья

Изготавливаются два продукта Π_1 и Π_2 из трех видов сырья s_1, s_2, s_3.

Запасы каждого сырья равны b_1, b_2, b_3.

На единицу продукции Π_1 уходит a_{11} количества сырья s_1

$$a_{21} - s_2;$$

$$a_{31} - s_3.$$

На единицу продукции Π_2 уходит a_{12} количества сырья s_1

$$a_{22} - s_2;$$

$$a_{32} - s_3.$$

Требуется так запланировать выпуск продуктов Π_1 и Π_2, чтобы доход от реализации продукции был максимален при имеющихся запасах сырья.

Исходные данные задачи

Представим исходные данные в виде таблицы

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		$П_1$	$П_2$
s_1	b_1	a_{11}	a_{12}
s_2	b_2	a_{21}	a_{22}
s_3	b_3	a_{31}	a_{32}
Доход		c_1	c_2

Пусть имеет место задача об использовании сырья некоторого кондитерского предприятия, выпускающего

- Π_1 - карамель А;
- Π_2 - карамель Б.

При этом используется сырье

- s_1 – сахар;
- s_2 – джем;
- s_3 – шоколад.

Исходные данные для кондитерской

Тогда после перехода к условным единицам получим таблицу

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		карамель А	карамель Б
сахар	160	5	2
джем	180	3	4
шоколад	196	7	0
Доход		3	2

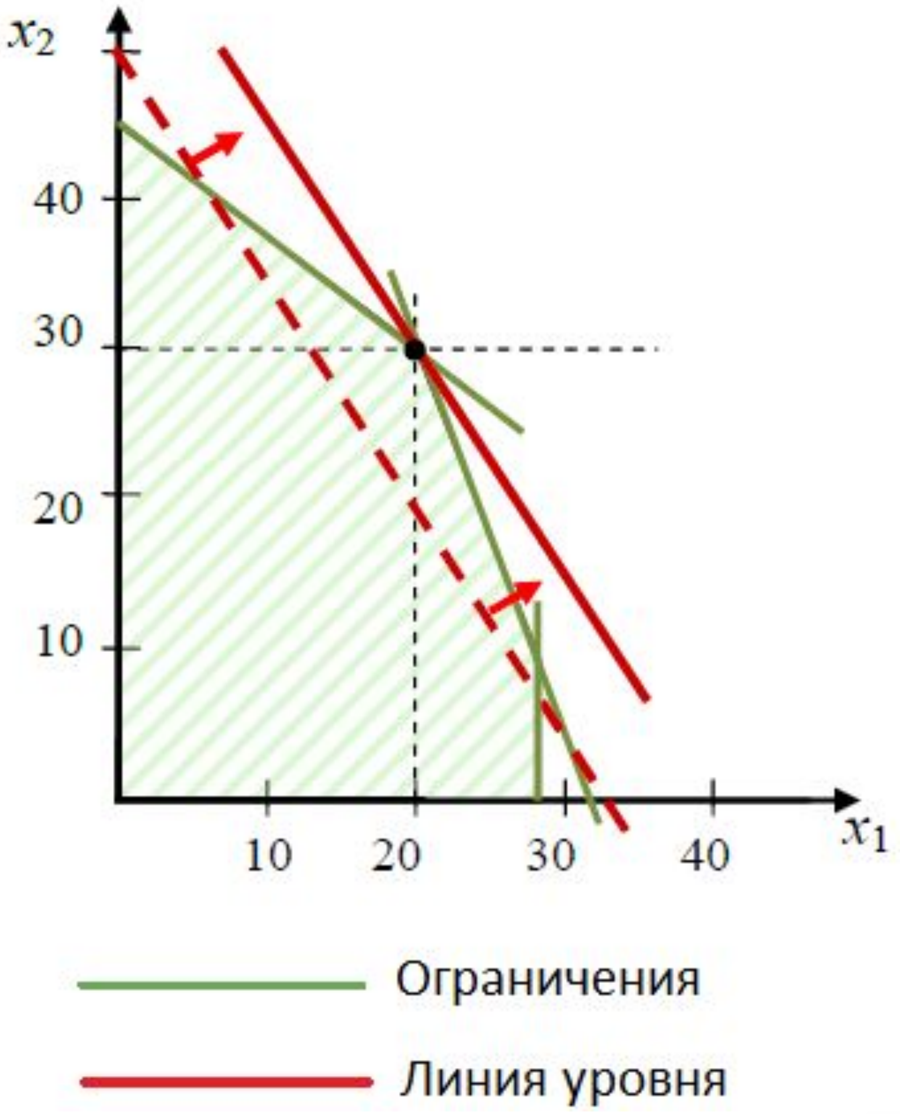
Математическая модель задачи

Введем переменные

- x_1 единиц продукции Π_1 выпускает предприятие;
- x_2 единиц продукции Π_2 выпускает предприятие;

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} f(\overline{x}) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \max \\ \quad 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 160 \\ \quad 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 180 \\ \quad 7 \cdot x_1 \qquad\quad\;\; \le 196 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$



Графическое решение

$$\begin{cases} f(\bar{x}) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \max \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 180 \\ 7 \cdot x_1 \le 196 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1. Строим ограничения – неравенства.

2. Строим линию уровня
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = const$$

3. Зададим const = 100.

4. Перенесем линию уровня параллельно в сторону увеличения ЦФ до пересечения с крайней вершиной многогранника ограничений

Геометрический метод решения ЗЛП

Решим геометрическим методом задачу технического контроля:

$$\left.\begin{array}{c} f(\overline{x}) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2 \to \min \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45 \\ x_1 \leq 8 \ , \ x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$f(\bar{x}) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 45 \\ x_1 \le 8 \;,\; x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 \;,\; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- Построив все ограничения-неравенства, получим множество допустимых решений – треугольник АВС.

