Лекция 6. **Динамическое программирование**

Содержание лекции:

Литература

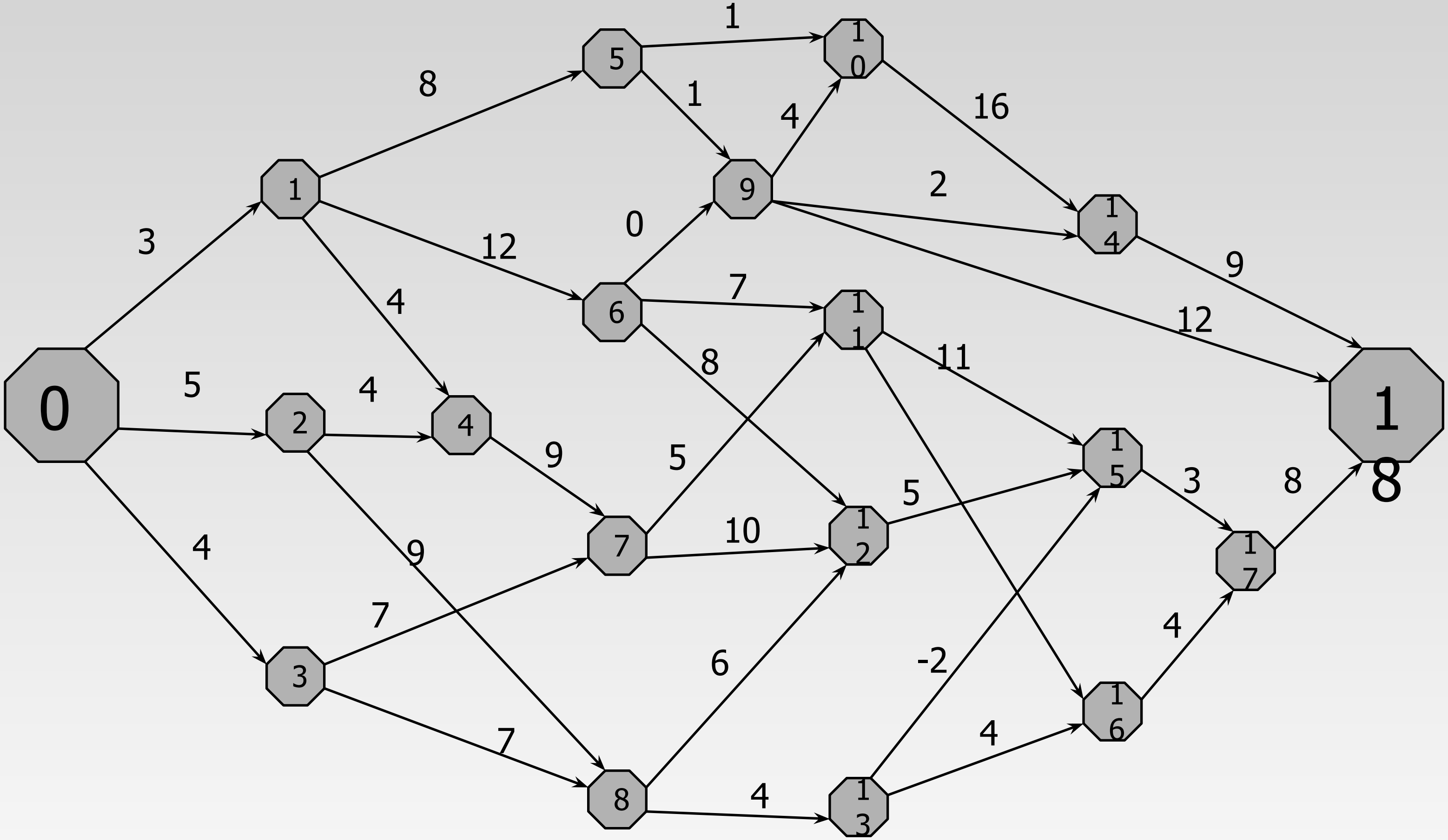
- *Фомин Г.П.* Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2005. — Глава 5.
- Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. *В.В. Федосеева*. — 2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — Раздел 3.5.

6.1. Формулировка задачи динамического программирования

- Дано:
  - множество состояний
    - в том числе *начальное* и *конечное*
  - множество возможных переходов из одного состояния в другое
    - с каждым переходом связывается числовой параметр
      - интерпретируется как затраты, выгода, расстояние, время и т. п.
- Найти:
  - оптимальную последовательность переходов (*путь*) из начального состояния в конечное
    - максимум или минимум суммы числовых параметров
    - предполагается, что хотя бы один путь из начального состояния в конечное существует

6.1

Пример



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
3
5
4
8
12
4
4
9
7
7
1
1
4
0
7
8
9
5
10
6
4
2
16
12
9
11
5
-2
4
3
8
4

сумма числовых значений (e.g. расстояний) по всему пути

Математическая запись

6.1

единственность искомого пути: в каждую вершину можно прийти только из одной вершины (или вообще нельзя)

если искомый путь пришёл в вершину k, то он должен из неё выйти (если только она не конечная)

