Тема: Ряды

§1. Числовые ряды

1.1. Понятие числового ряда

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – числовая последовательность.

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется **числовым рядом**,

числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – **члены ряда**,

a_n – *n*-й или **общий член** ряда.

Ряд (1) считается заданным, если известен общий член ряда, выраженный как функция его номера *n*:

$$a_n = f(n).$$

Сумма конечного числа *n* первых членов ряда (1)

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

называется *n*-й **частичной суммой.** Таким образом, $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots,$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Если для последовательности частичных сумм ряда (1) существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд (1) называется **сходящимся**, а число – S – **суммой** данного ряда ($S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то ряд (1) называется **расходящимся**. Такой ряд суммы не имеет.

Пример

1. Ряд **0+0+0+…+0+…** сходится, его сумма S=0.
2. Ряд 1+1+1+...+1+... расходится, так как предел $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$
3. Ряд 1-1+1-1+... расходится, так как последовательность частичных сумм $S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ \ S_3 = 1, \ldots$ предела не имеет.

Свойства рядов

- 1. Если к ряду (1) прибавить или отбросить конечное число его членов, то полученный ряд и ряд (1) сходятся или расходятся одновременно.
- 2. Если ряд (1) сходится и его сумма равна ***S***, а **λ** – некоторое число, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots \lambda a_n + \ldots$$

сходится и его сумма равна **λ*S***.

- 3. Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2

то сходится ряд $\sum_{i=1}^{n} (a_n + b_n)$

и его сумма равна

$$\sum_{i=1}^{n} (a_n + b_n) = S_1 + S_2.$$

Замечания

1. Из свойства 3 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.
2. **Сумма (разность**) двух **расходящихся рядов** может быть **как сходящимся**, **так и расходящимся рядом**.

Ряд $$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

называется ***n***-м остатком ряда (1). Он получается из ряда (1) отбрасыванием ***n*** первых его членов.

Ряд (1) получается из остатка добавлением конечного числа членов. Поэтому согласно свойству 1, ряд (1) и его остаток одновременно сходятся или расходятся.

Из свойства 1 также следует , что если ряд (1) сходится, то его остаток

$$r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Достаточный признак расходимости ряда

Если $$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

или не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример

Исследовать сходимость ряда

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}; \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}.$$

Решение. 1. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2+1/n}=\frac{1}{2}\neq 0$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+2/n^3}=0.$$

§2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Первый признак сравнения

Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (3)

справедливо неравенство $0 \le a_n \le b_n$

для всех $n \ge n_0 \in N$, то

- из сходимости ряда (3) следует сходимость ряда (2);
- из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (3).

Второй признак сравнения

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

– ряды с положительными членами, причем существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0.$$

Тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходятся или расходятся одновременно.

Ряды, используемые при применении признаков сравнения

1. Гармонический ряд –

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

расходящийся ряд.

2. Ряд, составленный из членов геометричес-кой прогрессии,

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots ,$$

$$a \neq 0,$$

- при $|q| < 1$ сходится и его сумма равна

$$S = \frac{a}{1-q},$$

- при $|q| \geq 1$ расходится.

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

$$p>0,$$

при $p>1$ сходится,

при $0<p\leq 1$ расходится.

Пример

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится (как обобщенный гармонический при $p = 2 > 1.$

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ – расходится (как обобщенный гармонический при $p = 1/2 < 1$

Признак Даламбера

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с положительными членами, и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то – расходится.

Если

$$l = 1$$

то ряд может сходиться или расходиться.

Ряд требуется исследовать с помощью других признаков сходимости.

Вспомогательные сведения

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$$

Пример

1. Записать общий член ряда, 2 первых члена ряда и (n+1)-й член ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3}$$

Решение. Формула общего члена ряда:

$$a_n = \frac{4^n}{n^3}$$

Подставляя в формулу общего члена ряда вместо n значения 1, 2, n+1, получим

$$a_1 = \frac{4^1}{1^3} = 4 \qquad a_2 = \frac{4^2}{2^3} = 2$$

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)^3}$$

2. Используя признак Даламбера исследовать ряд на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Решение.

общий член ряда: $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

(n+1)-й член ряда:

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2\cdot n!}{n!(n+1)\cdot 2^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$$

По признаку Даламбера ряд сходится.

§3.
ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

3.1. Знакочередующиеся ряды

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad \mathbf{(4)}$$

где $a_n > 0$ для всех $n \in N$, называется **знакочередующимся**.

Признак Лейбница

Пусть дан знакочередующийся ряд (4). Если выполнены два условия

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$;

2) общий член ряда стремится к нулю при $n \to +\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$

то ряд сходится. При этом сумма ряда удовлетворяет неравенствам $0 < S < a_1$. **(5)**

Замечания

1. Ряды вида (4), для которых выполняются условия теоремы Лейбница, называются **лейбницевскими** (или рядами Лейбница).

2. Соотношение (5) позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму ***S*** данного ряда его частичной суммой S_n.

Отброшенный ряд (остаток) представляет собой также знакочередующийся ряд

$$(-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2} + \dots)$$

сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда, т. е.

$$S_n < a_{n+1}.$$

Поэтому ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

Абсолютная сходимость

- Знакочередующийся ряд называется **абсолютно сходящимся**, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится. В этом случае сходится и сам знакочередующийся ряд.
- Знакочередующийся ряд называется **условно сходящимся**, если ряд из модулей его членов расходится, а сам знакочередующийся ряд сходится.

Пример

- Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$$

Решение. Исследуем на сходимость ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

Это обобщенный гармонический ряд (***p=1/3***), поэтому ряд расходится.

Следовательно абсолютной сходимости нет.

Выясним, сходится ли он условно. Используем признак Лейбница:

1) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает:

$$1 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \ldots ;$$

2) общий член ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

сходится условно.