МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А.І. Колосов, А.В. Якунін, С.М. Ламтюгова

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРЕЗЕНТАЦІЯХ

ЧАСТИНА II:

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

Харків ХНАМГ 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А.І. Колосов, А.В. Якунін, С.М. Ламтюгова

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРЕЗЕНТАЦІЯХ

ЧАСТИНА II:
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

Електронний альбом дидактичних матеріалів
(для студентів 1- 2 курсів денної і заочної форм навчання
за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”,
спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”)

Харків
ХНАМГ
2010

УДК 514.123

Аналітична геометрія у презентаціях. Частина II: Аналітична геометрія у просторі: Електронний альбом дидактичних матеріалів до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” (для студентів 1-2 курсів денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”, спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: А.І. Колосов, А.В. Якунін, С.М. Ламтюгова. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 79 с.

Рецензент: професор кафедри вищої математики Харківської національної академії міського господарства, заслужений діяч науки і техніки України, д.ф.-м.н., проф. М.Й. Кадець

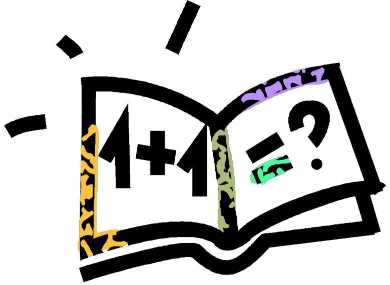
Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 10 від 26.05.2010 р.

Зміст

Передмова

У цьому альбомі стисло викладено навчальні елементи розділів теми “Аналітична геометрія у просторі”, що відповідають діючим програмам курсу вищої математики для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв’язків без надмірної строгості викладу з об’єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання.

Зібрані в альбомі дидактичні матеріали призначені для студентів електротехнічних спеціальностей.



Інструкція по застосуванню

Альбом дидактичних матеріалів «Аналітична геометрія у презентаціях. Частина II: Аналітична геометрія у просторі» створено в програмі Power Point у вигляді слайд-шоу.

Презентація подана в режимі «Тільки для читання», тому редагування слайдів не можливе.

Гіперпосилання в змісті та спеціальні кнопки на початку кожного розділу задають перехід на потрібну сторінку (розділ чи пункт). У кінці кожного пункту є кнопка «на початок розділу», де в свою чергу є кнопка «зміст». Далі зі змісту можна перейти в будь-який розділ чи пункт, який цікавить. У презентації є приховані слайди, що уточнюють окремі поняття, на які можна перейти по гіперпосиланням, що розміщені по тексту.

Кнопка містить посилання на інформацію, що розрахована на самостійне опрацювання.

Можна вийти з презентації в будь-який момент. Для цього потрібно натиснути на клавіатурі клавішу Esc або клікнути правою кнопкою миші, після чого з’явиться керуюче меню, де останнім пунктом буде режим "Закінчити показ". Із цього ж меню можна перейти на будь-який вибраний слайд (не обов’язково в тому порядку, що пропонує презентація).

У друкованому варіанті – неповна демонстраційна збірка пропонованих матеріалів. Повна версія посібника з анімацією, рисунками та опрацьованими самостійними завданнями – тільки в електронному вигляді.

Критичні зауваження, побажання та пропозиції для покращення приймаються за електронною адресою: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

1. Декартова прямокутна система координат у просторі

зміст

Три взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox, Oy і Oz зі спільним ***початком*** O утворюють ***декартову прямокутну систему координат у просторі*** (рис. 1).

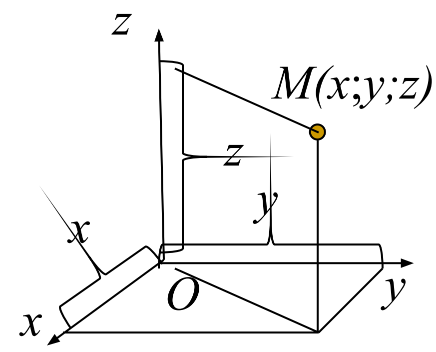


Рис. 1

Ox – ***вісь абсцис***, Oy – ***вісь ординат***, Oz – ***вісь амплікат***

Положення довільної точки M однозначно визначається її ***координатами*** $M(x; y; z)$.

