Основные понятия

Логика высказываний

Основные понятия

Всякое суждение, утверждающее что-либо о чем-либо, называют высказыванием, если можно сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени.

Примеры высказываний:

1. Меню в программе – это список возможных вариантов.
2. Сканер – это устройство, которое может напечатать на бумаге то, что изображено на экране компьютера.
3. Для всех x из области определения $\sqrt{x+1}$ верно, что $x+2>0$.
4. Логические операции задаются таблицами истинности и могут быть графически проиллюстрированы с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Основные понятия

Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями:

1. Как пройти в библиотеку?
2. Коля спросил: «Как пройти к Большому театру?».
3. Картины Пикассо слишком абстрактны.
4. Решение задачи – информационный процесс.
5. Число 2 является делителем числа 7 в некоторой системе счисления.

Основные понятия

Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями:

1) Здравствуй!
2) Аксиома не требует доказательств.
3) Идёт дождь.
4) Какая температура на улице?
5) Число х не больше двух.
6) Уходя гасите свет.

Основные понятия

Определите значение логических высказываний:

a) Кислород – газ.
b) Я живу в Москве.
c) Снег - белый.
d) 2 меньше 3.
e) X < 5
f) Как хорошо быть генералом!
g) Первая космическая скорость равна 7,8 км/с.

Основные понятия

Высказывание называется простым, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Высказывание называется составным, если оно состоит из простых высказываний, соединенных логическими связками.

Какие из высказываний простые, а какие сложные?

1. 7+8=15 и 6+7=13
2. Число 3 больше числа 2
3. Неверно, что корова – хищное животное.
4. Логическое сложение и умножение – двуместные операции, в них участвует два высказывания.

Основные понятия

Формализацией высказываний называют операцию замены высказывания естественного языка формулой математического языка, включающего высказывательные переменные и символы тех логических операций, которые соответствуют структуре самого высказывания.

Простые высказывания в алгебре логики обозначаются заглавными латинскими буквами:

A = {Аристотель - основоположник логики}

B = {На яблонях растут бананы}.

и

л

Составные высказывания на естественном языке образуются с помощью союзов, которые в алгебре высказываний заменяются на логические операции.

Логические связки

В естественном языке (при вербальном описании явления) роль связок при составлении сложных предложений из простых играют следующие грамматические средства: союзы “и”, “или”, “не”; слова “если ..., то”, “либо ... либо” (в разделительном смысле), “тогда и только тогда, когда” и др. В логике высказываний логические связки, используемые для составления сложных высказываний, обязаны быть определенными точно.

Логические связки

<table>
<tr><th>В естественном языке</th><th>В логике</th><th>Обознач-ие</th></tr>
<tr><td>неверно, что ...</td><td>отрицание</td><td>¬, ‾, ┐</td></tr>
<tr><td>... и ... | ... хотя ... | ... но ... | ... а ... | ... однако ...</td><td>конъюнкция</td><td>&, $\wedge$</td></tr>
<tr><td>... или ...</td><td>дизъюнкция</td><td>$\vee$</td></tr>
<tr><td>если ..., то ... | из ... следует ... | ... влечет ... | ... необходимо ...</td><td>импликация</td><td>$\rightarrow$</td></tr>
<tr><td>... тогда и только тогда, когда ...
... равносильно ...
... необходимо и достаточно
... в том и только в том случае ...</td><td>эквивалентность</td><td>$\leftrightarrow$, ~, ≡</td></tr>
<tr><td>либо ..., либо ...</td><td>строгая дизъюнкция , неравнозначность, сложение по модулю 2</td><td>$\oplus$</td></tr>
</table>

Отрицание

Отрицанием (Ā - не А) некоторого высказывания А называется такое высказывание, которое истинно, когда А ложно, и ложно, когда А истинно.

Определение отрицания может быть записано с помощью таблицы истинности:

А	Ā
л	и
и	л

В ней указано, какие значения истинности (Истина, Ложь) принимает отрицание **Ā** в зависимости от значений истинности исходного высказывания **А**.

Отрицание

Пример 1

X = "Число 5 является делителем числа 30"

$\overline{X}$ = "Число 5 не является делителем числа 30"

¬ X = "Неверно, что число 5 является делителем числа 30"

Пример 2

A = "Все тетради в портфеле."

¬ A = "Не все тетради в портфеле"

$\bar{A}$ – «Неверно, что все тетради в портфеле».

Отрицание

Правило построения отрицания к простому высказыванию:

При построении отрицания к простому высказыванию либо используется речевой оборот “неверно, что”, либо отрицание строится к сказуемому, тогда к сказуемому добавляется частица “не”, при этом слово “все” заменяется на “некоторые” и наоборот.

Задание. Постройте отрицание для высказываний:

- Все ребята умеют плавать.
- Каждый человек – художник.
- Человек все может.
- Сегодня в театре идет опера “Евгений Онегин”.

Все юноши 11-х классов — отличники $\Leftrightarrow$ Не все юноши 11-х классов — отличники

Некоторые юноши 11-х классов — не отличники

Некоторые юноши 11-х классов — отличники $\Leftrightarrow$ Все юноши 11-х классов — не отличники

Отрицание

Задание: Найдите правильно построенное отрицание суждения "Все воздушные шары зелёные":

1. ~~Все воздушные шары не зелён~~ные.
2. Не все воздушные шары зелёные.
3. Некоторые воздушные шары не зелёные.

Задание: Запишите отрицания следующих высказываний:

1. Сегодня хорошая погода.
2. Число 3 - чётное.
3. Некоторые млекопитающие не живут на суше.
4. Во всякой школе некоторые ученики увлекаются программированием.

Конъюнкция

Конъюнкция (от латинского conjunctio - союз, связь).

Конъюнкцией двух высказываний (A&B - A и B) называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба эти высказывания.

A	B	A&B
л	л	л
л	и	л
и	л	л
и	и	и

Конъюнкция

Пример:

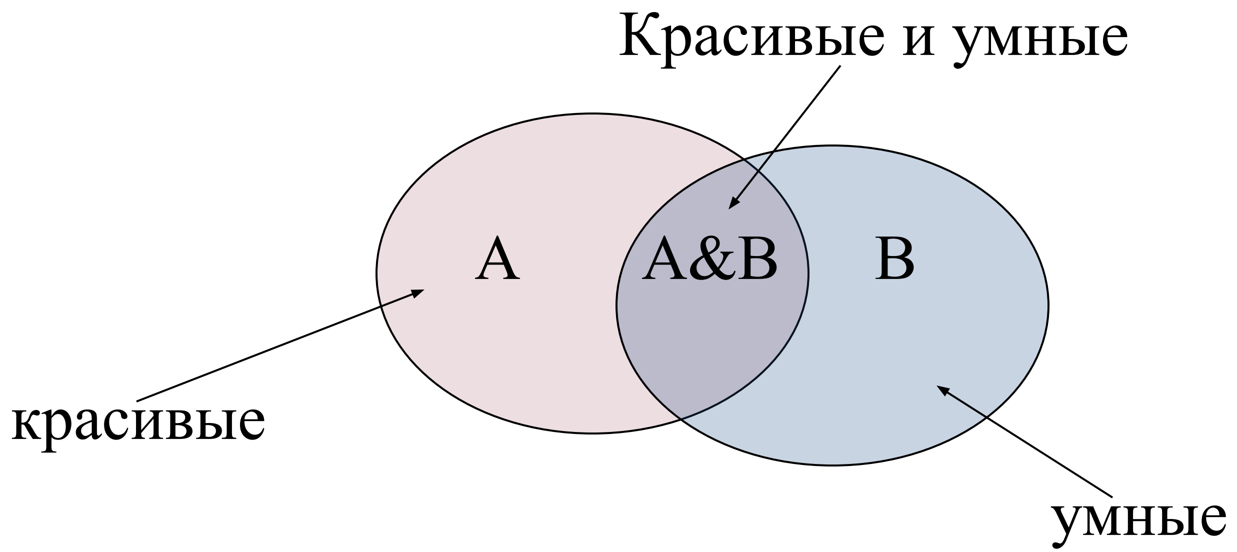
А: "У кота есть хвост "

В: "У зайца есть хвост"

А & В: "У кота и у зайца есть хвост".