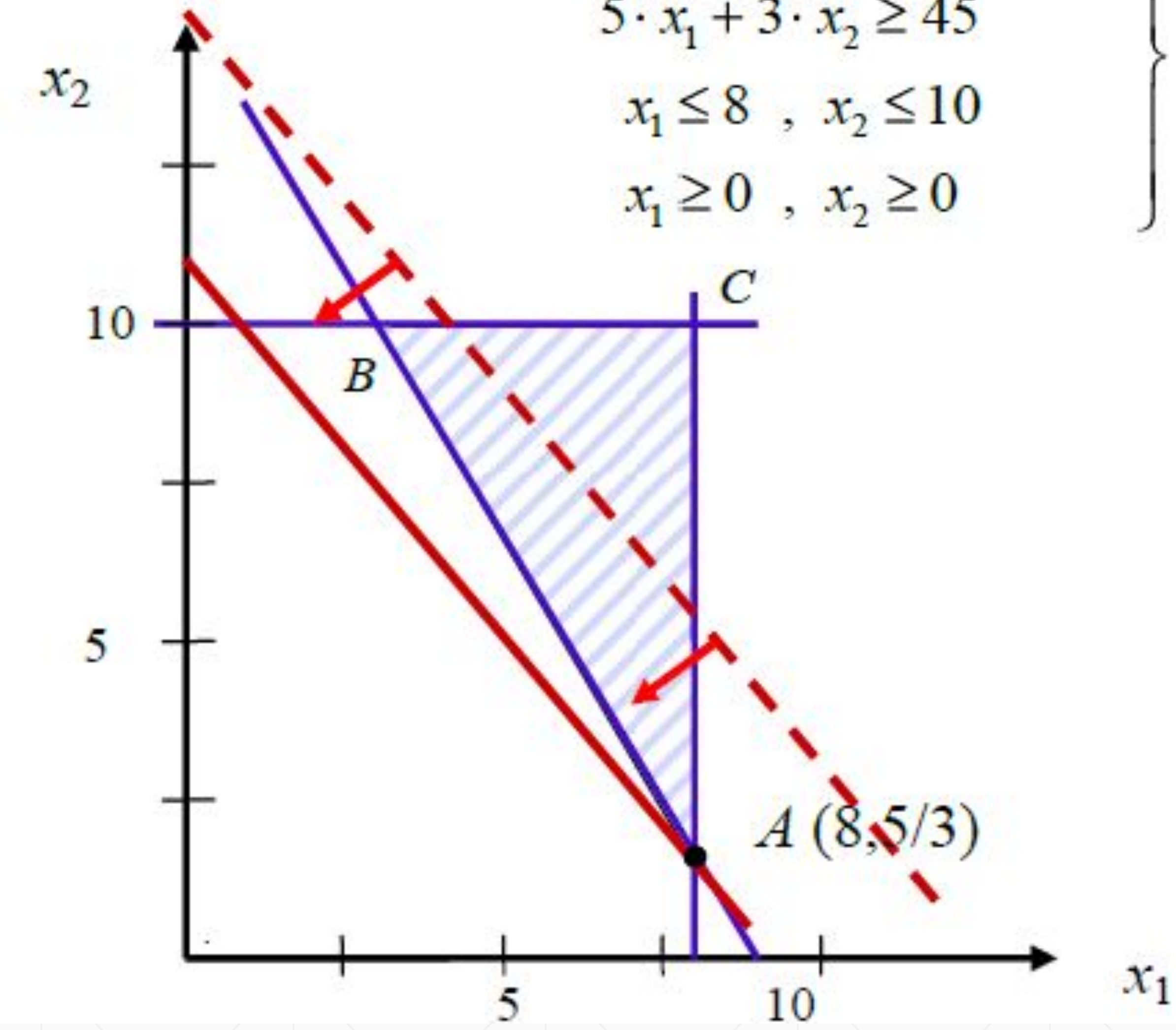
Для построения ЦФ необходимо построить линию уровня для любой константы, например для 600.

$$40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2 = 600$$

Линия уровня попала в область допустимых решений.

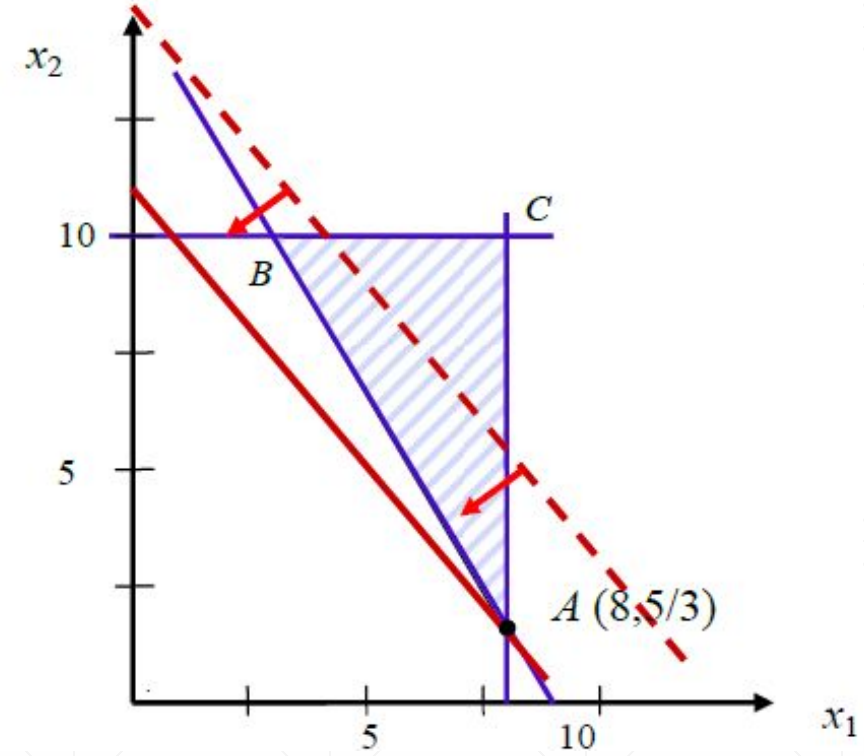
Теперь если изменять константу, то линия уровня будут перемещаться параллельно.

Увеличиваем константу до тех пор, пока линия уровня не достигнет крайней вершины треугольника АВС - А.



Вершина треугольника А имеет координаты $\left(8;\frac{5}{3}\right)$.

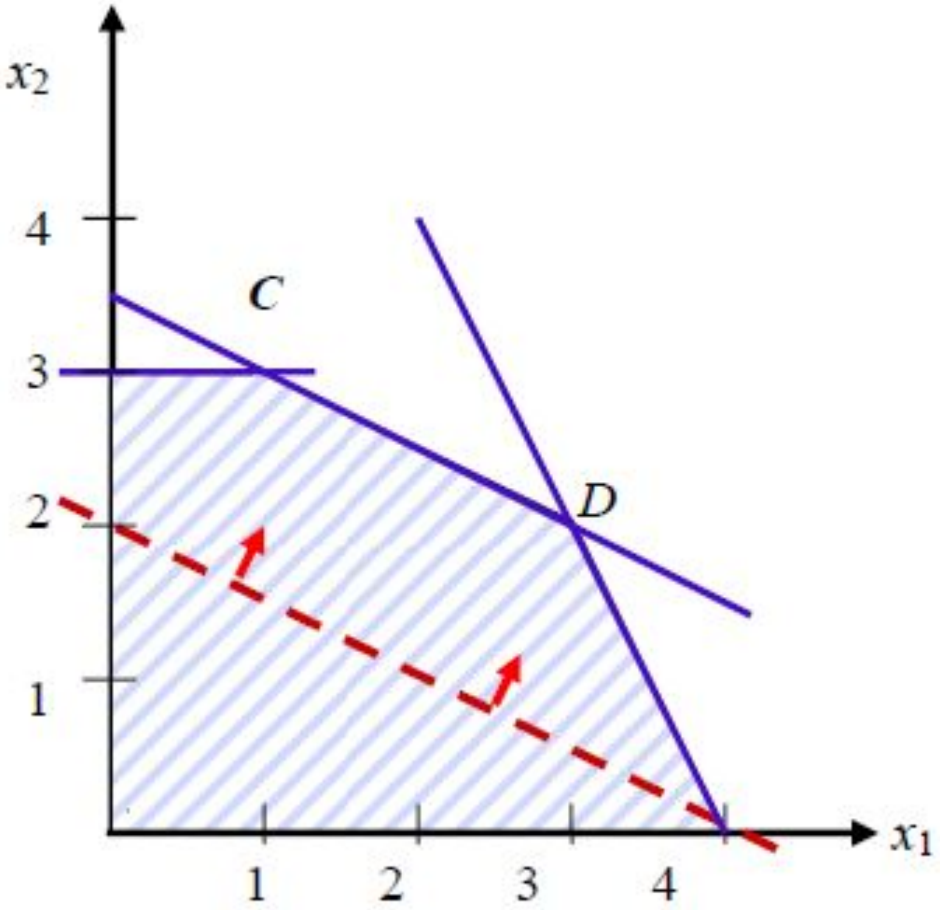
$$\mathrm{f}(\bar{x}) = f\left(8;\frac{5}{3}\right) = 377.6$$



Таким образом, для оптимальной работы ОТК необходимо использовать 8 контроллеров 1 разряда и 1.6 контроллеров 2 разряда.