Відстань між довільними ***двома точками*** $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координати точки M(x;y;z), яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні, обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад

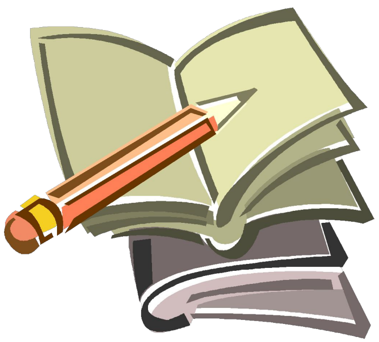
Трикутник ABC задано координатами вершин $A(2;–1;4)$, $B(3;2;–6)$, $C(–5;0;2)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти довжину медіани AM (рис. 2).

Нехай M – середина сторони BC:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3-5}{2} = -1;$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+0}{2} = 1;$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{-6+2}{2} = -2;$$



$$M(-1;1;-2).$$

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

$$AM = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-(-1))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

На початок розділу

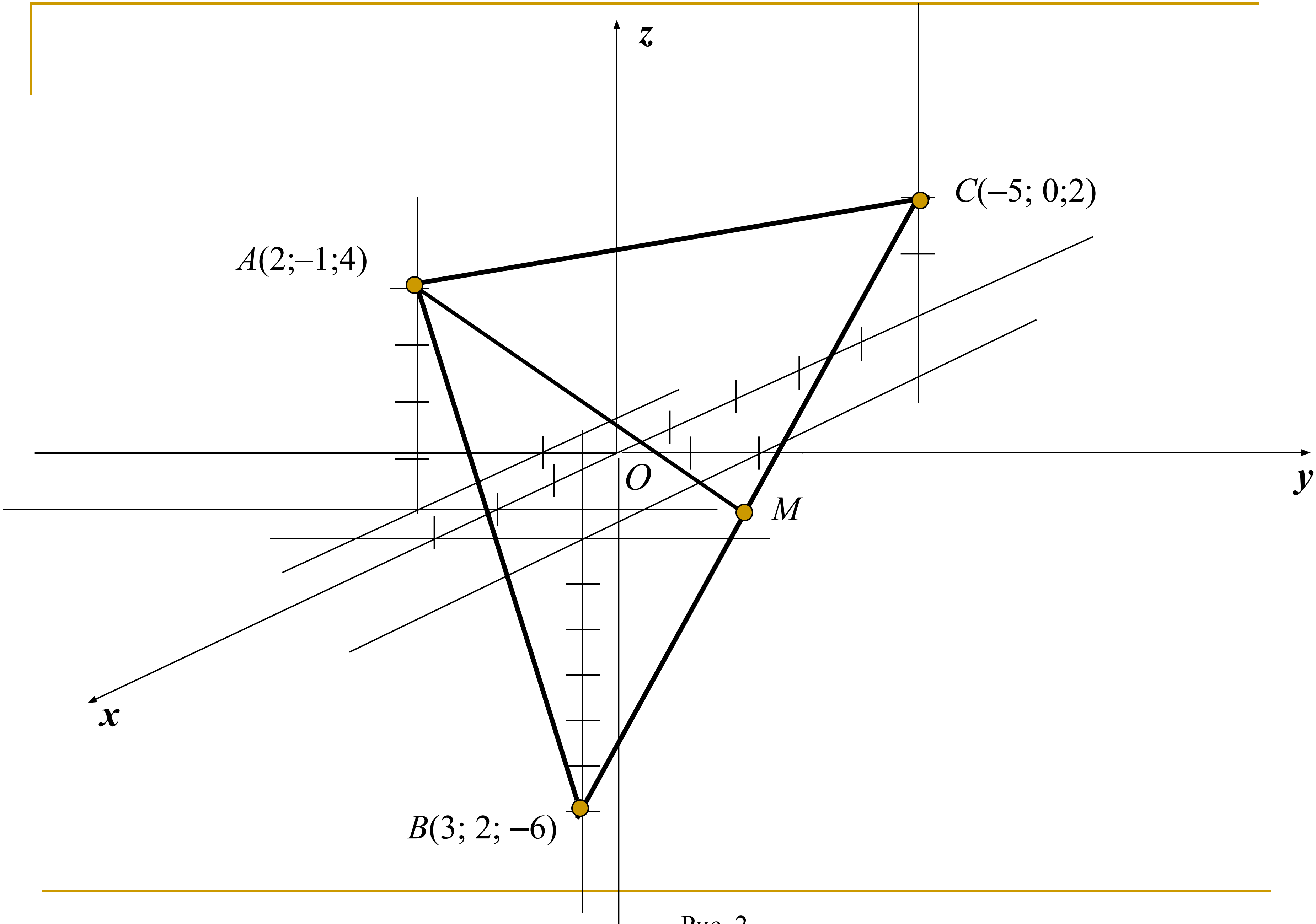
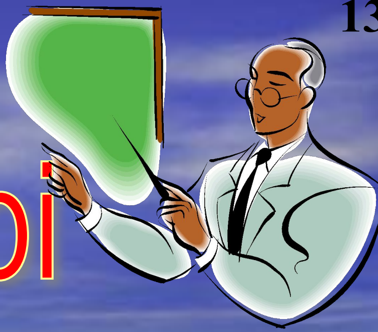