Это высказывание истинно, т.к. истинны оба высказывания А и В.

A = "Этот человек красивый"
B = "Этот человек умный"
A ∧ B = "Этот человек красивый и умный"



Связка И предполагает одновременную истинность составляющих суждений.

Конъюнкция

Пример:

A = "Черепаха Тортилла жила в пруде 300 лет." – и

B = "Буратино не является персонажем сказки “Золотой Ключик”." – л

C = “Буратино деревянный человечек” – и

D = “Пьеро безнадёжно влюблён в Мальвину” – и

C & B = "Буратино деревянный человечек и не является персонажем сказки “Золотой Ключик” ". – л

A & D = “Черепаха Тортилла жила в пруде 300 лет и Пьеро безнадёжно влюблён в Мальвину” – и

Дизъюнкция

Дизъюнкция (от латинского disjunctio - разобщение, различие).

Дизъюнкцией двух высказываний А и В (AVB - А или В) называется такое новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно ХОТЯ БЫ ОДНО из этих высказываний.

A	B	AVB
л	л	л
л	и	и
и	л	и
и	и	и

Дизъюнкция

Пример:

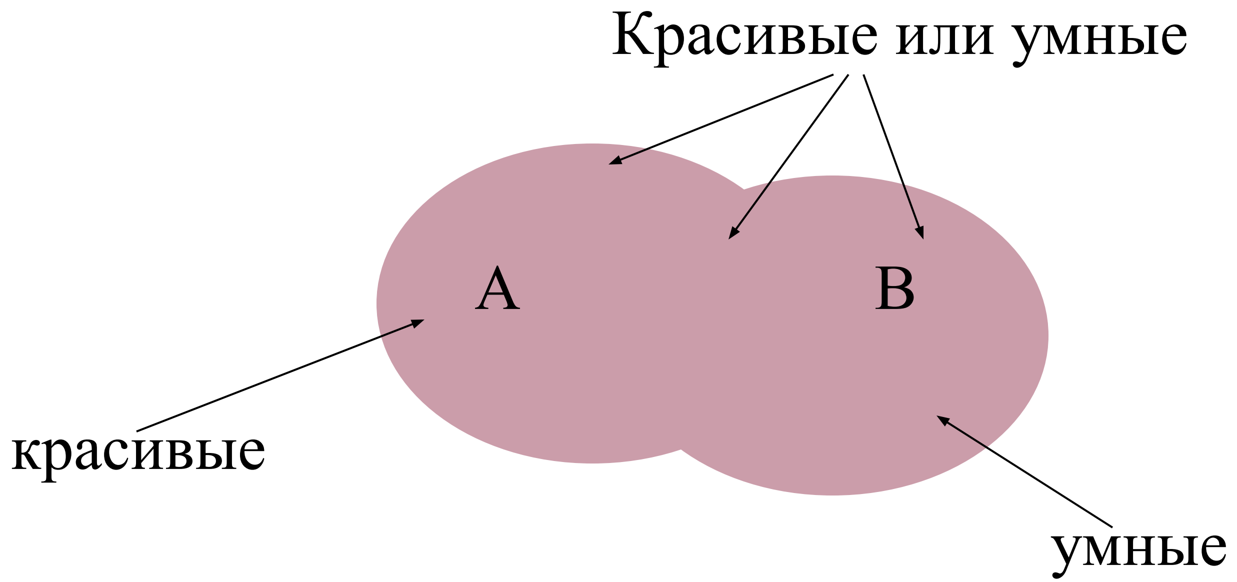
А: "У кота есть длинный хвост "

В: "У зайца есть длинный хвост"

А $\vee$ в: "У кота или у зайца есть длинный хвост".

Это высказывание истинно, т.к. истинно высказывание А.

A = "Этот человек красивый"
B = "Этот человек умный"
A ⋁ B = "Этот человек красивый или умный"



Связка ИЛИ предполагает истинность хотя бы одного составляющего суждения.

Задания

Из двух простых высказываний постройте сложное высказывание, используя логические связки “И”, “ИЛИ”

1. Марина старше Светы. Оля старше Светы.
2. В кабинете есть учебники. В кабинете есть справочники.
3. Слова в этом предложении начинаются на букву Ч. Слова в этом предложении начинаются на букву А.
4. Синий кубок меньше красного. Синий кубок меньше зелёного.
5. X = 3, X > 2.

Импликация

Импликация (от латинского implico - тесно связываю).

Импликацией $A \to B$ (если A, то B) называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно и B ложно.

A	B	$A \to B$
л	л	и
л	и	и
и	л	л
и	и	и

Импликация

Пример:

A – «Перевыполню задание»

B – «Получу премию»

$A \to B$ – «Если перевыполню задние, то получу премию».

A	B	$A \to B$
л	л	и
л	и	и
и	л	л
и	и	и

Импликация

Примеры:

А: «Стало темно»

В: «Нужно зажечь свет»

$A \rightarrow B$: «Если стало темно, то нужно зажечь свет»

А = «Человек любит животных»,

В = «Человек добрый»

$A \rightarrow B$ = «*Если человек любит животных, то он – добрый*»

Импликация

1. Пусть А: «Через Смоленск протекает Днепр», В: «Луна сделана из теста». Сформулируйте на обычном языке высказывание Х: $A \to B$. Определите его истинность.
2. Пусть S: “Через Смоленск протекает Енисей”, C: “2+4 = 6”, N: “2+3=8”. Сформулируйте на русском языке высказывания: D: $S \to C$; M: $C \to S$; K: $S \to N$. Определите их истинность.
3. Пусть P: “Ане нравятся уроки математики”, а Q: “Ане нравятся уроки химии”. Выразите формулы на обычном языке:
$P \to Q$; $P \to \overline{Q}$; $\overline{P \to Q}$.

Эквиваленция

Эквиваленцией (эквивалентностью) двух высказываний A и B (A~B – A эквивалентно B) называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинностные значения высказываний A и B совпадают.

A	B	A~B
л	л	и
л	и	л
и	л	л
и	и	и

Эквиваленция

Пример.

X: данный четырёхугольник – квадрат

Y: данный четырёхугольник – прямоугольник

X→Y: Если данный четырёхугольник – квадрат, то он и прямоугольник.

X ~ Y: Данный четырёхугольник – квадрат тогда и только тогда, когда он - прямоугольник

Эквиваленция

М =«пингвины живут в Антарктиде», К = «3>2»,

М~К = «Пингвины живут в Антарктиде тогда и только тогда, когда 3>2»

Людоед голоден тогда и только тогда, когда он давно не ел.

