

# Удаление вершин из AVL- дерева

Процесс немного более сложный, чем добавление.

Хотя алгоритм операции балансировки *остается тем же*, что и при включении вершин.

Балансировка по-прежнему выполняется с помощью одного из четырех поворотов вершин:

**LL, LR, RL, RR.**

Если при добавлении вершины название поворота определяется *путем от вершины в которой нарушен баланс, к добавленной*, то при удалении картина симметрична.

Если удалена вершина из левого поддерева, потребуется **один из правых поворотов**

**( RR или RL ),**

а при удалении из правого поддерева потребуется **один из левых поворотов**

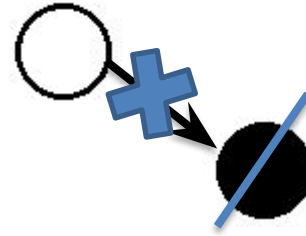
**( LL или LR )**

# Идея алгоритма:

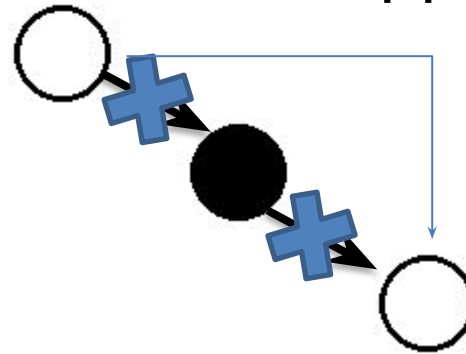
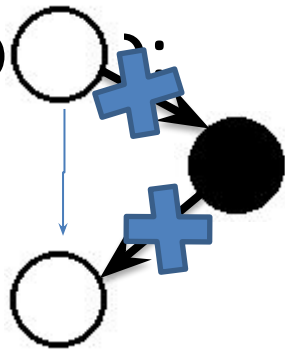
1. Удаляем вершину так же, как это делалось для случайного дерева поиска (СДП);
2. Двигаясь назад по пути поиска от удаленной вершины к корню дерева, будем пересчитывать баланс каждой вершины и при необходимости восстанавливать с помощью поворотов.

Нарушение баланса возможно в нескольких вершинах, в худшем случае - во всех вершинах по пути поиска.

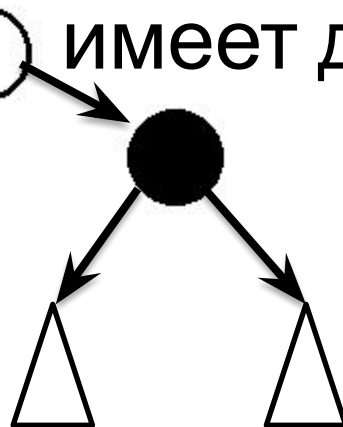
1. Если удаляемая вершина не имеет поддеревьев:



2. Если на удаляемой вершине одно поддер...



3. Если вершина имеет два поддерева:



# Правила удаления:

а) На место удаляемой вершины ставится *наибольшая вершина из её левого поддерева*, т.е. самая правая вершина из левого поддерева, не имеющая правого поддерева.

б) На место удаляемой вершины ставится *наименьшая вершина из её правого поддерева*, т.е. самая левая вершина из её правого поддерева, не имеющая левого поддерева.

Будем строить алгоритмы на правиле «а»

Как и в случае добавления вершин, введем логическую переменную *Умен*, показывающую, уменьшилась ли высота поддерева.

Балансировка производится только, когда ***Умен=истина***. Это значение присваивается, если:

- 1. Обнаружена и удалена вершина;***
- 2. Уменьшилась высота в ходе балансировки.***

Введем две симметричные процедуры балансировки:

**VL** – при удалении из левого поддерева,

# BL ( Vertex \*&p )

IF(p-->Bal = -1) p-->Bal = 0

ELSE IF(p-->Bal = 0) p->Bal = 1, *умень=нет*

ELSE IF (p-->Bal = 1)