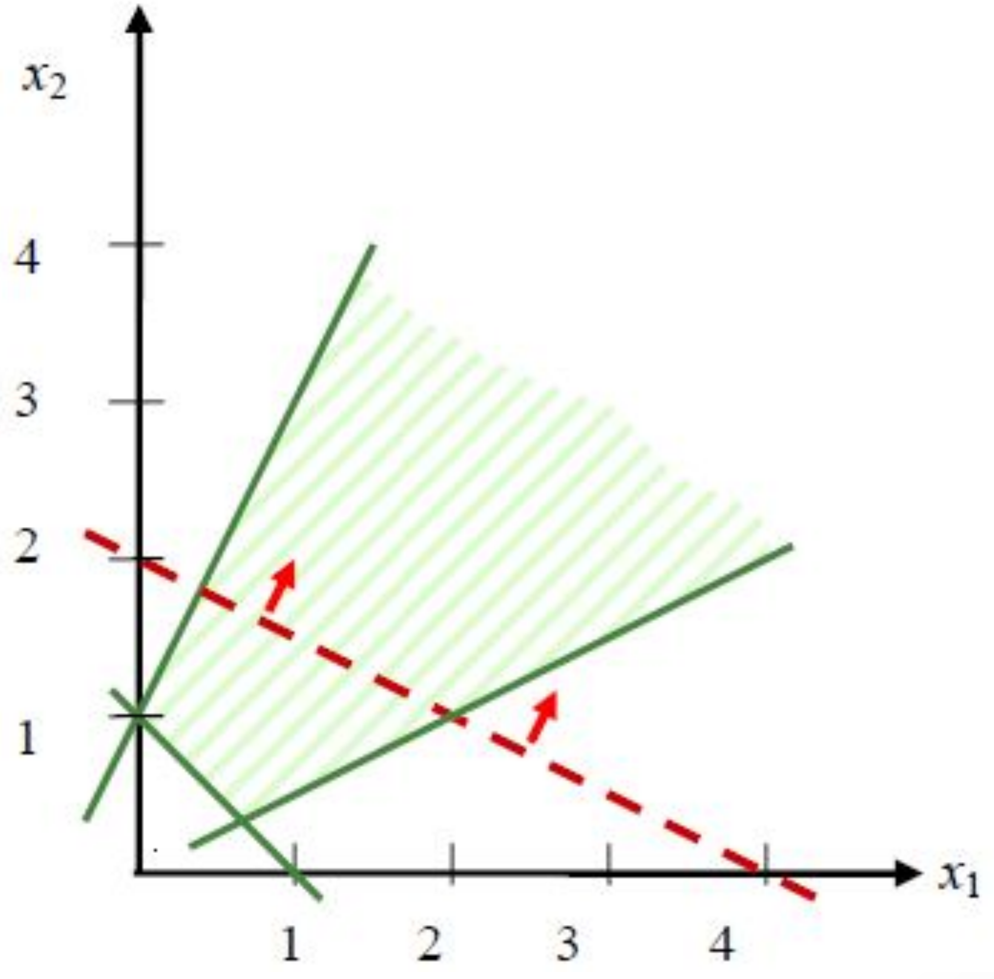
Значение1.6 означает или неполный рабочий день, или округление до двух контроллеров.

Частные случаи геометрических решений



Пример 1

$$
\begin{cases}
f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \to min \\
x_1 + 2 \cdot x_2 \le 7 \\
2 \cdot x_1 + x_2 \le 8 \\
x_2 \le 3 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
$$



Пример 2

$$\begin{cases} f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \rightarrow min \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2 \cdot x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задача линейного программирования в стандартной форме

ЗЛП в стандартной форме содержит следующие элементы:

- Ограничения только в виде равенств;
- Все переменные $x_j, j = \overline{1, n}$ ограничены;
- Ресурсы $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$
- ЦФ$\rightarrow min$.

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \; i = \overline{1,\ m},$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,\ n},$$

$$b_i \geq 0\ , \qquad i = \overline{1,\ m}.$$

Матрично–векторная запись

$$f(\bar{x}) = c(\bar{c}, \bar{x}) \to min$$
$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$$
$$\bar{x} \geq 0, \qquad \bar{b} \geq 0$$

где A – матрица коэффициентов;

$\bar{x}$ - вектор переменных;

$\bar{b}$ - вектор ресурсов

$\bar{c}$ - вектор оценок задачи линейного программирования.

Приведение ЗЛП к стандартному виду

I. Преобразование неравенств

Ограничения – неравенства можно преобразовать в равенства при помощи введения остаточных и избыточных переменных x_{n+i} .

Остаточные переменные вводятся со знаком «плюс», избыточные со знаком «минус».

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1,\ m}.$$

Преобразования неравенств

- Пример 1

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 25$$

Добавим остаточную переменную $x_5 > 0$:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + x_5 = 25$$

- Пример 2

$$2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \cdot x_3 \geq 12$$

Добавим избыточную переменную $x_4 > 0$:

$$2 \cdot x_1 + x_2 - 3 \cdot x_3 - x_4 = 12$$

Преобразования неравенств

Преобразуем неравенства из задачи об использовании сырья добавив во все три уравнения остаточную переменную.

$$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 180 \\ 7 \cdot x_1 \qquad\qquad \le 196 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \qquad + x_4 = 180 \\ 7 \cdot x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_5 = 196 \end{array}\right\}$$

Приведение ЗЛП к стандартному виду

II. Преобразование неограниченных по знаку переменных

Переменные задачи линейного программирования в стандартной форме предполагаются только неотрицательными. Неограниченные переменные необходимо заменить разностью двух положительных переменных.

$$x_j = x_{n+1} - x_{n+2}$$

Здесь $x_{n+1}, x_{n+2} > 0$. Переменные x_j может быть положительным и отрицательным в зависимости от соотношения x_{n+1}, x_{n+2}.

Приведение ЗЛП к стандартному виду

III. Устранение отрицательных ресурсов

Уравнения с отрицательными значениями ресурсов b_i необходимо умножить на (-1).