А = ?, В = ?
А = Людоед голоден , В = Людоед давно не ел.

Эквиваленция

1. Пусть S: «Через Смоленск протекает Енисей», C: «2+4=6», N: «2+3=8». Сформулируйте на русском языке высказывания:

   $S \Leftrightarrow C$; $C \Leftrightarrow S$; $S \Leftrightarrow N$. Определите их истинность.

2. Пусть P=«Тане нравятся уроки математики», а Q= «Тане нравятся уроки химии». Выразите формулы на обычном языке:

   $P \Leftrightarrow Q$; $P \Leftrightarrow \neg Q$; $\neg (P \Leftrightarrow Q)$

Неравнозначность

Неравнозначностью двух высказываний А и В (А⊕В - либо А, либо В) называется такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда истинностные значения высказываний А и В совпадают.

А	В	А⊕В
л	л	л
л	и	и
и	л	и
и	и	л

Неравнозначность

Пример:

A: «Сейчас январь»

B: «Сейчас июль»

$A \oplus B$: «Сейчас либо январь, либо июль».

X: «Вася сдал экзамен по математике на 5»

Y: «Вася сдал экзамен по математике на 3»

$X \oplus Y$: «Вася сдал экзамен по математике на 5 или на 3».

Логические операции

Сводная таблица

P	**Q**	$\overline{P}$	P&Q	PVQ	P⊕Q	P→Q	P~Q
Л	**Л**	И	Л	Л	Л	И	И
Л	**И**	И	Л	И	И	И	Л
И	**Л**	Л	Л	И	И	Л	Л
И	**И**	Л	И	И	Л	И	И

Логические операции

P = {*Вася на каникулах поедет в Карелию*}

Q = {*Иван сдаст сессию без задолженностей*}

Опишите словами формулы:

1) $P \& Q$
2) $\overline{P} \& Q$
3) $P \& \overline{Q}$
4) $P \vee Q$
5) $P \vee \overline{Q}$
6) $\overline{P} \vee \overline{Q}$
7) $\overline{P \& Q}$
8) $\overline{P \vee Q}$
9) $\overline{P \& \overline{Q}}$
10) $P \rightarrow Q$
11) $P \rightarrow \overline{Q}$
12) $\overline{P \rightarrow Q}$

Логические формулы

«Если Сократ — человек и снег — белый, то $7 < 4$».

Разобьем это сложное высказывание на простые высказывания:

X: “Сократ — человек”; Y: “Снег — белый”; Z: “$7 < 4$”.

Запишем схему данного сложного высказывания:

$$(X \& Y) \rightarrow Z.$$

По рассматриваемой схеме построено и высказывание: «Если 100 делится на 5 и на 2, то 100 делится на 10».

Логические формулы

Итак, символическая запись (X&Y)→Z является своего рода формулой.

В формулу (X&Y)→Z вместо переменных X, Y, Z можно подставлять конкретные высказывания, после чего вся формула будет превращаться в некоторое составное высказывание.

Логические формулы

Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, т.е. переменные, пробегающие множество высказываний, называют пропозициональными переменными, или высказывательными переменными.

Пропозициональные переменные обозначаются заглавными буквами латинского алфавита

$$P,\ Q,\ R,\ S,\ X,\ Y,\ Z$$

или такими же буквами с индексами

$$P_1\ P_2\ \ldots,\ Q_1\ Q_2,\ \ldots,\ X_1\ X_2\ \ldots,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ .$$

Логические формулы

Определение

1. Каждая отдельно взятая пропозициональная (высказывательная) переменная есть формула алгебры высказываний.
2. Если F_1 и F_2 — формулы алгебры высказываний, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \& F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \sim F_2)$, $(F_1 \oplus F_2)$ также являются формулами алгебры высказываний.
3. Никаких других формул алгебры высказываний, кроме получающихся согласно п. 1 и 2, нет.

Логические формулы

Определить, какие выражения являются формулами:

1. $\overline{(\overline{N} \,\&\, M)} \to \overline{(\overline{M} \lor N)}$
2. $\overline{(\overline{A} \,\&\, \overline{B})} \lor A$
3. $(A \,\&\, B) \leftrightarrow \overline{(C \lor A)}$
4. $((A \,\&\, B) \,\&\, C) \leftrightarrow (A \,\&\, (B \,\&\, C))$
5. $(A \lor B) \lor C \leftrightarrow A \lor (B \lor C)$
6. $(A \,\&\,) \,\&\, (C \lor D)$;
7. $(A \,\&\, B) \to (C \lor D)$;
8. $(A \lor B) \sim (CD)$;
9. $(A \sim B) \,\&\, (A \,\&\, B) \lor (A \to B)$

Пример 1. Представить логическими формулами следующие высказывания:

1. "Сегодня понедельник или вторник".
2. "Идет дождь или снег".
3. "Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые".
4. "Что в лоб, что по лбу".

1. A – «Сегодня понедельник»
   B – «Сегодня вторник»
   «Сегодня понедельник или вторник» - $(A \oplus B)$
2. X – «Идет дождь»
   Y – «Идет снег»
   «Идет дождь или снег»- $(X \vee Y)$

Пример 1. Представить логическими формулами следующие высказывания:

1. "Сегодня понедельник или вторник".
2. "Идет дождь или снег".
3. "Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые".
4. "Что в лоб, что по лбу".

3. P – «Идет дождь»
   Q – «Крыши мокрые»
   $\overline{P}$ – «Дождя нет»

$(P \rightarrow Q) \& (\overline{P} \& Q)$

4. А – «В лоб»
   В – «По лбу»
   «Что в лоб, что по лбу» - $(A \sim B)$

Пример 2. Записать логическими формулами следующие сложные высказывания:

1. "Если допоздна работаешь с компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в дурном расположении духа или с головной болью".

2. "Если социологические исследования показывают, что потребитель отдает предпочтение удобству и многообразию выбора, то фирме следует сделать упор на усовершенствование товара или увеличение многообразия новых форм".

Сравнить логические формулы и сделать выводы.

3. Записать логической формулой следующий текст:

"Если компьютер при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то она исправна. Если при запуске он выдает ошибку при проверке оперативной памяти и память установлена правильно, то либо оперативная память дефектна, либо дефектна материнская плата. Тогда если эта оперативная память правильно установлена в другой (контрольный) компьютер и он при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то оперативная память исправна".

Тест

Задания

I. Запишите высказывания в виде логических формул

1. Число 376 четное и трехзначное.
2. Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.
3. Новый год мы встретим на даче либо на Красной площади.
4. Неверно, что Солнце движется вокруг Земли.
5. Если 14 октября будет солнечным, то зима будет теплой.

Задания

6. Земля имеет форму шара, который из космоса кажется голубым.
7. На уроке математики старшеклассники отвечали на вопросы учителя, а также писали самостоятельную работу.
8. Если сумма цифр натурального числа делится на 3, то число делится на 3.
9. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3.

Задания

II. Заполните таблицу

В естественном языке	В логике
и	
или	
неверно, что	
хотя	
в том и только в том случае	
но	
а	

Задания

III. Являются ли отрицаниями следующие пары фраз?

1. Он — мой друг. Он — мой враг.
2. Большой дом. Небольшой дом.
3. Большой дом. Маленький дом.
4. $X > 2$. $X < 2$.