IF (p-->Right-->Bal >= 0) <RR1-поворот>

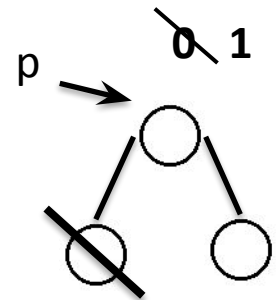
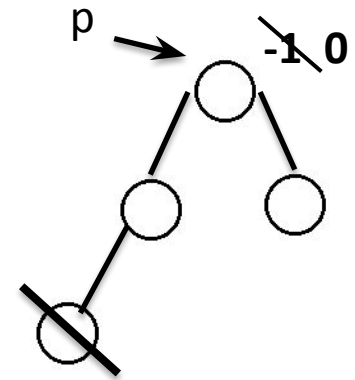
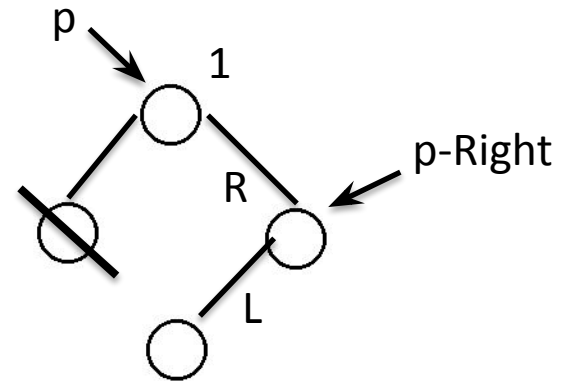
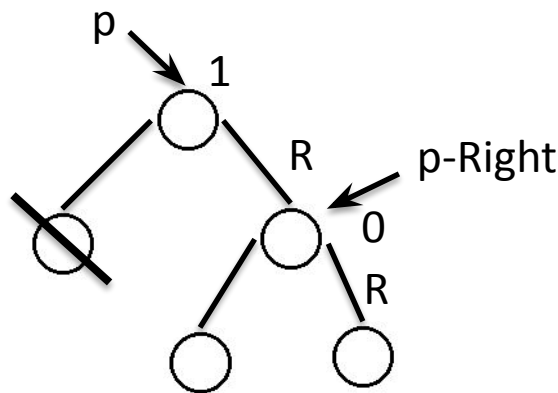
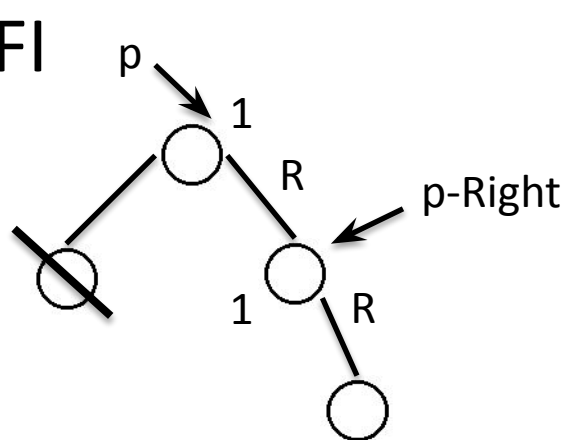
ELSE

<RL-поворот>

FI

FI

FI



# BR ( Vertex \*&p )

IF (p-->Bal = 1) p-->Bal = 0

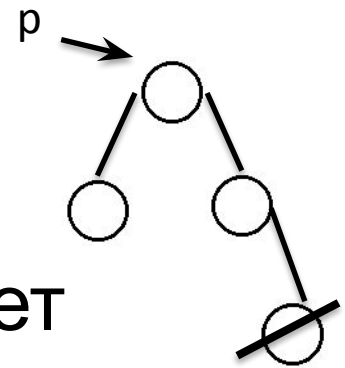
ELSE IF (p-->Bal = 0) p-->Bal = -1, *умень=нет*

ELSE IF (p-->Bal = -1)