Пример приведения ЗЛП к стандартному виду

Дана следующая система:

$$f(\bar{x}) = x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \to \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \qquad 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \qquad 2$$

$$3 \cdot x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 = -5 \qquad 3$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

1. Переменная x_3 - неограниченна

$$x_3 = x_4 - x_5$$

2. Умножим на (-1) уравнение (3).
3. Введем дополнительные переменные: остаточную x_6 в уравнение (1) и избыточную переменную x_7 в уравнение (2).

Перепишем задачу ЛП с учетом новых переменных и замен:

$$f(\bar{x}) = x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \to \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \qquad 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \ge 2 \qquad 2$$

$$3 \cdot x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 = -5 \qquad 3$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

$$\left.\begin{array}{c}
f(\bar{x}) = x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_4 - 3 \cdot x_5 \to \min \\
x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7 \\
x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2 \\
-3 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_4 - 2 \cdot x_5 = 5 \\
x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \ge 0
\end{array}\right\}$$

Симплекс метод решения ЗЛП

Запишем задачу линейного программирования в стандартной форме в развернутом виде:

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \min \\ \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \\ \quad x_1, \ \ldots \ , \ \mathrm{x}_n \geq 0 \end{array}\right\}$$

Число уравнений системы меньше числа неизвестных (*m* < *n*).

Метод Гаусса – Жордана

Основная идея метода состоит в сведении *m* уравнения с *n* неизвестными к каноническому или ступенчатому виду, путем линейных преобразования над строками (сложение строк и умножение на скаляр).

Это позволяет привести СЛАУ к следующему виду:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + \ldots + \bar{a}_{1m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{1n} \cdot x_n = \bar{b}_1 \\ x_2 + \ldots + \bar{a}_{2m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{2n} \cdot x_n = \bar{b}_2 \\ x_m + \ldots + \bar{a}_{mm+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + \bar{a}_{mn} \cdot x_n = \bar{b}_m \end{array}\right\}$$

Базисные и свободные переменные

- Переменные $x_1, x_2, \ldots\ x_m$, которые входят в одно уравнение с коэффициентом 1, а в остальные с коэффициентом 0 называют **базисными** (зависимыми).
- Переменные $x_{m+1}, \ldots\ x_n$ называют **свободными** (независимыми).
- В канонических системах в любом уравнении присутствует только одна базисная переменная.

Выразим из предыдущей системы базисные переменные:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \overline{b_1} - \overline{a}_{1m+1} \cdot x_{m+1} - \ldots - \overline{a}_{1n} \cdot x_n \\ x_m &= \overline{b_m} - \overline{a}_{mm+1} \cdot x_{m+1} - \ldots - \overline{a}_{mn} \cdot x_n \end{aligned}\right\}$$

- Из этой системы можно получить решение для базисных переменных, присваивая независимым переменным произвольные значения

Базисное решение

vbnvbg

Базисным решением системы канонического вида называют решение, полученное при нулевых значениях независимых переменных. То есть

$$x_1 = \overline{b_1}, \dots, x_m = \overline{b_m}, x_{m+1} = 0, \dots\ x_n = 0$$

Опорный план

Если $\overline{b_i} > 0, i = \overline{1, m}$, то полученное базисное решение называется допустимым базисным решением или опорным планом

Базисными переменными могут быть любые m штук переменных системы.

Метод последовательного исключения переменных (метод Гаусса)

Метод Гаусса состоит из двух этапов:

I. Прямой ход

II. Обратный ход

Цель прямого хода - приведение матрицы системы A к верхнетреугольному виду.

Прямой ход

На каждом шаге преобразования выбирается *k*-я главная или ведущая строка. Диагональные элементы главной строки a_{kk} называются главными элементами

На прямом ходе выполняется следующие действия:

1. Для всех строк, кроме главной, находим множитель l_i:

$$l_i = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

2. К каждой неглавной добавляем главную строку, умноженную на множитель l_i

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + l_{ik} \cdot a_{kj}^{(k-1)}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + l_{ik} \cdot b_k^{(k-1)}$$

Прямой ход

3. Главную строку делим на главный элемент a_{kk};
4. Главную строку вычеркиваем, размерность системы становится меньше на единицу, то есть (*n*-1).

- На следующем шаге исключения главной строкой вновь становится верхняя строка, находящаяся под вычеркнутой на предыдущем шаге.
- Все указанные выше преобразования повторяются столько раз, пока главная строка не становится единственной в системе.

Обратный ход

- Вектор неизвестных СЛАУ $\bar{x}$ находится в обратном порядке, начиная с последнего. Для этого составляется матрица из вычеркнутых строк, она имеет верхнетреугольный вид.

Из последнего уравнения находится неизвестный x_n, затем неизвестные находятся в порядке $x_{n-1},\ x_{n-2},\ \ldots,\ x_1$.

Пример решения СЛАУ методом Гаусса

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 = 5 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 15 \end{cases}$$

	k	l_i	Коэффициенты при неизвестных			b	c
			x_1	x_2	x_3		
Прямой ход	0		3	-1	0	5	7
		2/3	-2	1	1	0	0
		- 2/3	2	-1	4	15	20
	1		3	-1	0	5	7
			0	1/3	1	10/3	14/3
		1	0	-1/3	4	35/3	46/3
	2	0	3	-1	0	5	7
		0	0	1/3	1	10/3	14/3
			0	0	5	45/3	60/3
Обратный ход					$x_3=3$		$\overline{x}_3 = 4$
				$x_2=1$			$\overline{x}_2 = 2$
			$x_1=1$				$\overline{x}_1 = 3$

Для уменьшения возможности ошибок счета вводятся контрольные суммы (столбец **с**), с которыми выполняются следующие преобразования.

- на прямом ходе те же преобразования, что со столбцом свободных членов *b*. Контроль правильности преобразования строки на очередном шаге проводится суммированием всех коэффициентов в строке и свободного члена. Эти значения должны быть равны.

- на обратном ходе одновременно с вычислением корней x_i,вычисляются корни $\overline{x_i}$, которые получены если в выделенном в системе уравнении вместо свободного члена b_i использовать значение контрольной суммы c_i . Между корнями должно выполняться такое соответствие $\overline{x_i} = x_i + 1$.

Метод главных элементов

Применяется в случаях, когда главные диагональные элементы системы уравнений в результате преобразований получаются нулевые.

В этих условиях схема единственного деления становится неработоспособной, так как на главные элементы в ходе преобразований производится деление.

Основная идея метода главных элементов

1. На каждом шаге выбирают главный элемент матрицы *A* – максимальный по модулю коэффициент в матрице a_{pq}. Строка *p* – главная строка.
2. Для всех строк, кроме главной, вычисляются множители:

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}$$

3. К каждой неглавной строке добавляют главную, умноженную на сомножитель m_i. В результате *q*-й столбец – нулевой.
4. Вычеркиваем p-ю строку и q-й столбец. В результате получаем матрицу A^1, размерность которой на единицу меньше предыдущей матрицы A.
5. Процедуру повторяем с первого шага (*n*-1) раз.