Задания

- IV. Заполните пропуски в сводной таблице истинности

P	Q	P Q	P Q	P~Q	P	PVQ	P→Q
л	л	л	л	и	и		и
л	и	л	и		и	и	
и	л	л	и		л	и	л
и	и	и	л	и	л		и

Ответы

I. Запишите высказывания в виде логических операций

1. $A \& B$
2. $A \vee B$
3. $A \oplus B$
4. $\bar{A}$
5. $A \rightarrow B$
6. $A \& B$
7. $A \& B$
8. $A \rightarrow B$
9. $A \sim B$

Ответы

II. Заполните таблицу

В естественном языке	В логике
и	&, конъюнкция
или	V, дизъюнкция
неверно, что	⌉ ,¬, отрицание
хотя	&, конъюнкция
в том и только в том случае	~, эквивалентность
но	&, конъюнкция
а	&, конъюнкция

Ответы

III. Являются ли отрицаниями следующие пары фраз?

1. Нет
2. Да
3. Нет
4. Нет

Ответы

- IV. Заполните пропуски в сводной таблице истинности

P	**Q**	P&Q	$P \oplus Q$	$P \sim Q$	$\overline{P}$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
л	**л**	л	л	и	и	л	и
л	**и**	л	и	л	и	и	и
и	**л**	л	и	л	л	и	л
и	**и**	и	л	и	л	и	и

Критерии оценивания

Количество правильных ответов	оценка
24-28	5
19-23	4
14-18	3
0-13	2

Определение истинности сложного высказывания

Даны простые высказывания:

A = {Принтер – устройство ввода информации}, л

B = {Процессор – устройство обработки информации}, и

C = {Монитор – устройство хранения информации}, л

D = {Клавиатура – устройство ввода информации}. и

Определить истинность сложного высказывания

$(A \,\&\, B) \rightarrow (C \vee D)$;

$(A \,\&\, B)$ = л

$(C \vee D)$ = и

$(A \,\&\, B) \rightarrow (C \vee D)$ = л → и = и

Определение истинности сложного высказывания

Даны простые высказывания:

A = {Принтер – устройство ввода информации}, л

B = {Процессор – устройство обработки информации}, и

C = {Монитор – устройство хранения информации}, л

D = {Клавиатура – устройство ввода информации}. и

Определите истинность составных высказываний:

$(A \,\&\, B) \,\&\, (\overline{C} \vee D)$;

$(\overline{A \,\&\, B}) \rightarrow (C \vee D)$;

$(D \vee B) \sim (C \,\&\, D)$;

$(B \rightarrow (\overline{C \,\&\, A})) \vee (D \sim B)$

Определение истинности сложного высказывания

Приоритет логических операций

1) инверсия
2) конъюнкция
3) дизъюнкция
4) импликация и эквивалентность

Таблица истинности

Истинностное значение составного высказывания может быть найдено на основании определение логических операций с помощью таблиц истинности.

Таблицу, показывающую, какие значения принимает составное высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений входящих в него простых высказываний, называют таблицей истинности составного высказывания.

Для формулы, которая содержит две переменные, таких наборов значений переменных всего четыре

А	В	
л	л	
л	и	
и	л	
и	и	

Таблица истинности

A	B	C	
л	л	л	
л	л	и	
л	и	л	
л	и	и	
и	л	л	
и	л	и	
и	и	л	
и	и	и	

Если формула содержит три переменные, то возможных наборов значений переменных восемь.

В общем случае число строк в таблице равно

$$m = 2^n$$

где n - количество простых высказываний, входящих в данную формулу.

Таблица истинности

Алгоритм построения таблицы истинности:

1. Подсчитать количество переменных **n** в логическом выражении.
2. Определить число строк в таблице, которое равно $\mathbf{m = 2^n}$.
3. Заполнить столбцы входных переменных наборами значений.
4. Определить порядок выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов.
5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с последовательностью, определенной в п.4.

Таблица истинности

Составить таблицу истинности для формулы: $\overline{(A \wedge B)} \vee C$

A	B	C	$\overline{(A \wedge B)} \vee C$		
л	л	л			
л	л	и			
л	и	л			
л	и	и			
и	л	л			
и	л	и			
и	и	л			
и	и	и			

1. Подсчитать количество переменных n в логическом выражении. (n=3)
2. Определить число строк в таблице, которое равно $m = 2^n$ ($m=2^3=8$).
3. Заполнить столбцы входных переменных наборами значений.

Таблица истинности

A	B	C	$\overline{(A \wedge B)} \vee C$		
л	л	л			
л	л	и			
л	и	л			
л	и	и			
и	л	л			
и	л	и			
и	и	л			
и	и	и			

4. Определить порядок выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов.

Таблица истинности

A	B	C	$\overline{(A \;{}^{1}\!\wedge\; {}^{2}B)} \vee C$		
л	л	л	Л 3		
л	л	и	Л		
л	и	л	Л		
л	и	и	Л		
и	л	л	Л		
и	л	и	Л		
и	и	л	И		
и	и	и	И		

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с последовательностью, определенной в п.4.

1

Таблица истинности

A	B	C	$\overline{(A \wedge B)} \vee C$		
л	л	л	Л	И	
л	л	и	Л	И	
л	и	л	Л	И	
л	и	и	Л	И	
и	л	л	Л	И	
и	л	и	Л	И	
и	и	л	И	Л	
и	и	и	И	Л	

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с последовательностью, определенной в п.4.

1

2

Таблица истинности

A	B	C	$\overline{(A \wedge B)} \vee C$		
			1	2	3
л	л	л	Л	И	И
л	л	и	Л	И	И
л	и	л	Л	И	И
л	и	и	Л	И	И
и	л	л	Л	И	И
и	л	и	Л	И	И
и	и	л	И	Л	Л
и	и	и	И	Л	И

1 2
3

5. Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с последовательностью, определенной в п.4.

Если мне не купят видеокамеру, то я начну изучать Photoshop или CorelDraw

A. Купят видеокамеру
B. Я начну изучать Photoshop
C. Я начну изучать CorelDraw

$$\overline{A} \Rightarrow (B \vee C)$$

A	B	C	¬A	B v C	¬ A ⇒ (B v C)
л	л	л	и	л	л
л	л	и	и	и	и
л	и	л	и	и	и
л	и	и	и	и	и
и	л	л	л	л	и
и	л	и	л	и	и
и	и	л	л	и	и
и	и	и	л	и	и

Таблица истинности

Составить таблицу истинности для формул:

$(A \,\&\, B) \,\&\, (\overline{C} \vee A)$;

$(\overline{A \,\&\, B}) \to (C \vee B)$;

$(D \vee B) \sim (C \,\&\, D)$;

$(B \to (\overline{C \,\&\, A})) \vee (C \sim B)$

Равносильные формулы

Составим таблицы истинности для формул: $(A \to B)$ и $(\overline{B} \to \overline{A})$

A	B	A→B
л	л	и
л	и	и
и	л	л
и	и	и

A	B	$\overline{B}$	→	$\overline{A}$
л	л	и	и	и
л	и	л	и	и
и	л	и	л	л
и	и	л	и	л

Истинностные значения формул при всех истинностных наборах высказывательных переменных совпадают.

Равносильные формулы

Формулы называются равносильными, если их значения истинности при любом наборе значений истинности входящих в них высказывательных переменных совпадают.