Рис. 2



2. Площина у просторі

2.1. Основні типи рівняння площини

2.1.1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

2.1.2. Загальне рівняння площини

2.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

2.1.4. Рівняння площини у відрізках на осях

2.2. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

2.3. Умова перетину трьох площин в одній точці

2.1. Основні типи рівняння площини

2.1.1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n}=(A;B;C)\neq\vec{0}$ (рис. 3).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0\,;y-y_0\,;z-z_0)$.

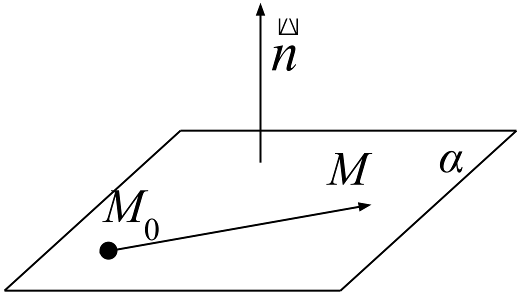


Рис. 3

Точка M належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$.

Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, або в координатній формі

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – ***рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора*** .

На початок розділу

2.1.2. Загальне рівняння площини

Розкриємо дужки в рівнянні $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ і отримаємо $Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Тоді одержимо

$$Ax+By+Cz+D=0$$

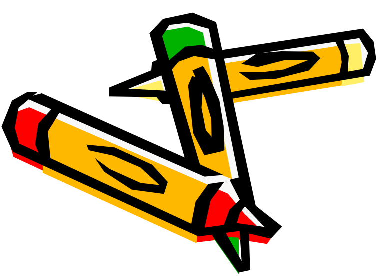
– ***загальне рівняння площини***, що є лінійним відносно координат x, y, z, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто

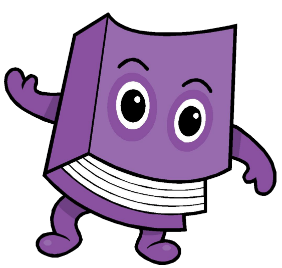
$$A^2+B^2+C^2\neq 0.$$

Зауваження. Загальне рівняння площини визначається з точністю до сталого множника.

Рівняння довільної площини можна звести до загального вигляду.

Теорема. Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат x, y, z. Кожному лінійному рівнянню зі змінними x, y, z відповідає деяка площина.





Особливості розміщення площини, коли один або декілька коефіцієнтів її загального рівняння дорівнюють нулю:

$A = 0$, тоді площина $By + Cz + D = 0$ паралельна осі Ox;
$B = 0$, тоді площина $Ax + Cz + D=0$ паралельна осі Oy;
$C = 0$, тоді площина $Ax + By + D=0$ паралельна осі Oz (рис. 4);
$D = 0$, тоді площина $Ax + By + Cz = 0$ проходить через початок координат (рис. 5);
$A = 0$ і $B = 0$, тоді площина $Cz + D = 0$ перпендикулярна до осі Oz (рис. 6);
$A = 0$ і $C = 0$, тоді площина $By + D = 0$ перпендикулярна до осі Oy;
$B = 0$ і $C = 0$, тоді площина $Ax + D = 0$ перпендикулярна до осі Ox;
$A = 0$ і $D = 0$, тоді площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Ox;
$B = 0$ і $D = 0$, тоді площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy;
$C = 0$ і $D = 0$, тоді площина $Ax + By = 0$ проходить через вісь Oz;
площина $z = 0$ – координатна площина Oxy;
площина $y = 0$ – координатна площина Oxz;
площина $x = 0$ – координатна площина Oyz.