Основная идея метода главных элементов

В результате составляем новую систему уравнений из вычеркнутых строк. Полученная матрица не треугольного вида, как в схеме единственного деления Гаусса. Но каждое уравнение содержит разное количество неизвестных:

- в последнем уравнении – 1 неизвестное;
- в (n-1)-м –2 неизвестных и т.д.;
- в первом уравнении – все n неизвестных.

Такой вид преобразованной системы позволяет последовательно находить неизвестные, начиная с последнего уравнения.

Пример решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента

	k	m_i	Коэффициенты при неизвестных x_1	x_2	x_3	b	c
Прямой ход	0	0	3	-1	0	5	7
		-1/4	-2	1	1	0	0
		-1	2	-1	**4**	15	20
	1	-1	**3**	-1	-	5	7
		5/6	-5/2	5/4	-	-15/4	-5
			-	-	-	-	-
	2		-	**5/12**	-	5/12	5/6
			-	-	-	-	-
			-	-	-	-	-
Обратный ход				$x_2=1$			$\bar{x}_2 = 2$
			$x_1=2$				$\bar{x}_1 = 3$
					$x_3=3$		$\bar{x}_3 = 4$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - x_2 = 5 \\ -2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 15 \end{cases}$$

Симплекс метод

- Теорема 1

Множество опорных планов – выпукло

- Теорема 2

Если ЗЛП разрешима, то экстремум целевой функции достигается на одном из опорных планов (допустимом базисном решении).

То есть оптимальное решение соответствует крайней точке выпуклого множества.

Число опорных планов конечно и определяется числом

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Алгоритм симплекс метода

I. Выбор начального опорного плана.

II. Переход от начального опорного плана к другому опорному плану с лучшим значением целевой функции. (!**Смежному**). Приведение системы, для смежного опорного плана к каноническому виду

III. Продолжение поиска опорного плана улучшающего целевую функцию до достижения оптимального плана..

Смежный опорный план

- Смежным опорным планом называют план, отличающийся от текущего лишь одной переменной.
- Для получения смежного опорного плана одну базисную переменную превращают в свободную, а эту свободную вводят в базисные переменные.
- Основной здесь вопрос – какую переменную выбрать, чтобы целевая функция уменьшалась?

Составим симплекс – таблицу для задачи использования ресурсов.

Для этого

запишем - задачу в каноническом виде и

заменим - цель поиска максимум на минимум.

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \to \max \\ \quad 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 160 \\ \quad 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 180 \\ \quad 7\cdot x_1 \qquad\qquad \le 196 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} z(\bar{x}) = -3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \to \min \\ \quad 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 = 160 \\ \quad 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + x_4 = 180 \\ \quad 7\cdot x_1 + x_5 = 196 \end{array}\right\}$$

Начальный опорный план

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 180 \\ 7 \cdot x_1 + x_5 = 196 \end{cases}$$

Базис	Свободные переменные					b_i	Q_{ik}
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	5	2	1	0	0	160	32
x_4	3	4	0	1	0	180	60
x_5	$\underline{7}$	0	0	0	1	196	28
Δ_k	-3	-2	-	-	-		

$$\Delta_1 = -3 - \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = -3$$

$$\Delta_2 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

I. Нахождение начального опорного плана

- Переменные x_3, x_4, x_5 – входят только в одно уравнения, значит они базисные.
- Переменные x_1, x_2 - свободные.
- Свободные переменные могут принимать любые значения, но для удобства их принимают равным 0.
- $x_1 = 0, x_2 = 0 \ \rightarrow x_3 = 160, x_4 = 180, x_5 = 196$
- Таким образом опорный план $\overline{x^1} = (0, 0, 160, 180, 196)$.
- Целевая функция $\mathrm{z}\left(\overline{x^1}\right) = 0$

II. Нахождение смежного опорного плана

- Необходимо одну переменную из свободных перевести в базис, так, чтобы целевая функция уменьшалась.
- Для удобства запишем ЗЛП в стандартной векторно-матричной форме:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \; i = \overline{1, \, m}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = \overline{1, \, n}$$

$$b_i \geq 0 \qquad i = \overline{1, \, m}$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 180 \\ 7 \cdot x_1 + x_5 = 196 \end{cases}$$

Приращение целевой функции Δ_k:

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in баз} c_i \cdot a_i$$

Где $\mathrm{k} \in$ свободным переменным (в нашем случае k=1, k=2) .

$\sum_{i \in баз}$ – суммирование ведется только по базисным переменным.

Приращения вычисляются только для свободных переменных:

$$\Delta_1 = -3 - \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = -3 \qquad \Delta_2 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \; i = \overline{1,\ m}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = \overline{1,\ n}$$

$$b_i \geq 0 \qquad i = \overline{1,\ m}$$

Лемма 1

- Если все приращения симплекс-плана $\Delta_k > 0$, следовательно, текущий опорный план оптимальный.

Следовательно улучшение целевой функции приносит та свободная переменная x_k, приращение которой отрицательно $\Delta_k < 0$.

Если есть несколько отрицательных Δ_k, то для замены можно выбрать любую. Но обычно выбирают переменную с наименьшим Δ_k.

Лемма 2

- Если хотя бы одно из приращений $\Delta_k < 0$ и при этом среди коэффициентов a_{ik} есть хотя бы один положительный, то существует опорный план улучшающий текущий.

Величина θ_i определяет, какая из базисных переменных уйдет в свободные на место x_k.

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$\boldsymbol{\theta_i}$ вычисляется только для $\boldsymbol{a_{ik} > 0}$

В свободные переменные уходит та переменная x_k, для которой отношение θ_i минимально

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_i \qquad \theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$\begin{aligned}
&z(x) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \to \min \\
&5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160 \\
&3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 180 \\
&7 \cdot x_1 + x_5 = 196
\end{aligned}$$

Выбранная для данного примера переменная x_5 меняется местами с x_1.

Базис	Свободные переменные					b_i	Q_{ik}
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	5	2	1	0	0	160	32
x_4	3	4	0	1	0	180	60
x_5	$\underline{7}$	0	0	0	1	196	28
Δ_k	-3	-2	-	-	-		

$$\Delta_1 = -3 - \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = -3$$

$$\Delta_2 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

III. Приведение системы к каноническому виду

- Так как переменную x_1 ввели в базис, то она должна в третьем уравнении иметь коэффициент равный единице, а во всех остальных нулю.
- Записав второй столбец $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, осуществим эквивалентные преобразования с первой строкой системы.
- К каждой неглавной строке добавляем главную, умноженную на коэффициент m_i

$$m_i = -\frac{a_{ik}}{a_{pk}}$$

Где a_{ik} – главный (ведущий) элемент.

k- номер столбца ведущего элемента.

p – строка ведущего элемента.