Доказать равносильность формул:

((X~Y)→(X&Z)) и (((X&¬Y) ∨ (¬X&Y)) ∨ (X&Z))

X	Y	Z	(X~Y)→(X&Z)	((X&¬Y) ∨ (¬X&Y)) ∨ (X&Z)
л	л	л	И Л Л	Л И Л И Л Л Л
л	л	и	И Л Л	Л И Л И Л Л Л
л	и	л	Л И Л	Л Л И И И И Л
л	и	и	Л И Л	Л Л И И И И Л
и	л	л	Л И Л	И И И Л Л И Л
и	л	и	Л И И	И И И Л Л И И
и	и	л	И Л Л	Л Л Л Л Л Л Л
и	и	и	И И И	Л Л Л Л Л И И

Т.к. истинностные значения формул при всех истинностных наборах высказывательных переменных совпадают, то эти формулы равносильны.

Определить, являются ли формулы равносильными:

1. $((A \& B) \oplus C) \rightarrow \overline{B}$ и $(A \sim C) \vee \overline{B}$
2. $\overline{X} \rightarrow ((X \vee Y) \& (X \& Y))$ и $(X \oplus Y) \vee \overline{Z}$
3. $(X \& Z) \rightarrow (X \vee (Y \& Z))$ и $(X \vee Y) \vee Z$

Тавтологии

Формулы логики, принимающие значение "истина" при любых значениях истинности входящих в них высказывательных переменных, называются тождественно истинными (или законами логики, или тавтологиями).

P	**Q**	P&Q	$P \oplus Q$	P~Q	$\overline{P}$	PVQ	$P \rightarrow Q$
л	**л**	л	л	и	и	л	и
л	**и**	л	и	л	и	и	и
и	**л**	л	и	л	л	и	л
и	**и**	и	л	и	л	и	и

Тавтологии

Является ли формула $\overline{(A \vee B)} \leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B})$ тавтологией?

A	B	$\overset{2}{\overline{(A \overset{1}{\underset{4}{\vee}} B)}} \overset{6}{\leftrightarrow} (\overset{3}{\overline{A}} \wedge \overset{5}{\overline{B}})$
л	л	л и и и и и
л	и	и л и и л л
и	л	и л и л л и
и	и	и л и л л л

Т. к. формула принимает значение "истина" при всех значениях истинности входящих в нее высказывательных переменных, то она является тавтологией.

Являются ли формулы тавтологиями?

$((M \oplus H) \& \neg M) \to H$

$((A \to B) \& B) \to A.$

З

а) « … стове. Если он
предприн … т в Ростове, то
не мог с … ваемый пред-
принимат … блицу истинности.

$((A \oplus B) \wedge ($ …

A	B	C	D	$((A \oplus B) \wedge (C \to B) \wedge (\overline{B} \to D) \wedge C) \to D$							
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1

A	B	C	D	$A \oplus B$	$C \to B$	… $A \oplus B) \wedge (C \to B) \wedge (\overline{B} \to D) \wedge C) \to D$
0	0	0	0			
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	0	1	1			
1	1	0	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			
1	1	1	1			

б) «Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или я пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах».

$((A \to (B \vee C)) \wedge ((C \to D) \wedge (B \to \overline{D})) \wedge D) \to (A \to C)$

A	B	C	D	$((A \to (B \vee C)) \wedge ((C \to D) \wedge (B \to \overline{D})) \wedge D) \to (A \to C)$									
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1

Домашнее задание

Записать логической формулой

в) «Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест, и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся».

г) «Преступление совершено в Кустанае. Поэтому если Петров совершил это преступление, то он во время совершения преступления находился в Кустанае. Но Петрова в это время в Кустанае не было. Значит, Петров не совершал этого преступления».

Домашнее задание

Задание № 2. Построить для логических функций таблицы истинности.

а) $((X_1 \wedge X_2) \oplus X_3) \to \overline{X_1}$;

б) $(\overline{X_1} \vee X_2) \to (X_3 \vee X_1)$;

в) $\overline{(X_1 \leftrightarrow \overline{X_2})} \leftrightarrow X_3$;

г) $((X_1 \leftrightarrow \overline{X_2}) \oplus \overline{X_3}) \to X_1$;

д) $(\overline{X_1} \to X_2) \to \overline{(X_2 \vee X_3)}$.

Задание № 3. Доказать тождества с помощью таблицы истинности:

а) $X_1 \vee (\overline{X_1} \wedge X_2) \equiv X_1 \vee X_2$;

Домашнее задание

Задание № 4

а) А, В и С дали на суде показания:

А: *В и С либо оба виновны, либо оба нет.*

В: *Если С виновен, то и А виновен.*

С: *Я не виновен, а виновен В.*

Определить кто виновен, если все говорят правду, и кто врет, если все невиновны, кто виновен, если виновные лгут, а невиновные говорят правду.

Доказать, что формулы являются тавтологиями.

а) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$;

б) $P \to (Q \to (P \wedge Q))$;

в) $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to P))$;

г) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$;

д) $(\neg Q \wedge (P \to Q)) \to \neg P$;

е) $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \to Q$;

ж) $(P \to Q) \to ((P \vee R) \to (Q \vee R))$;

з) $(P \to Q) \to ((P \wedge R) \to (Q \wedge R))$;

и) $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$;

к) $(P \to Q) \vee (Q \to P)$;

л) $(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$;

м) $((P \to Q) \wedge (R \to Q)) \leftrightarrow ((P \vee R) \to Q)$;

н) $((P \to Q) \wedge (P \to R)) \leftrightarrow (P \to (Q \wedge R))$;

о) $P \leftrightarrow P$;

п) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$;

р) $((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \to (P \leftrightarrow R)$.

Законы и теоремы математической логики

1. Ассоциативность & и ∨ (сочетательный закон):

а) $x_1\&(x_2\&x_3)=(x_1\&x_2)\&x_3=x_1\&x_2\&x_3$,

б) $x_1V(x_2Vx_3)=(x_1Vx_2)\ Vx_3=x_1Vx_2Vx_3$.

2. Коммутативность & и ∨ (переместительный закон):

а) $x_1\&x_2=x_2\&x_1$, б) $x_1Vx_2=x_2Vx_1$.

3. Дистрибутивность (распределительный закон):

а) $x_1\&(x_2Vx_3)=x_1\&x_2V\ x_1\&x_3$,

б) $x_1V(x_2\&x_3)=(x_1Vx_2)\&(x_1Vx_3)$.

4. Идемпотентность (отсутствие степеней):

а) $x\&x=x$, б) $xVx=x$.

Законы и теоремы булевой алгебры

5. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$.

6. Свойства констант 0 и 1:

а) $x\&1=x$, б) $x\&0=0$, в) $x \vee 1=1$,

г) $x \vee 0=x$, д) $\overline{0}=1$, е) $\overline{1}=0$.

7. Теорема двойственности (правила де Моргана):

а) $\overline{x \,\&\, y} = \overline{x} \vee \overline{y}$, б) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \,\&\, \overline{y}$.

8. Закон противоречия: $x \,\&\, \overline{x} =0$.

9. Закон исключённого третьего: $x \vee \overline{x} =1$.

