

Лекция 2.

Предел функции.

Непрерывность.

План лекции:

1. Предел функции. Теоремы о пределах функции.
2. Замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей.
3. Непрерывность функции.
4. Классификация точек разрыва.

1. Предел функции. Теоремы о пределах функции.

Опр. 1. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для каждого положительного наперед заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$, что для всех x , отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \varepsilon$ выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \delta$.

Число δ зависит от ε , при
уменьшении ε уменьшается δ

Если A – это предел $f(x)$ в точке
 $x=a$, то обозначают

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Пример 1.

- а) Вычислите предел:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x}{6x + 1} = \frac{2^2 - 4 \cdot 2}{6 \cdot 2 + 1} = \frac{-4}{13} = -\frac{4}{13}$$

- б) Вычислите следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\cos 3x} = \frac{2 \sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Бесконечно большие величины. Ограниченные функции. Бесконечно малые величины и их свойства.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

- бесконечно
большая величина

Переменная величина x называется бесконечно большой, если в процессе изменения ее абсолютная величина $|x|$ становится и остается больше любого наперед заданного как угодно большого положительного числа $N > 0$:
 $|x| > N$

Переменная x называется бесконечно малой, если в процессе изменения ее абсолютная величина становится и остается меньше наперед заданного как угодно малого положительного числа ε .

, т.е. начиная с некоторого момента выполняется неравенство $|x| < \varepsilon$.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} = 0$$

- бесконечно

малая величина

Основные теоремы о бесконечно малых.

- 1. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.
- 2. Произведение бесконечно малой на величину ограниченную есть также величина бесконечно малая.
- Следствие 1: Произведение бесконечно малой на величину постоянную, есть бесконечно малая.
- Следствие 2: Произведение конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.
- Следствие 3: Частное от деления бесконечно малой величины на величину имеющую предел, отличный от нуля, есть также бесконечно малая величина.

Теоремы о пределах.

- Теорема 1. Предел алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен сумме пределов этих слагаемых.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

- Теорема 2. Предел произведения любого конечного количества сомножителей равен произведению их пределов.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Теорема 3. Предел частного двух переменных равен частному их пределов, если только предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Следствие 2. Предел степени переменной равен той же степени предела переменной:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

Замечательные пределы

Теорема 4.

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот предел называется **1-ым замечательным пределом.**

- Теорема 5.

Последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \rightarrow \infty$

имеет предел, заключенный между числами 2 и 3:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

где $e = 2,71828\dots$

Этот предел называется **2-ым замечательным**

Раскрытие неопределенности

Существуют неопределенности следующих ВИДОВ:

1) $\left[\frac{0}{0} \right]$, 2)

3) $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$,

$\left[1^{\infty} \right]$,

4) $[0 \cdot \infty]$, 5)

$[\infty - \infty]$.

Неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$

1) 1 правило Лопиталю:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2) 1 замечательный предел (формулу см. ранее).

Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

1) 2 правило Лопиталю (также применяется производная).

2) Вынесение переменной в наибольшей степени вместе с коэффициентом и из числителя и из знаменателя

(применяется только при условиях: а) числитель и знаменатель представляют собой целую рациональную функцию; б) переменная стремится

Пример 2.

- а) Вычислите предел:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{6x - 6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{6 - 0} = \frac{2 - 1}{6} = \frac{1}{6}$$

- б) Вычислите следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x}{3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}$$

Пример 3.

- а) Вычислите предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x}{6x + 3x^4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^2} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0.$$

- б) Вычислите следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \ln 3x}{\frac{2}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{7}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{3x}}{\frac{1}{x * x}} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Неопределенность

$[1^\infty]$

Метод решения:
используется 2-ой
замечательный предел
(формулу см. ранее).

3. Непрерывность функции.

- Определение 7.
Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

- Определение 8. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если:
- Эта функция определена при $x=x_0$.
 - Предел функции в точке $x=x_0$ равен значению функции в точке x_0 .

- Определение 9. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если эта функция непрерывна в каждой точке этого отрезка.

4. Классификация точек разрыва.

• Разрыв в точке $x=x_0$ имеет место, если нарушено хотя бы одно из трех условий непрерывности функции:

- 1) В точке $x=x_0$ функция $f(x)$ не имеет конечного предела;
- 2) Функция не существует в x_0 ;
- 3) Предел функции в точке существует, но не совпадает с ее значением в этой точке, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

• Различают три вида точек разрыва:

- 1) Точки разрыва I рода.
Если в точке $x=a$ левосторонний и правосторонний пределы существуют, но не равны между собой, то точка a называется точкой разрыва I рода.

- 2) Точки разрыва второго рода. Если в точке $x=a$ не существуют левосторонний или правосторонний пределы или оба одновременно, то точка a называется точкой разрыва II рода.
- 3) Устранимые точки разрыва. Если в точке $x=a$ функция $f(x)$ имеет левосторонний и правосторонний пределы и эти пределы равны между собой, но их значения не совпадают со значением функции в точке a , то точка a называется точкой "устранимого разрыва".