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in баз} c_i \cdot a_i \qquad \theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 180 \\ 7 \cdot x_1 + x_5 = 196 \end{cases}$$

Шаг 1

m_i		Переменные						b	Q
		Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
I	-5/7	x_3	5	2	1	0	0	160	32
	-3/7	x_4	3	4	0	1	0	180	60
		x_5	7	0	0	0	1	196	28
		Δ_k	-3	-2	-	-	-		

$\bar{x}_1 =$ 0, 0, 160, 180, 196 , $\quad f(\bar{x}_1) = 0$.

$$\Delta_1 = -3 - \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = -3, \qquad \Delta_2 = -2 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in баз} c_i \cdot a_i \qquad \theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 180 \\ 7 \cdot x_1 + x_5 = 196 \end{cases}$$

Шаг 2

m_i		Переменные						b	Q
		Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
II		x_3	0	***2***	1	0	-5/7	20	10
	-2	x_4	0	4	0	1	-3/7	96	24
	0	x_1	1	0	0	0	1/7	28	-
		Δ_k	-	***-2***	-	-	3/7		

$$\bar{x}_2 = \ 28,\ 0,\ 20,\ 96,\ 0\ , \qquad f(\bar{x}_2) = -3 \cdot 28 = -84\,.$$

$$\Delta_2 = -2 - \begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = -2, \qquad \Delta_5 = 0 - \begin{bmatrix} 0 & -5/7 \\ 0 & -3/7 \\ -3 & 1/7 \end{bmatrix} = -3/7$$

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_i$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 180 \\ 7 \cdot x_1 + x_5 = 196 \end{cases}$$

Шаг 3

m_i		Переменные						b	Q
		Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
III	5/14	x_2	0	1	1/2	0	-5/14	10	-
		x_4	0	0	-2	1	***1***	56	56
	-1/7	x_1	1	0	0	0	1/7	28	196
		Δ_k	-	-	1	-	***-2/7***		

$\bar{x}_3 = 28,\ 10,\ 0,\ 56,\ 0\ ,\qquad f(\bar{x}_3) = -104.$

$$\Delta_3 = 0 - \begin{array}{c} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{array}\begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = 1, \qquad \Delta_5 = 0 - \begin{bmatrix} -2 & -5/14 \\ 0 & 1 \\ -3 & 1/7 \end{bmatrix} = -2/7$$

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in баз} c_i \cdot a_i \qquad \theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$z(\bar{x}) = -3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 160 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 180 \\ 7 \cdot x_1 + x_5 = 196 \end{cases}$$

Шаг 4

m_i		Переменные						b	Q
		Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
IV		x_2	0	1	-3/14	5/14	0	30	
		x_5	0	0	-2	1	1	56	
		x_1	1	0	2/7	-1/7	0	20	
		Δ_k	-	-	6/14	4/14	-		

$\bar{x}_4 =$ 20, 30, 0, 0, 56 , $f(\bar{x}_4) = -120$ - оптимальный план.

$$\Delta_3 = 0 - \begin{array}{c} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{array} \begin{bmatrix} -2 & -3/14 \\ 0 & -2 \\ -3 & 2/7 \end{bmatrix} = 6/14, \qquad \Delta_4 = 0 - \begin{array}{c} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 5/14 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1/7 \end{bmatrix} = 4/14$$

Полная симплекс таблица

$$z(\bar{x}) = -3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 = 160 \\ 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + x_4 = 180 \\ 7\cdot x_1 + x_5 = 196 \end{cases}$$

m_i		Переменные						b	Q
		Базис	x_1	x_2	x_3	x_4			
I	-5/7	x_3	5	2	1	0	0	160	32
	-3/7	x_4	3	4	0	1	0	180	60
		x_5	***7***	0	0	0	1	196	28
		Δ_k	***-3***	-2	-	-	-		
II		x_3	0	***2***	1	0	-5/7	20	10
	-2	x_4	0	4	0	1	-3/7	96	24
	0	x_1	1	0	0	0	1/7	28	-
		Δ_k	-	***-2***	-	-	3/7		
III	5/14	x_2	0	1	1/2	0	-5/14	10	-
		x_4	0	0	-2	1	***1***	56	56
	-1/7	x_1	1	0	0	0	1/7	28	196
		Δ_k	-	-	1	-	***-2/7***		
IV		x_2	0	1	-3/14	5/14	0	30	
		x_5	0	0	-2	1	1	56	
		x_1	1	0	2/7	-1/7	0	20	
		Δ_k	-	-	6/14	4/14	-		

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_i$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

Замечание

Если на шаге I выбрать $\Delta_k = -2$ - разрешающим столбцом, то стратегия поиска такова:

$$\overline{x^2} = (0, 45, 70, 196, 0), \qquad f(\overline{x^2}) = -90$$

$$\overline{x^3} = (20, 30, 0, 0, 56), \qquad f(\overline{x^3}) = -120$$

Оптимум достигнут за 2 шага.

Метод искусственного базиса

Пусть задача линейного программирования приведена к стандартному виду:

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \rightarrow \min \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i,\ i = \overline{1,\ m} \end{array}\right\}$$

Пусть все $b_i > 0$, но часть или все базисные переменные отрицательны, $x_j < 0$. Следовательно, опорного плана нет.

Дополним уравнения – ограничения искусственными переменными (предполагаем, что все $x_j < 0, j = \overline{1, n}$).

Введем m переменных (по количеству уравнений) $x_{n+i} < 0, i = \overline{1, m}$, которые в новой системе будут базисными, а отрицательные $x_j < 0$ уйдут в свободные.

В результате получим следующую эквивалентную задачу:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{f}(\bar{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_{n+i} \rightarrow \min \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1,\ m} \\ x_k > 0, \qquad k = \overline{1,\ \mathrm{n} + m} \end{array}\right\}$$

Переменные x_{n+i} не имеют никакого отношения к исходной задаче линейного программирования и служат лишь для получения опорного плана и называются искусственными переменными. А новая целевая функция $\mathrm{f}(\hat{x})$ сформирована для полноты задачи.

В оптимальном опорном плане искусственные переменные должны быть равны нулю. В противном случае нарушится условие первоначальной задачи.

В начальном опорном плане искусственные переменные являются базисными, то есть не равны нулю, а в оптимальном плане искусственные переменные должны быть равны нулю.

Значит, искусственные переменные должны стать в оптимальном плане свободными.

Пример

Перепишем ЗЛП в стандартной форме. Для этого введем дополнительные переменные $x_3,\ x_4,\ x_5, x_6$ и запишем задачу в канонической форме.

$$\left.\begin{array}{l} f(\overline{x}) = x_1 + 2\cdot x_2 \to \max \\ \quad 2\cdot x_1 + x_2 \ge 5 \\ \quad x_1 + 3\cdot x_2 \ge 5 \\ \quad -2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 7 \\ \quad x_1 + x_2 \le 9 \\ \quad x_1,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(\overline{x}) = -x_1 - 2\cdot x_2 \to \min \\ 2\cdot x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 3\cdot x_2 - x_4 = 5 \\ -2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 9 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6} \end{array}\right\}$$

Так как часть базисных переменных отрицательны ($x_3 = -5$ и $x_4 = -5$), следовательно опорного плана нет.