P	**Q**	P&Q	P⊕Q	P~Q	$\bar{P}$	PVQ	P→Q
л	**л**	л	л	и	и	л	и
л	**и**	л	и	л	и	и	и
и	**л**	л	и	л	л	и	л
и	**и**	и	л	и	л	и	и

Решение логических задач

Способы решения ЛЗ

- С помощью таблиц истинности;
- Средствами алгебры логики;
- С помощью рассуждений.

Табличный метод

ПРИМЕР 3. Трое подозреваемых в преступлении Иванов, Петров и Сидоров дали следующие показания:

Иванов сказал: *«Если виновен Сидоров, то и Петров тоже виновен»*.

Петров сказал: *«Виновен либо Иванов, либо Сидоров, но не оба»*.

Сидоров сказал: *«Я не виновен, а виновен Петров»*.

Построить таблицу истинности каждого высказывания и по ней определить:

а) Кто виновен, если все говорят правду?

б) Кто виновен, если все лгут?

в) Кто лжет, если все виновны?

г) Кто лжет, если все невиновны?

д) Кто виновен, если виновные лгут, а невиновные говорят правду?

Введем простые высказывания:

A={виновен Ива

B={виновен Пет

C={виновен Си

а) Кто виновен, если все говорят правду?

б) Кто виновен, если все лгут?

в) Кто лжет, если все виновны?

г) Кто лжет, если все невиновны?

д) Кто виновен, если виновные лгут, а невиновные говорят

Тогда показания Иванова будут иметь вид: $C \to B$, показания Петрова: $A \oplus C$, показания Сидорова: $\overline{C} \wedge B$. Составляем таблицу истинности каждого высказывания:

A	B	C	$\overline{C}$	*Показания Иванова:* $C \to B$	*Показания Петрова:* $A \oplus C$	*Показания Сидорова:* $\overline{C} \wedge B$
0	0	0	1			
0	0	1	0			
0	1	0	1			
0	1	1	0			
1	0	0	1			
1	0	1	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			

Табличный метод

Задача 2. Дочерей Василия Лоханкина зовут Даша, Анфиса и Лариса. У них разные профессии и они живут в разных городах: одна в Ростове, вторая – в Париже и третья – в Москве. Известно, что

- Даша живет не в Париже, а Лариса – не в Ростове,
- парижанка – не актриса,
- в Ростове живет певица,
- Лариса – не балерина.

Париж	Ростов	Москва		Певица	Балерина	Актриса
0	1	0	Даша	1	0	0
1	0	0	Анфиса	0	1	0
0	0	1	Лариса	0	0	1

В каждой строке и в каждом столбце может быть только одна единица!

Задача Эйнштейна

Условие: Есть 5 домов разного цвета, стоящие в ряд. В каждом доме живет по одному человеку отличной от другого национальности. Каждый жилец пьет только один определенный напиток, курит определенную марку сигарет и держит животное. Никто из пяти человек не пьет одинаковые напитки, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковых животных.

Известно, что:

1. Англичанин живет в красном доме.
2. Швед держит собаку.
3. Датчанин пьет чай.
4. Зеленой дом стоит слева от белого.
5. Жилец зеленого дома пьет кофе.
6. Человек, который курит *Pallmall*, держит птицу.
7. Жилец среднего дома пьет молоко.
8. Жилец из желтого дома курит *Dunhill*.
9. Норвежец живет в первом доме.
10. Курильщик *Marlboro* живет около того, кто держит кошку.
11. Человек, который содержит лошадь, живет около того, кто курит *Dunhill*.
12. Курильщик *Winfield* пьет пиво.
13. Норвежец живет около голубого дома.
14. Немец курит *Rothmans*.
15. Курильщик *Marlboro* живет по соседству с человеком, который пьет воду.

Вопрос: У кого живет рыба?

Метод рассуждений

Задача 1. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты договора, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: "Чей именно проект был принят?", министры дали такие ответы:

Россия — "Проект не наш (1), проект не США (2)";
США — "Проект не России (1), проект Китая (2)";
Китай — "Проект не наш (1), проект России (2)".

Один из них оба раза говорил правду; второй – оба раза говорил неправду, третий один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Кто что сказал?

проект США (?)

	(1)	(2)
Россия	+	–
США	+	–
Китай		

проект Китая (?)

	(1)	(2)
Россия	+	+
США	+	+
Китай		

проект России (?)

	(1)	(2)
Россия	–	+
США	–	–
Китай	+	+

Использование алгебры логики

Задача 1. По телевизору синоптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее:

1.Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.

2.Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.

3.Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.

Так какая же погода будет завтра?

Решение: а) Выделим простые высказывания и запишем их через переменные: A – «Ветра нет», B – «Пасмурно», С – «Дождь»

б) Запишем сложные высказывания через введенные переменные:

1. Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя:

$$A \rightarrow (B \,\&\, \overline{C})$$

2. Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра:

$$C \rightarrow (B \,\&\, A)$$

3. Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра

$$B \rightarrow (C \,\&\, A)$$

5. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$.

6. Свойства констант 0 и 1:

а) $x\&1=x$, б) $x\&0=0$, в) $x \vee 1=1$,

г) $x \vee 0=x$, д) $\overline{0}=1$, е) $\overline{1}=0$.

7. Теорема двойственности (правила де Моргана):

а) $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$, б) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$.

8. Закон противоречия: $\overline{x} \& x = 0$.

9. Закон исключённого третьего: $\overline{x} \vee x = 1$.

в) Запишем произведение указанных функций:

$A \to B \& \overline{C}$

$C \to B \& A$

$B \to C \& A$

$$F=(A\to(B \& \overline{C})) \& (C\to(B \& A)) \& (B\to(C \& A))$$

г) Упростим формулу (используются законы де Моргана, переместительный закон, закон противоречия):

д) Приравняем результат единице, т.е. наше выражение должно быть истинным:

$$F = \overline{A} \& \overline{B} \& \overline{C} = 1$$

е) Проанализируем результат:

Логическое произведение равно 1, если каждый множитель равен 1.

Поэтому:

$\overline{A} = 1$; $\overline{B} = 1$; $\overline{C} = 1$; Значит: A = 0; B = 0; C = 0;

Ответ: погода будет ясная, без дождя, но ветреная.

Использование алгебры логики

Задача 3. Следующие два высказывания истинны:

1. Неверно, что если корабль **А** вышел в море, то корабль **С** – нет.
2. В море вышел корабль **В** или корабль **С**, но не оба вместе.

Определить, какие корабли вышли в море.

$$A \to \overline{C} = 1$$

Решение:

… если корабль **А** вышел в море, то корабль **С** – нет.

$$\boxed{\overline{A \to \overline{C}} = 1}$$

1. Неверно, что если корабль **А** вышел в море, то корабль **С** – нет.

$$A \to \overline{C} = 0$$

$$\boxed{B \oplus C = 1}$$

2. В море вышел корабль **В** или корабль **С**, но не оба вместе.

$$\left(\overline{A \to \overline{C}}\right) \cdot (B \oplus C) = 1$$

$$\left(\overline{\overline{A} + \overline{C}}\right) \cdot (B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C) = 1$$

$$A \cdot C \cdot (B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C) = 1$$

$$\boxed{A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1}$$

$$A \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

Использование алгебры логики

Пример:

Алеша, Боря и Гриша откопали древний сосуд. О том, где и когда он был изготовлен, каждый из школьников высказал по два предположения:

Алеша: «Это сосуд греческий и сосуд изготовлен в V веке»;

Боря: «Это сосуд финикийский и сосуд изготовлен в III веке»;

Гриша: «Это не греческий сосуд и изготовлен он в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них **прав только в одном их двух** своих предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

веке»;

Боря: «Это сосуд финикийский и сосуд изготовлен в III веке»;

Гриша: «Это не греческий сосуд и изготовлен он в IV веке».