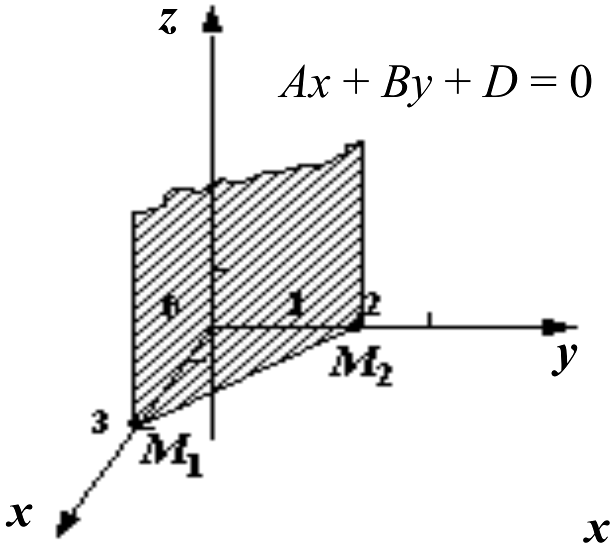


Рис. 4

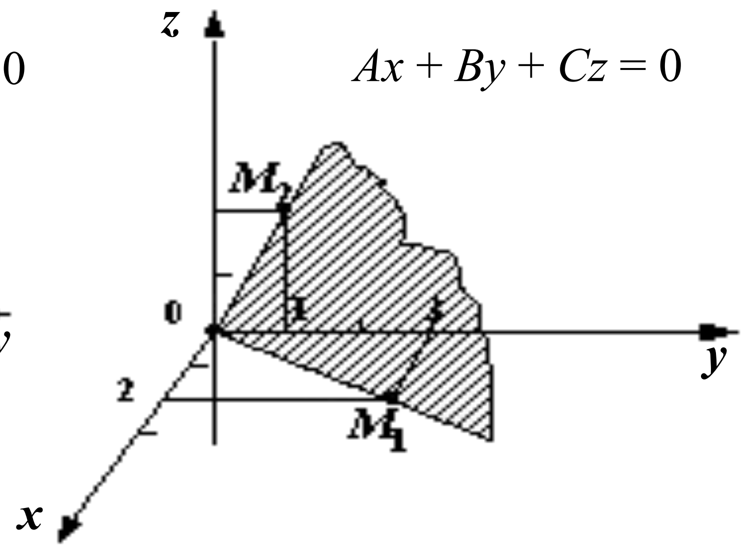


Рис. 5

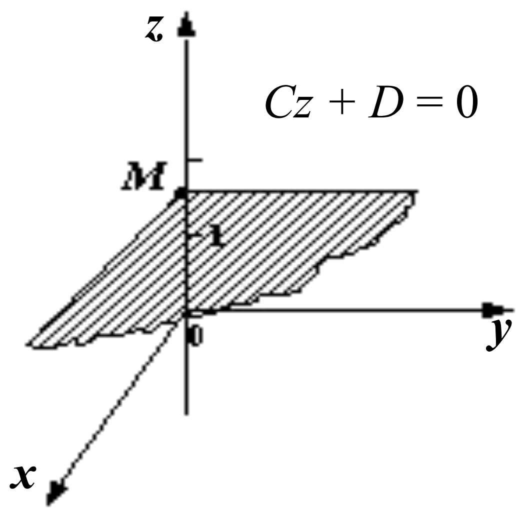


Рис. 6

Приклад 1

Дано три точки $M(2; –1; 3)$, $N(– 5; –6; 0)$ і $P(–1; –3; –1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{NP}$.

$$M \in \alpha; \quad \vec{n} = \overrightarrow{NP} \perp \alpha;$$

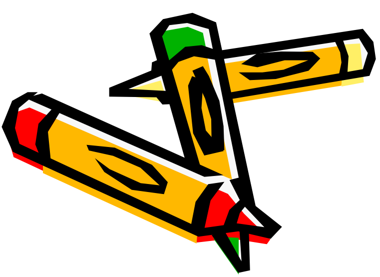
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{NP} = \left(-1 - (-5);\ -3 - (-6);\ -1 - 0\right) = \left(4;\ 3;\ -1\right);$$

$$4(x - 2) + 3(y - (-1)) + (-1)(z - 3) = 0;$$

$$4x - 8 + 3y + 3 - z + 3 = 0;$$

$$4x + 3y - z - 2 = 0.$$



На початок розділу

2.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 7).

Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій площині та побудуємо три вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$, що виходять з однієї точки M_1.