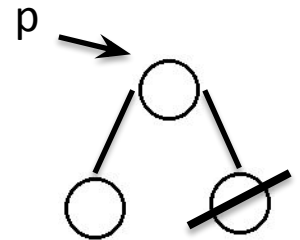
IF (p-->Left-->Bal <= 0) <LL1-поворот>

ELSE

<LR-поворот>

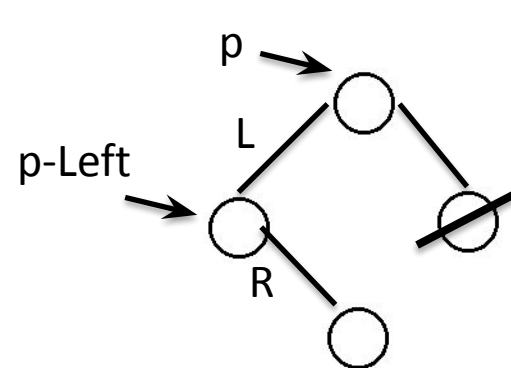
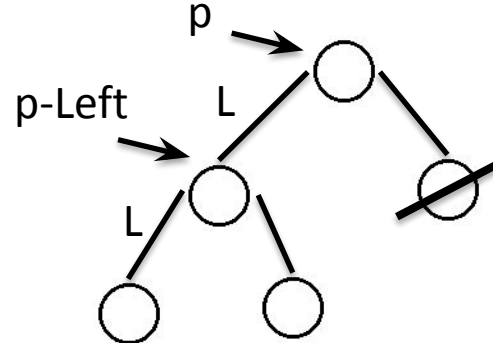
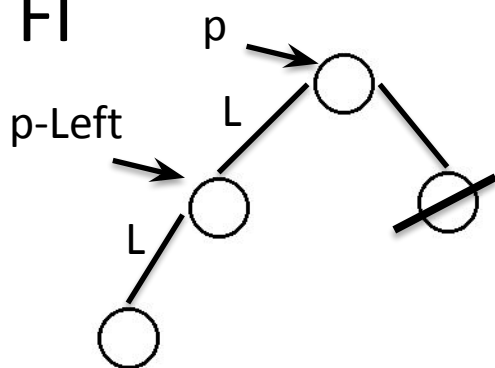


FI



FI

FI





При добавлении вершины не может быть случая, когда  $p \rightarrow \text{Left} \rightarrow \text{Bal} = 0$  или  $p \rightarrow \text{Right} \rightarrow \text{Bal} = 0$ .

Чтобы учесть эти случаи, LL-поворот необходимо изменить на ***LL1-поворот***, а RR-поворот – на ***RR1-поворот***.

### **LL1-поворот**

***$q = p \rightarrow \text{Left}$***

***IF ( $q \rightarrow \text{Bal} = 0$ )  $q \rightarrow \text{Bal} = 1$ ,  $p \rightarrow \text{Bal} = -1$ , Умен = нет***

***ELSE  $q \rightarrow \text{Bal} = 0$ ,  $p \rightarrow \text{Bal} = 0$***

***FI***

***$p \rightarrow \text{Left} = q \rightarrow \text{Right}$***

***$q \rightarrow \text{Right} = p$***

***$p = q$***

Аналогично изменяется RR-поворот на RR1-поворот, повороты LR и RL – не изменяются.

## DELETE (x, vertex \*&p)

IF (p = NULL)

ELSE IF (x < p-->Data) DELETE (x, p-->Left)

IF Умех=∂а BL(p) FI

ELSE IF (x > p-->Data) DELETE (x, p-->Right)

IF Умех=∂а BR(p) FI

ELSE q = p

IF (q-->Left = NULL) p = q-->Right, Умех=∂а

ELSE IF (q-->Right = NULL) p = q-->Left, Умех=∂а

ELSE del (q-->Left)

IF Умех=∂а BL(p) FI

FI

free(q)

FI

Функция del удаляет вершину, имеющую два поддерева, т.е. заменяет ее на самую большую (правую) вершину из левого поддерева.

*del (vertex \*&r)*

IF (r-->Right != NULL) del (r->Right)

IF *Умень=да* BR(r) FI

ELSE q-->Data = r-->Data

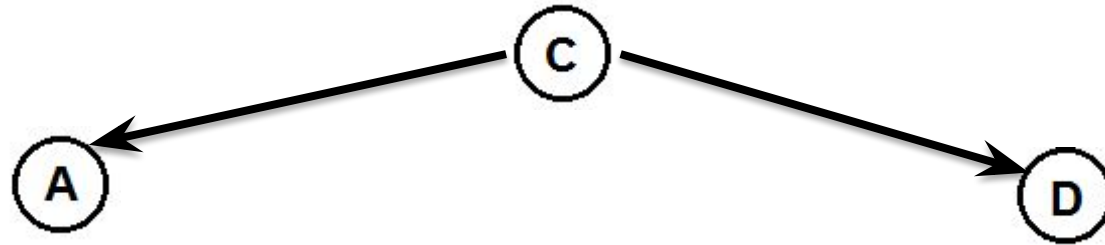
q = r

r = r-->Left

*Умень = да*

FI

**B 9 2 4 1 7 E F A D C**



Замечание: «По экспериментальным оценкам на каждые два включения встречается **один поворот**, а при исключении поворот происходит **в одном случае из пяти**». Н. Вирт

# **Трудоемкость работы с AVL-деревьями**

**Поиск элемента с заданным ключом, включение элемента, удаление элемента** – все операции производятся в худшем случае за  **$O(\log_2 n)$**  операций сравнения.

Отличия между процедурой включения и удаления: включение может привести самое большое к одному повороту, а удаление может потребовать повороты во всех вершинах по пути поиска.

**Наихудший случай с точки зрения количества поворотов** – удаление самой правой вершины у плохого AVL-дерева

$T_5 : H=5$