Для получения начального опорного плана введем переменные x_7, x_8 в двух первых уравнениях-ограничениях и сформулируем вспомогательную задачу:

$$\left.\begin{array}{l}
f(\bar{x}) = -x_1 - 2\cdot x_2 \to \min \\
2\cdot x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad = 5 \\
x_1 + 3\cdot x_2 \qquad - x_4 \qquad = 5 \\
-2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \qquad + x_5 \qquad = 7 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_6 = 9 \\
x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}
\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\hat{f}(\bar{x}) = x_7 + x_8 \to \min \\
2\cdot x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_7 \qquad = 5 \\
x_1 + 3\cdot x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_8 = 5 \\
-2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \qquad + x_5 \qquad\qquad = 7 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_6 \qquad\qquad = 9
\end{array}\right\}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,8$$

Таким образом, начальным базисом является: $\overline{x^1} = (0, 0, 0, 0, 7, 9, 5, 5)$

Симплекс таблица с искусственным базисом

m_i	Ба-зис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	θ
I											
$-\frac{1}{3}$	x_7	2	1	-1	0	0	0	1	0	5	5
0	x_8	1	**3**	0	-1	0	0	0	1	5	5/3
-1	x_5	-2	3	0	0	1	0	0	0	7	7/3
-1/3	x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	9	9
	$\hat{\Delta}_k$	-3	<u>-4</u>	1	1	-	-	-	-		
II											
	x_7	**5/3**	0	-1	1/3	0	0	1	-1/3	10/3	2
-1/5	x_2	1/3	1	0	-1/3	0	0	0	1/3	5/3	5
-9/5	x_5	-3	0	0	1	1	0	0	-1	2	-
-2/5	x_6	2/3	0	0	1/3	0	1	0	-1/3	22/3	11
	$\hat{\Delta}_k$	<u>-5/3</u>	-	1	-1/3	-	-	-	4/3		

$$
\left.
\begin{array}{l}
\hat{f}(\bar{x}) = x_7 + x_8 \to \min \\
2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_7 \quad = 5 \\
x_1 + 3 \cdot x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_8 = 5 \\
-2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \qquad + x_5 \qquad\qquad = 7 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_6 \qquad\qquad = 9
\end{array}
\right\}
$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,8}$$

$$\hat{\Delta}_k = \hat{c}_k - \sum_{i \in баз} \hat{c}_i \cdot a_{ik}$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$\hat{\Delta}_1 = 0 - \begin{array}{c} x_7 \\ x_8 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -3, \qquad \hat{\Delta}_2 = 0 - \begin{array}{c} x_7 \\ x_8 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

$$\hat{\Delta}_k = \hat{c}_k - \sum_{i \in \text{баз}} \hat{c}_i \cdot a_{ik}$$ $$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$ $$\hat{f}(\bar{x}) = x_7 + x_8 \to \min$$

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in \text{баз}} c_i \cdot a_i$$ $$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$ $$f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \to \min$$

m_i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b	θ
I											
$-\frac{1}{3}$	x_7	2	1	-1	0	0	0	1	0	5	5
0	x_8	1	**3**	0	-1	0	0	0	1	5	5/3
-1	x_5	-2	3	0	0	1	0	0	0	7	7/3
-1/3	x_6	1	1	0	0	0	1	0	0	9	9
	$\hat{\Delta}_k$	-3	**-4**	1	1	-	-	-	-		
II											
	x_7	**5/3**	0	-1	1/3	0	0	1	-1/3	10/3	2
-1/5	x_2	1/3	1	0	-1/3	0	0	0	1/3	5/3	5
-9/5	x_5	-3	0	0	1	1	0	0	-1	2	-
-2/5	x_6	2/3	0	0	1/3	0	1	0	-1/3	22/3	11
	$\hat{\Delta}_k$	**-5/3**	-	1	-1/3	-	-	-	4/3		

III											
	x_1	1	0	-3/5	1/5	0	0	~~3/5~~	~~-1/5~~	2	
	x_2	0	1	1/5	-2/5	0	0	~~-1/5~~	~~2/5~~	1	
	x_5	0	0	-9/5	8/5	1	0	~~9/5~~	~~-8/5~~	8	
	x_6	0	0	2/5	1/5	0	1	~~-2/5~~	~~-1/5~~	6	
	$\hat{\Delta}_k$	-	-	0	0	-	-	~~1~~	~~1~~		
	Δ_k	-	-	-1/5	**-3/5**	-	-				
IV											
	x_1	1	0	-3/8	0	-1/8	0			1	
	x_2	0	1	-1/4	0	1/4	0			3	
	x_4	0	0	-9/8	1	5/8	0			5	
	x_6	0	0	**5/8**	0	-1/8	1			5	**8**
	Δ_k	-	-	**-7/8**	-	3/8	-				

Симплекс таблица с искусственным базисом

$$\Delta_k = c_k - \sum_{i \in баз} c_i \cdot a_i$$

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$$

$$f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 \to \min$$

V											
	x_1	1	0	0	0	-1/5	3/5			4	
	x_2	0	1	0	0	1/5	2/5			5	
	x_4	0	0	0	1	2/5	9/5			14	
	x_3	0	0	1	0	-1/5	8/5			8	
	Δ_k	-	-	-	-	1/5	7/5				

Симплекс таблица с искусственным базисом

- Для первых трех шагов приращения $\hat{\Delta}_k$ вычисляются только по искусственным переменным, которые входят в искусственную целевую функцию $\hat{f}(\bar{x}) = x_7 + x_8$ с коэффициентом $c_i = 1$.
- На третьем шаге искусственные переменные исключены, так как все $\hat{\Delta}_k$ положительны.
- Эквивалентная задача решена. Далее приращения Δ_k вычисляются на основе исходной целевой функции.

$$f(\bar{x}) = -x_1 - 2 \cdot x_2 .$$

$$\bar{x}^1 = 0, 0, 0, 0, 7, 9, 5, 5 \;, \qquad f(\bar{x}^1) = 0, \qquad \hat{f}(\bar{x}^1) = 10.$$

$$\bar{x}^2 = \left[0, \frac{5}{3}, 0, 0, 2, \frac{22}{3}, \frac{10}{3}, 0\right], \qquad f(\bar{x}^2) = -\frac{10}{3}, \qquad \hat{f}(\bar{x}^2) = \frac{10}{3}$$

$$\bar{x}^3 = 2, 1, 0, 0, 8, 6 \;, \qquad f(\bar{x}^3) = -4, \qquad \hat{f}(\bar{x}^3) = 0.$$

$$\bar{x}^4 = \left[1, 3, 0, 5, 0, 5 ,\right] \qquad f(\bar{x}^4) = -7.$$

$$\bar{x}^5 = \left[4, 5, 8, 14, 0, 0 ,\right] \qquad f(\bar{x}^5) = -14.$$

Этапы метода искусственного базиса

I. Формирование и решение вспомогательной задачи ЛП с введением искусственных переменных. Искусственные переменные в начальном опорном плане являются базисными. Искусственная целевая функция включает только искусственные переменные. При получении смежных опорных планов искусственные переменные из базисных переводим в свободные. В результате получен оптимальный опорный план для вспомогательной задачи $\hat{f}(\bar{x}) = 0$.