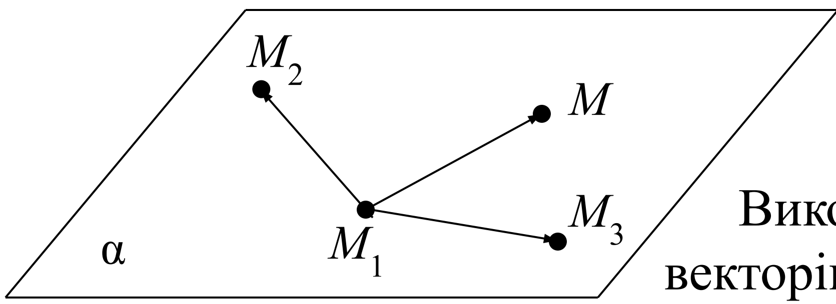


Рис. 7

Точка $M(x; y; z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні.

Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

– ***рівняння площини, що проходить через три задані точки***.

Приклад 1

Дано три точки $M(1;\ -1;\ 2)$, $N(5;\ -6;\ 0)$ і $P(1;\ -3;\ -1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 5-1 & -6-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -3-(-1) & -1-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)\,(15-4) - (y+1)\,(-12-0) + (z-2)\,(-8-0) = 0;$$

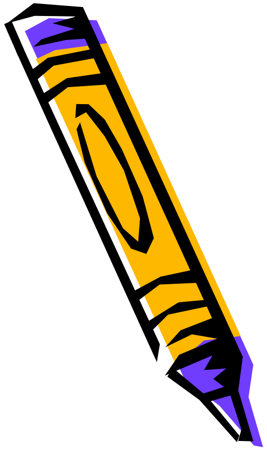
$$11\,(x-1) + 12\,(y+1) - 8\,(z-2) = 0; \quad 11x - 11 + 12y + 12 - 8z + 16 = 0;$$

$$11x + 12y - 8z + 17 = 0.$$

Приклад 2 (виконати самостійно)

Написати загальне рівняння площини α, що проходить через три точки $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(4;\ -1;\ -1)$ і $C(2;\ 0;\ 2)$.

На початок розділу



$$\begin{vmatrix} x-3 & y-(-1) & z-2 \\ 4-3 & -1-(-1) & -1-2 \\ 2-1 & 0-(-1) & 2-2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

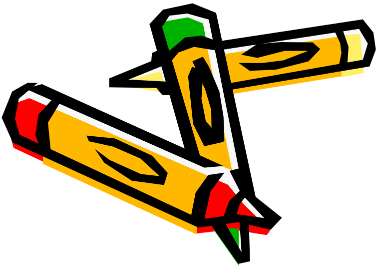
$$(x-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-3)\,(0+3) - (y+1)\,(0+3) + (z-2)\,(1-0) = 0;$$

$$3\,(x-3) - 3\,(y+1) + (z-2) = 0;$$

$$3x - 9 - 3y - 3 + z - 2 = 0;$$

$$3x - 3y + z - 14 = 0.$$



2.1.4. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$ (рис. 8).

Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, маємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0; \quad bcx + acy + abz - abc = 0;$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ – ***рівняння площини у відрізках на осях***.