1, если путь проходит через дугу (i,j)
0, если не проходит или такой дуги нет

Например, расстояние между пунктами i и j, км

$$\max_{x_{ij}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \le 1,\ j \in J$$

$$\sum_{i \in I} x_{ik} = \sum_{j \in J} x_{kj},\ k \in I \setminus \{0\}$$

$$x_{ij} \in \{0;1\},\ i \in I,\ j \in J$$

$$x_{ij} = 0,\ i \in I,\ j \in J,\ (i, j) \notin A$$

Условие целочисленности переменных

Между вершинами i и j нет дуги.

x_{ij} – переменная включения дуги (i, j) в путь

c_{ij} – числовое значение, приписанное дуге

I – множество вершин, кроме конечной

J – множество вершин, кроме начальной вершины 0

A – множество всех дуг

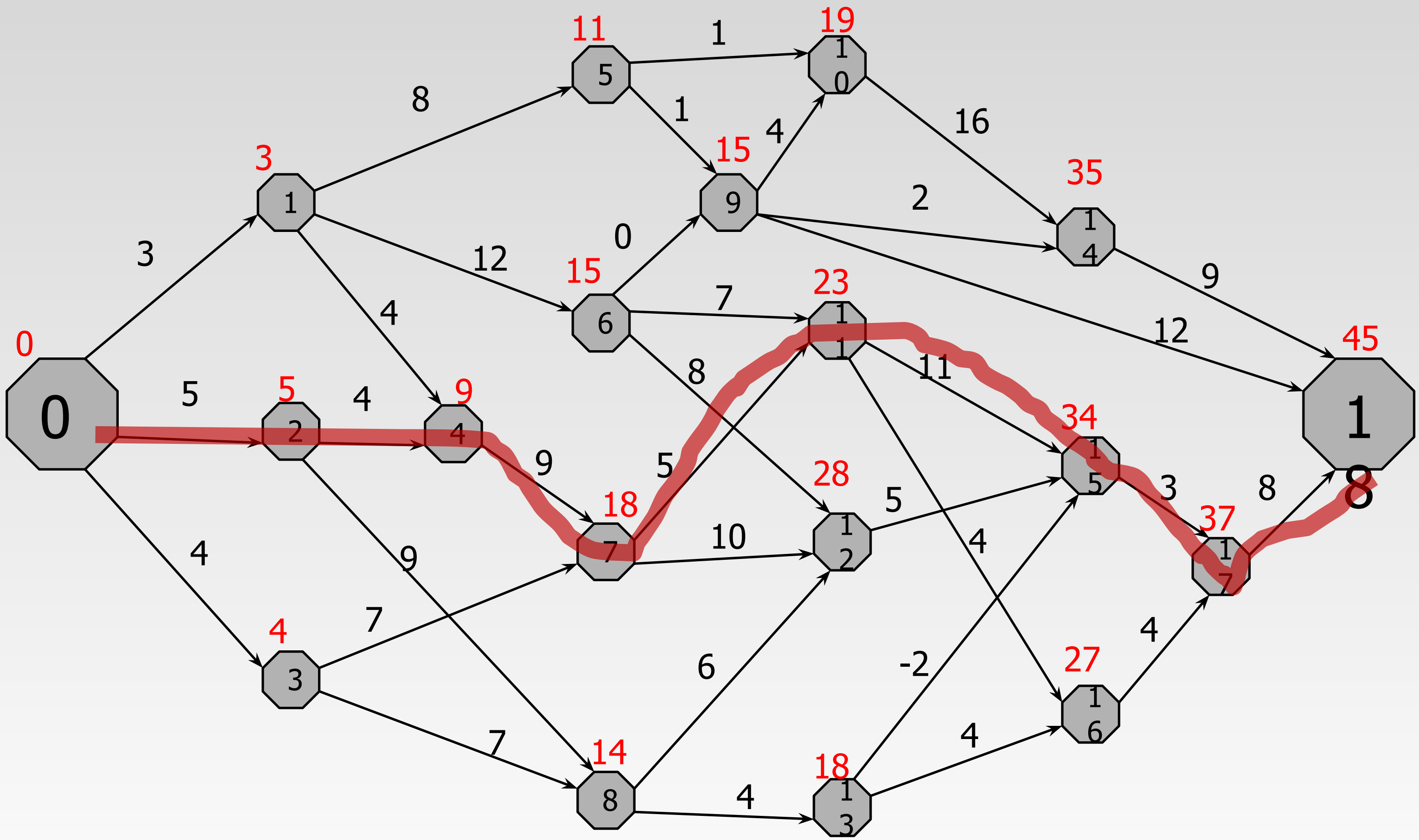
$X \setminus Y$ – оператор исключения множества Y из множества X