Этапы метода искусственного базиса

II. Оптимальный опорный план вспомогательной задачи ЛП является начальным опорным планом основной задачи ЛП. Задача решается для исходной целевой функции $f(\bar{x})$ обычным симплекс – методом

Введение искусственных переменных требуется в двух случаях:

1. Ряд базисных переменных x_i в канонической форме отрицательны;
2. если трудно свести к канонической форме, то просто в любое уравнение-ограничение добавляем искусственную переменную.

Двойственность задач линейного программирования

Определение двойственности

Для любой задачи линейного программирования существует некоторая другая задача линейного программирования, решение которой тесно связано с решением исходной.

Таким образом, двойственность состоит в существовании пары задач:

- прямая задача;
- двойственная задача.

Прямая и двойственная задачи

Прямая задача

$$\left.\begin{aligned} f(\overline{x}) &= \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j &\le b_i,\ i = \overline{1,\ m} \end{aligned}\right\}$$

Двойственная задача

$$\left.\begin{aligned} z(\overline{y}) &= \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot y_i &\ge c_j,\ j = \overline{1,\ \mathrm{n}} \end{aligned}\right\}$$

Теорема 1

Если существует оптимальный план одной задачи, то и существует оптимальный план другой, при этом справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i$$

Неравенство переходит в равенство если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ оптимальны.

Теорема 2

Если $\bar{x}^*$, $\bar{y}^*$ – оптимальные планы то компоненты планов связаны соотношениями:

$$\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^*\right) \cdot y_i^* = 0$$

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^*\right) \cdot x_j^* = 0$$

Сравнение прямой и двойственной задачи

Матрица ограничений $A = a_{ij}$

В исходной задаче

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

В двойственной

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Т.е. матрица A^1 является транспонированной к матрице А.

Число ограничений и переменных

В исходной задаче

- n – переменных;
- m – ограничений.

В двойственной

- m – переменных;
- n – ограничений.

Правые части ограничений – это коэффициенты целевой функции двойственной задачи

Прямая задача

$$\begin{cases} f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \underline{c_j} \cdot x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le \underline{b_i},\ i = \overline{1,\ m} \end{cases}$$

Двойственная задача

$$\begin{cases} z(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} \underline{b_i} \cdot y_i \to \min \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot y_i \ge \underline{c_j},\ j = \overline{1,\ \mathrm{n}} \end{cases}$$

Знаки ограничений и цель задачи меняются на противоположные

В исходной задаче

- Знаки ограничений <
- Целевая функция $\rightarrow max$.

В двойственной

- Знаки ограничений >
- Целевая функция $\rightarrow min$.

Соответствие двойственных задач ЛП

Исходная задача	Двойственная задача
Целевая функция → max	Целевая функция → min
Константы в правых частях ограничений	Коэффициенты целевой функции
Коэффициенты целевой функции	Константы в правых частях ограничений
j-й столбец коэффициентов в ограничениях	j-я строка коэффициентов в ограничениях
j-я строка коэффициентов в ограничениях	j-й столбец коэффициентов в ограничениях
j-я неотрицательная переменная	j-е неравенство вида ≥
j-я переменная, не имеющая ограничений в знаке	j-е соотношение в виде =
i-е неравенство вида ≤	i-я неотрицательная переменная
i-е соотношение в виде =	i-я переменная не имеющая ограничений в знаке

Пример

Запишем прямую и двойственную задачи

Для решения двойственной задачи введен искусственный базис, переменные y_6, y_7 которые исключаются из опорного плана на третьем шаге.

<u>Прямая задача</u>

$$f(\overline{x}) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \max$$

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 160$$

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 180$$

$$7 \cdot x_1 \le 196$$

$$n = 2,\ m = 3$$

<u>Двойственная задача</u>

$$f(\overline{y}) = 160 \cdot y_1 + 180 \cdot y_2 + 196 \cdot y_3 \to \min$$

$$5 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 7 \cdot y_3 - y_4 \quad y_6 \quad = 3$$

$$2 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 \quad - y_5 \quad + y_7 = 2$$

$$F_{иск} = y_6 + y_7$$

Симплекс таблица двойственной задачи

	m_i	Базис	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b	θ
I		y_6	5	3	**7**	-1	0	1	0	3	3/7
	0	y_7	2	4	0	0	-1	0	1	2	-
		$\hat{\Delta}$	-7	-7	-7	1	1	-	-		
II		y_3	5/7	3/7	1	-1	0	1	0	3/7	1
	0	y_7	2	**4**	0	0	-1	0	1	2	1/2
		$\hat{\Delta}$	-2	-4	-	0	1	1	-		
III		y_3	**1/2**	0	1	-1	0			3/14	3/7
	-1	y_2	1/2	1	0	0	-1			11/2	1
		$\hat{\Delta}$	0	-	-	0	0				
		Δ	**-28**	-	-	0	0				
IV		y_1	1	0	2					3/7	
		y_2	0	1	-1					2/7	
		Δ	-	-	56						

Таким образом, получен следующий оптимальный план двойственной задачи:

$$\begin{cases} y^* = \left[\dfrac{3}{7}, \dfrac{2}{7}\ ,\ 0 \right] \\ F(y^*) = 120. \end{cases}$$

Для получения оптимального решения прямой задачи воспользуемся соотношением из Теоремы 2:

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* \right) \cdot x_j^* = 0$$

Подставив оптимальные значения вектора $\bar{y}^*$, получим оптимальные значения вектора $\bar{x}^*$.

$$\begin{cases} 5\cdot x_1^* + 2\cdot x_2^* - 160 \ \cdot \dfrac{3}{7} = 0, \\ 3\cdot x_1^* + 4\cdot x_2^* - 180 \ \cdot \dfrac{2}{7} = 0 \end{cases}$$

$$x_1^* = 20, \quad x_2^* = 30.$$

Получен тот же оптимальный план что и при решении прямой задачи (см. слайд 25 «Задача об использовании сырья»)

Экономическая трактовка двойственности

Если прямую задачу:

$$
\left.
\begin{aligned}
& f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i,\ i = \overline{1,\ m}
\end{aligned}
\right\}
$$

рассматривать, как задачу об использовании сырья (ресурсов), то параметры задачи имеют следующий экономический смысл.

Экономический смысл переменных

В прямой задаче:

- x_j – количество единиц j-го продукта;
- c_j – стоимость единицы j-го продукта;
- b_i – ресурс(запас) i-го сырья;

В двойственной:

y_i – стоимость единицы i-го сырья;

Тогда стоимость всех ресурсов

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min$$

А стоимость всех затраченных ресурсов, идущих на выпуск единицы *j*-ой продукции не меньше окончательной стоимости этого продукта

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot y_i \geq c_j$$

Если коэффициенты ограничений b_i понимается как ресурсы, то с точки зрения предприятия эти ресурсы имеют определенную ценность.

Любой вид ресурса обладает некоторой «теневой ценой», определяющей ценность данного ресурса для получения предприятием дохода, равного разности (прибыль – затраты). А под оптимальным планом понимается отношение

$$\frac{\text{прибыль}}{\text{затраты}}$$

Определение оптимальных «теневых цен» – основная цель двойственной задачи.