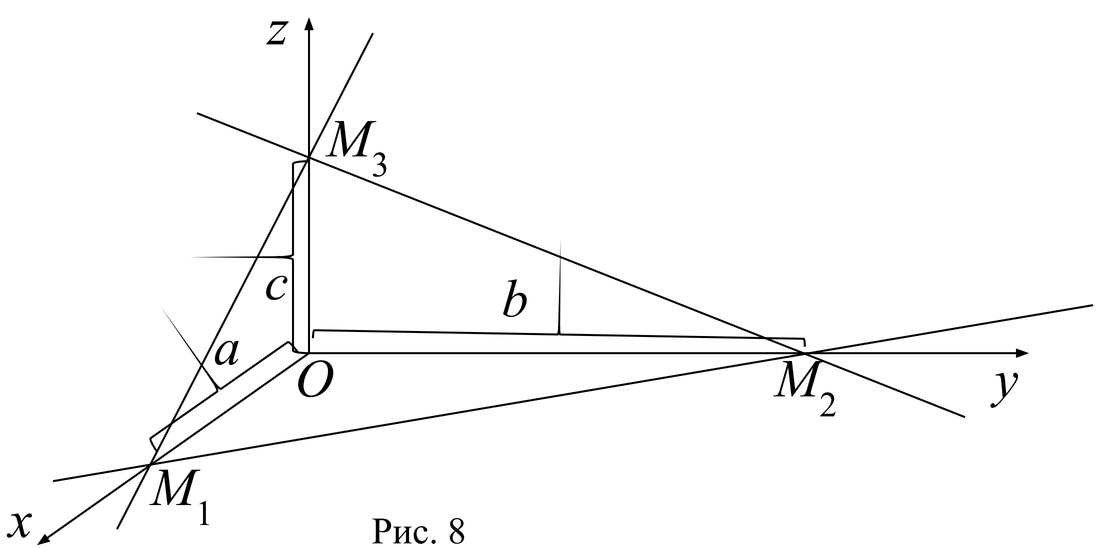


Рис. 8

Приклад 1

Звести загальне рівняння площини $6x - y + 4z + 12 = 0$ до вигляду рівняння у відрізках на осях.

$$6x - y + 4z = -12 \quad \Big| : (-12); \qquad \frac{x}{-2} + \frac{y}{12} + \frac{z}{-3} = 1.$$

Приклад 2

Знайти точки перетину площини α: $3x - 2y + 6z - 12 = 0$ з координатними осями і зобразити площину, побудувавши її сліди – лінії перетину з координатними площинами (рис. 9).

$$\alpha \cap Ox: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} a = 4 \\ M_1(4;0;0) \end{matrix};$$

$$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} b = -6 \\ M_2(0;-6;0) \end{matrix};$$

$$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} c = 2 \\ M_3(0;0;2) \end{matrix}.$$

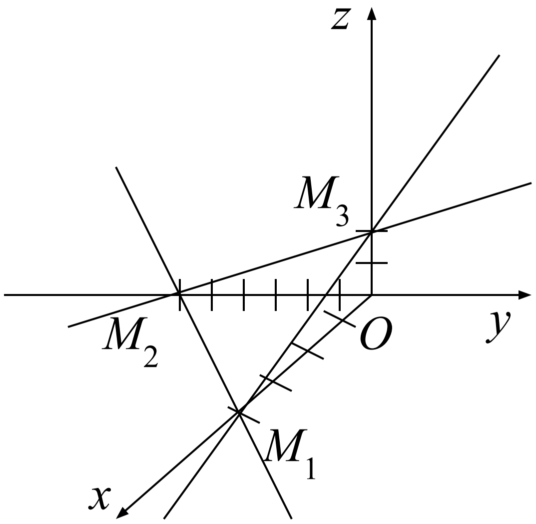


Рис. 9

На початок розділу

2.2. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 10). Отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

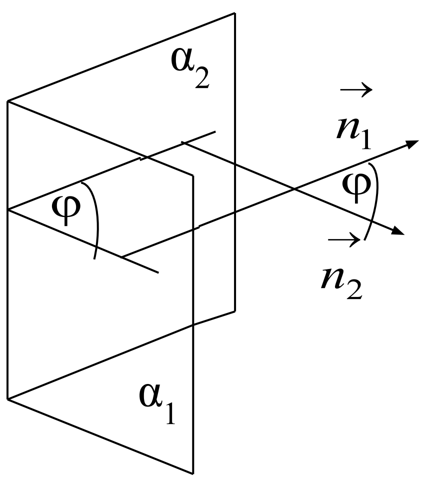


Рис. 10

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Приклад 1

Знайти кут між заданою площиною $\alpha_1: -2x - 3y + 2z + 1 = 0$ і координатною площиною Oxy.

$$\overrightarrow{n_1} = (-2;-3;2); \quad \alpha_2: \ z = 0; \quad \overrightarrow{n_2} = \vec{k} = (0;0;1);$$

$$\cos\varphi = \frac{-2\cdot 0 + (-3)\cdot 0 + 2\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}};$$

$$\varphi = \arccos\left(2/\sqrt{17}\right).$$

Приклад 2

Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M(3;\ 2;\ -4)$ паралельно площині $x - 2y + z - 4 = 0$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \ \ A(x - 3) + B(y - 2) + C(z + 4) = 0;$$

З умови паралельності двох площин маємо: $\dfrac{A}{1} = \dfrac{B}{-2} = \dfrac{C}{1} (= t).$

Тоді $A = t, B = -2t, C = t; \quad t(x - 3) - 2t(y - 2) + t(z + 4) = 0;$

$$tx - 3t - 2ty + 4t + tz + 4t = 0 \mid (:t) ; \quad x - 3 - 2y + 4 + z + 4 = 0;$$