Решение:

Введем обозначения простых высказываний:

«Это сосуд греческий» – *G*;

«Это сосуд финикийский» – *F*;

«Сосуд изготовлен в V веке» – *5*;

«Сосуд изготовлен в III веке» – 3;

«Сосуд изготовлен в IV веке» – 4.

веке»;

Боря: «Это сосуд финикийский и сосуд изготовлен в III веке»;

Гриша: «Это не греческий сосуд и изготовлен он в IV веке».

Т.к. учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном их двух своих предположений, то высказывание Алеши можно представить формул $G\bar{5}+\bar{G}5=1$

высказывание Бори можно представить формуло $F\bar{3}+\bar{F}3=1$

высказывание Гриши можно представить формул $\bar{G}\bar{4}+G4=1$

Полученные формулы можно рассматривать как логические уравнения и реша му:

$$\begin{cases} G\bar{5}+\bar{G}5=1 \\ F\bar{3}+\bar{F}3=1 \\ \bar{G}\bar{4}+G4=1 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{G}5F\bar{3}\bar{G}\bar{4}=1$$

«Сосуд изготовлен в Финикии и сосуд изготовлен в 5 веке»

Задача «Уроки логики». На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получен ответ: «Если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй». Кто из учащихся изучал логику?

Решение. Введём обозначения:

P_1 – первый учащийся изучал логику;

P_2 – второй учащийся изучал логику;

P_3 – третий учащийся изучал логику.

$$(P_1 \to P_2) \cdot \overline{P_3 \to P_2} = 1$$

$$(P_1 \to P_2) \cdot \overline{P_3 \to P_2} = (\overline{P_1} + P_2) \cdot \overline{\overline{P_3} + P_2} = (\overline{P_1} + P_2) \cdot P_3 \cdot \overline{P_2} = \overline{P_1} \cdot P_3 \cdot \overline{P_2} + P_2 \cdot P_3 \cdot \overline{P_2}$$

Ответ. Логику изучал третий учащийся, а первый и второй не изучали.

Использование алгебры логики

Задача 4. Когда сломался компьютер, его хозяин сказал «Память не могла выйти из строя». Его сын предположил, что сгорел процессор, а винчестер исправен. Мастер по ремонту сказал, что с процессором все в порядке, а память неисправна. В результате оказалось, что двое из них сказали все верно, а третий – все неверно. Что же сломалось?

Решение:

A – неисправен процессор, **B –** память, **C –** винчестер

хозяин: $B = 0, \ \overline{B} = 1$ сын: $A \cdot \overline{C} = 1$ мастер: $\overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся хозяин: $X_1 = \overline{\overline{B}} \cdot A \cdot \overline{C} \cdot \overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся сын: $X_2 = \overline{B} \cdot \overline{A \cdot \overline{C}} \cdot \overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся мастер: $X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} = 1$

$X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} \cdot (A + \overline{B}) = 1$

$X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} = 1$

$A = 1$

$B = 0$

$C = 0$

В общем случае: $X_1 + X_2 + X_3 = 1$

! **Несколько решений!**

Домашняя работа

4. Пять школьников из пяти различных городов Брянской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» каждый дал ответ:
   - Иванов: «Я приехал из Клянцов, а Дмитриев из Новозыбкова».
   - Сидоров: «Я приехал из Клянцов, а Петров из Трубчевска».
   - Петров: «Я приехал из Клянцов ,а Дмитриев из Дятькова».
   - Дмитриев: « Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов из Жуковки».
   - Ефимов: « «Я приехал из Жуковки, а Иванов из живет в Дятькове».

   Откуда приехал каждый из школьников, если одно его утверждение верно, а другое ложно?

5. На соревнованиях по легкой атлетике Андрей, Борис, Сергей и Володя заняли первые четыре места. Но когда девочки стали вспоминать, как эти места распределились между победителями, то мнения разошлись.
   - Даша сказала: "Андрей был первым, а Володя - вторым".
   - Галя утверждала: "Андрей был вторым, а Борис - третьим".
   - Лена считала: "Борис был четвертым, а Сергей - вторым".

   Ася, которая была судьей на этих соревнованиях и хорошо помнила, как распределились места, сказала, что каждая из девочек сделала одно правильное и одно неправильное заявление.
   Кто из мальчиков какое место занял?

Домашняя работа

17. Диагностическая.

Имеются два симптома S1 и S2 двух болезней X1 и X2. Известно:

1) При X2 есть S1.
2) При X1 и отсутствии X2 есть S2.
3) При X2 и отсутствии X1 нет S2.
4) При S1 или S2 есть, по крайней мере, X1 или X2.

Составьте логическое уравнение, позволяющее по «значениям» признаков («есть», «нет») определить «значения» болезней.

18. Экономическая.

Менеджер банка должен установить 4 банкомата. В течение каждого дня работы должны выполняться следующие условия:

1) Если работает первый банкомат, то третий банкомат не должен работать, а второй и четвертый должны.
2) Если работает третий банкомат, то первый и четвертый не должны работать, а второй должен.
3) Должен работать по крайней мере один банкомат.

Необходимо определить наибольшее число дней, которое могут работать банкоматы при выполнении этих условий, так, чтобы их назначение ни в один из дней не повторялось, а также указать допустимое расписание на каждый день.

Логика высказываний

Схемы логически правильных рассуждений

Умозаключения

Рассуждением (умозаключением) называют процесс получения новых знаний, выраженных суждениями (высказываниями), из других знаний, также выраженных суждениями (высказываниями).

Исходные высказывания называются посылками (гипотезами, условиями), а получаемые высказывания – заключением (следствием).

Правило заключения

Правило заключения – утверждающий модус (Modus Ponens)

$$\frac{A \to B,\ A}{B} \qquad ((A \to B) \& A) \to B$$

Если из высказывания A следует высказывание B и справедливо (истинно) высказывание A, то справедливо B.

Пример. «Если каждый день пить кофе, то в голову придет хорошая идея. Этот человек каждый день пьет кофе. Следовательно, ему рано или поздно в голову придет хорошая идея».

Правило отрицания

Правило отрицания – отрицательный модус (Modus Tollens)

$$\frac{A \to B,\ \neg B}{\neg A}$$

$$((A \to B) \& \neg B) \to \neg A$$

Если из A следует B, но высказывание B неверно, то неверно A.

Пример. "Если этот газ неон, то он инертный. Этот газ не инертный. Следовательно, это не есть неон"

A	B	((A→B)&¬B)→¬A
л	л	И И И И И
л	и	И Л Л И И
и	л	Л Л И И Л
и	и	И Л Л И Л

Правила утверждения-отрицания

Правила утверждения-отрицания (Modus Ponendo-Tollens)

$$\frac{A \oplus B, A}{\neg B}; \qquad \frac{A \oplus B, B}{\neg A}$$

$((A \oplus B) \& A) \to \neg B$

$((A \oplus B) \& B) \to \neg A$

Если справедливо или высказывание A, или B (в разделительном смысле) и истинно одно из них, то другое ложно.