{(1,2), (1,3), (2,4), (2,5), (3,5)…}

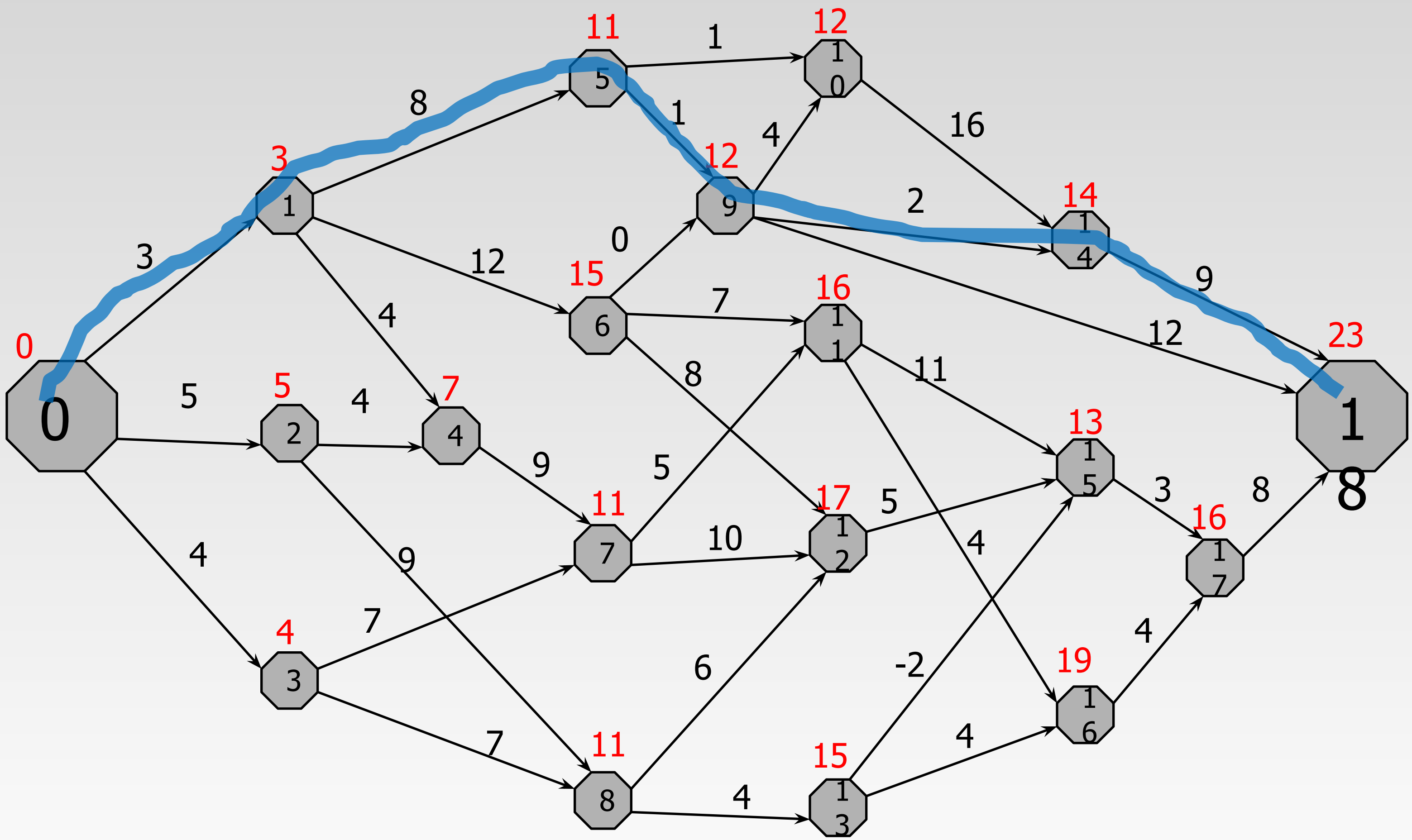
6.2. Принцип оптимальности Беллмана

- *Если вершины A и B лежат на оптимальном пути между вершинами 0 и X, то часть оптимального пути от 0 до X между вершинами A и B непременно является оптимальным путём от A до B.*
- Следствие
  - Чтобы найти оптимальный путь от 0 до *A*, достаточно исследовать продолжения к *A* всех оптимальных путей до вершин, предшествующих *A*
  - Продолжения неоптимальных путей к предшествующим вершинам можно не просчитывать: они никогда не дадут оптимального пути к *A*
- Принцип Беллмана позволяет построить простую и эффективную вычислительную процедуру для решения задач динамического программирования

6.3. Алгоритм решения задач динамического программирования



6.3. Алгоритм решения задач динамического программирования



минимум

6.4. Экономические приложения

Управление проектами	• Дуги - работы, которые должны быть выполнены • Параметры – продолжительность работ • Самый длинный путь (max) определяет минимальный срок выполнения проекта
Управление реновацией основных средств производства	• Дуги соответствуют решениям: • *e.g.*, эксплуатировать; ремонтировать; списать • Параметры –доходы • Самый выгодный путь (max) определяет жизненный цикл элемента основных средств
Бизнес-планирование	• Дуги – операции, переводящие фирму в новое состояние • Параметры – доходы (расходы) • Самый выгодный путь определяет наилучший бизнес-план
Поиск оптимального маршрута	• Дуги – пути сообщения • Параметры – время (или стоимость) перевозки • Самый выгодный (min) путь определяет оптимальную перевозку