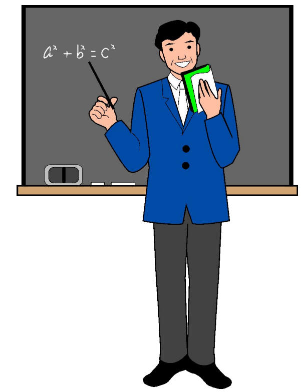
$$x - 2y + z + 5 = 0.$$

На початок розділу

2.3. Умова перетину трьох площин в одній точці

Три площини α_i: $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ (i=1,2,3) перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли квадратна система, складена з рівнянь цих площин, має єдиний розв'язок. Тобто, коли визначник системи відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$



Приклад

Знайти точку перетину трьох площин:
$2x - 4y + 3z - 1 = 0$, $3x - y + 5z - 2 = 0$,
$4x + 3y + 4z = 0$.

Розв'язати самостійно. Використати метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 27 - 80 + 12 + 48 - 30 = -31;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 18 + 0 + 0 + 32 - 15 = 31;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 0 + 20 - 24 - 12 - 0 = 0;$$

$M(-1;\ 0;\ 1)$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 9 - 32 + 4 + 0 - 12 = -31.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{31}{-31} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-31} = 0; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-31}{-31} = 1$$

3. Пряма у просторі

3.1. Основні типи рівнянь прямої

3.1.1. Канонічні рівняння прямої

3.1.2. Параметричні рівняння прямої

3.1.3. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

3.1.4. Загальні рівняння прямої

3.2. Кут між прямими. Умови перпендикулярності і паралельності двох прямих

3.3. Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

зміст

3.1. Основні типи рівнянь прямої

3.1.1. Канонічні рівняння прямої

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{s}=(m;n;p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 11).

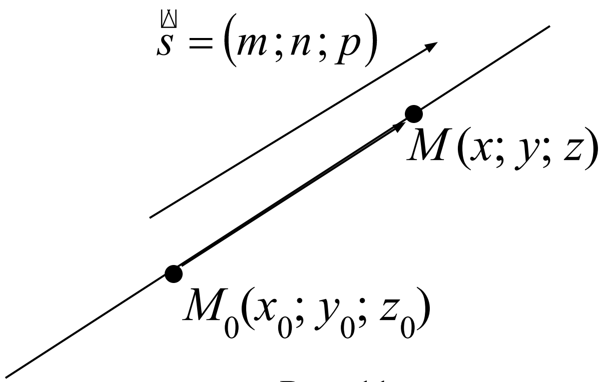


Рис. 11

Візьмемо довільну точку $M(x;\ y;\ z)$ на цій прямій та побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0\,;y-y_0\,;z-z_0).$$

Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний (паралельний) вектору $\vec{s}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

– ***канонічні рівняння прямої***.

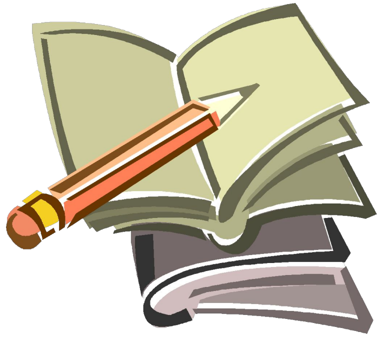
На початок розділу

3.1.2. Параметричні рівняння прямої

Якщо в канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

і розв’язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:



$$\frac{x-x_0}{m}=t; \qquad \frac{y-y_0}{n}=t; \qquad \frac{z-z_0}{p}=t;$$

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}$$

– ***параметричні рівняння прямої***, де змінна t служить параметром.

Приклад

Пряма задана своїми канонічними рівняннями

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{0}.$$

Записати параметричні рівняння цієї прямої. (Розв’язати самостійно).

На початок розділу

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{0}=t;$$

$$\frac{x}{2}=t; \qquad \frac{y-1}{3}=t; \qquad \frac{z+1}{0}=t;$$

$$\begin{cases} x=2t+0 \\ y=3t+1; \\ z=0t-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2t \\ y=3t+1. \\ z=-1 \end{cases}$$

3.1.3. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

Приклад

Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-1;\, 2;\, 0)$ і $M_2(2;\, 4;\, -3)$.

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z-0}{-3-0};$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-3}.$$

На початок розділу

3.1.4. Загальні рівняння прямої

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l служить лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1 \colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad \alpha_2 \colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

називається ***загальними рівняннями прямої***.