Пример. "Или я дома, или я вне дома. Я дома. Следовательно, не верно, что я вне дома".

Правила отрицания-утверждения

Правила отрицания-утверждения (Modus Tollendo-Ponens)

$$\frac{A \vee B, \neg A}{B}; \quad \frac{A \vee B, \neg B}{A}$$

$((A \vee B) \& \neg A) \rightarrow B$

$((A \vee B) \& \neg B) \rightarrow A$

Если истинно или A, или B (в неразделительном смысле) и неверно одно из них, то истинно другое.

Пример. «Сегодня дождливая или ветреная погода. Сегодня нет дождя. Следовательно, сегодня ветрено".

Правила отрицания-утверждения

Правила отрицания-утверждения (Modus Tollendo-Ponens)

$$\frac{A \oplus B, \neg A}{B}; \qquad \frac{A \oplus B, \neg B}{A}$$

$((A \oplus B) \& \neg A) \to B \qquad ((A \oplus B) \& \neg B) \to A$

Если истинно или A, или B (в разделительном смысле) и неверно одно из них, то истинно другое.

Пример. «На выходных поеду домой или останусь в общежитии. Не поехал домой. Следовательно, остался в общежитии.»

Правило транзитивности

Правило транзитивности (упрощенное правило силлогизма)

$$\frac{A\rightarrow B,\ B\rightarrow C}{A\rightarrow C}$$

$$((A\rightarrow B)\ \&\ (B\rightarrow C)) \rightarrow (A\rightarrow C)$$

Если из A следует B, а из B следует C, то из A следует C.

Пример. «Если данное число три, то оно больше двух. Если данное число больше двух, то оно больше одного. Следовательно, если данное число три, то оно больше одного».

Правило контрапозиции

Правило контрапозиции

$$\frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}.$$

$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Если из A следует B, то из того, что неверно B, следует, что неверно A.

Пример. «Если хорошо сдам сессию, то поеду на каникулах в Лондон. Не поеду на каникулах в Лондон, следовательно, плохо сдам сессию.»

Закон противоречия

Закон противоречия

$$\frac{A \rightarrow B,\ A \rightarrow \neg B}{\neg A}$$

Если из A следует B и $\neg$B, то неверно A.

Примеры неправильных рассуждений

а) $\dfrac{A \to B,\ B}{A}$

б) $\dfrac{A \to B,\ \neg A}{\neg B}$

в) $\dfrac{A \vee B,\ A}{\neg B}$

Пример 1. К каким схемам относятся следующие рассуждения:

1. "Если рабочий отсутствовал на работе, он не выполнил задания. Он не выполнил задания. Следовательно, он отсутствовал на работе".

2. "Этот человек студент или предприниматель. Он студент. Следовательно, не предприниматель".

3. "Этот человек постоянно живет в Москве или Санкт-Петербурге. Он живет в Москве. Следовательно, он не живет в Санкт-Петербурге."

4. "Сегодня понедельник или вторник. Сегодня вторник. Следовательно сегодня не понедельник".

1) Схема данного рассуждения

$$\frac{A \to B,\ \ B}{A}$$

относится к схеме (а) неправильных рассуждений, следовательно, это рассуждение неверно.

2) Учитывая то, что в первом предложении союз "и" использован в неразделительном смысле, схема данного рассуждения имеет вид:

$$\frac{A \vee B,\ \ A}{\neg B}.$$

Схема соответствует схеме (в) неправильных рассуждений, поэтому данное рассуждение также является неправильным.

3) Рассуждение правильное, так как его схема представляет правило правильных рассуждений

$$\frac{A \oplus B,\ \neg A}{B}.$$

4) Союз “или” здесь использован в разделительном смысле, поэтому рассуждение правильное, так как относится к схемам правильных рассуждений

$$\frac{A \oplus B,\ B}{\neg A}.$$

Пример 2. К каким схемам относятся рассуждения:

а) “Если рабочий отсутствовал на работе, он не выполнил задания. Он отсутствовал на работе. Следовательно, он не выполнил задания.”

б) “Петров женат на Марье Ивановне или Лукерии Ильиничне. Он женат на Марье Ивановне. Следовательно, он не женат на Лукерии Ильиничне.”

в) “Идет дождь или снег. Идет дождь. Следовательно, не идет снег.”

г) “Если при выполнении программы отклонение контролируемых параметров превышает предусмотренные нормы (стандарты), то требуется оперативная корректировка программы или уточнение стандартов. Выявленное отклонение превышает стандарты. Следовательно, требуется корректировка программы или уточнение стандартов.”

Пример 2. Записать логической формулой следующее умозаключение:

“Если фирма приглашает на работу крупного специалиста в области новейшей технологии, то она считает ее привлекательной и разворачивает работы по изменению технологии производства своего традиционного продукта или начинает разработку нового продукта. Конкурирующая фирма пригласила на работу крупного специалиста в области новейшей технологии.

Следовательно, она считает ее привлекательной и разворачивает работы по изменению технологии выпускаемого продукта или разработке продукта.

а) Если все говорят правду, то в показаниях (последние три столбца) должны быть три единицы. Такому условию соответствует предпоследняя строка, из которой по значениям в первых трех столбцах (1,1,0) делаем вывод, что Иванов и Петров виновны, а Сидоров нет.

б) Если все лгут, то в показаниях должны быть три нуля. Такому условию соответствует шестая строка, из которой по значениям в первых трех столбцах делаем вывод, что Иванов и Сидоров виновны, а Петров нет.

в) Условию того, что все виновны, соответствует последняя строка, у которой в первых трех столбцах все единицы. По значениям показаний (последние три столбца) видно, что Иванов говорит правду, а Петров и Сидоров лгут.

г) Условию того, что все невиновны, соответствует первая строка, у которой в первых трех столбцах все нули. По значениям показаний видно, что Иванов говорит правду, а Петров и Сидоров лгут.

д) Если виновные лгут, а невиновные говорят правду, то в каждой паре значений столбцов виновности (первые три) и показаний (последние три) для каждого подозреваемого должны стоять разные значения. Этому условию соответствует третья строка у которой значения первых трех столбцов (0,1,0), а последних трех (1,0,1). Это означает, что Иванов невиновен и говорит правду, Петров виновен и лжет, а Сидоров невиновен и говорит правду.

Решение задач

1. Упростить логическое выражение:

$$F = \overline{(A \vee B) \to \overline{(B \vee C)}}$$

2. Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически правильными, т.е. проверить, является ли заключение логическим следствием из посылок.

а) Если 6 – составное число, то 12 – составное число; если 12 – составное число, то существует простое число, большее 12; если существует простое число, большее 12, то существует составное число, большее12; если 6 делится на 2, то 6 – составное число; число 12 – составное. Следовательно, 6 – составное число.

Решение задач

б) Если Сергей выиграет теннисный турнир (А), то он будет доволен (В), а если он будет доволен, то он плохой борец в последующих турнирах (С). Но если он проиграет этот турнир, то он потеряет поддержку своих болельщиков (Д). Он плохой борец в последующих турнирах, если потеряет поддержку своих болельщиков. Если он плохой борец в последующих турнирах, то ему следует прекратить занятия теннисом (Е). Сергей или выиграет этот турнир, или проиграет его. Следовательно, ему нужно прекратить занятия теннисом.