<u>Зауваження 1</u>. Загальні рівняння прямої визначаються неоднозначно.

<u>Зауваження 2</u>. Рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

де λ – параметр, задає пучок площин, які проходять через пряму l.

Приклад

Пряма l задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} x-2y+4z-10=0 \\ 3x+2y-2z+6=0 \end{cases}.$$

Знайти її 1) канонічні рівняння; 2) параметричні рівняння.

1) Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x=0$, тоді

$$\begin{cases} -2y+4z-10=0 \\ 2y-2z+6=0 \end{cases}; \quad y=-1; \quad z=2; \ M_0(0;-1;2).$$

Канонічні рівняння

$$\frac{x-0}{-4}=\frac{y-(-1)}{14}=\frac{z-2}{8}; \qquad \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{4}.$$

2) Параметричні рівняння знайти самостійно.

На початок розділу

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{4}=t;$$

$$\frac{x}{-2}=t;\qquad \frac{y+1}{7}=t;\qquad \frac{z-2}{4}=t;$$

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=7t-1. \\ z=4t+2 \end{cases}$$

3.2. Кут між прямими. Умови перпендикулярності та паралельності двох прямих

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами

$$\vec{s_1}=(m_1\,;n_1\,;p_1) \quad \text{і} \quad \vec{s_2}=(m_2\,;n_2\,;p_2).$$

Отже

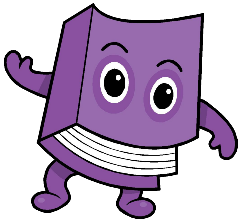
$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Умова паралельності двох прямих



$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

На початок розділу

3.3. Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, коли вектори $\overrightarrow{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$, $\overrightarrow{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$, і $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використовуючи умову компланарності трьох векторів $(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{s_1})\cdot\overrightarrow{s_2}=0$, одержуємо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

<u>Зауваження 1</u>. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність служить умовою їх належності одній площині. Якщо ця умова не виконується, то прямі l_1 і l_2 є мимобіжними.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2, розглянемо вектор $\vec{a}=\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}$, який перпендикулярний до обох прямих.

Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ на вектор $\vec{a}$.

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right| / \left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \left(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right)\right| / \left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|.$$

Зауваження 2. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

Приклад

Знайти відстань між заданими прямими:

$$l_1: \ \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+3}{2} \quad \text{і} \quad l_2: \ \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

$$\vec{a} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (0-2; 2-(-5); 3-(-3)) = (-2; 7; 6); \quad |\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21};$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}| = -2 \cdot (-4) + 7 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = 0; \quad d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|0|}{\sqrt{21}} = 0.$$

Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються.

На початок розділу

4. Взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі

зміст

4.1. Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням $l: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$; $\alpha: \ Ax+By+Cz+D=0.$

Кут φ між ними доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{s}=(m;n;p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A;B;C)$ до 90º (рис. 12). Тоді

$$\cos(90^\circ-\varphi)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

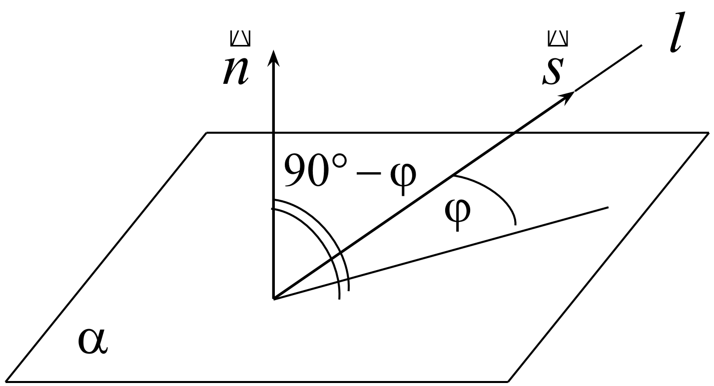


Рис. 12

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини $\dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}.$

Умова паралельності прямої та площини $Am+Bn+Cp=0.$

На початок розділу

4.2. Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0; \qquad l: \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}.$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини треба скласти і розв'язати систему їх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гауса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої в рівняння площини. Дістаємо рівняння для t

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

1) Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то вони перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t = -\left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right)/\left(Am + Bn + Cp\right).$$

2) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків не має. Пряма паралельна площині і не лежить на ній.

3) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

Приклад

Знайти проекцію N точки $M_0(2;\ –5;\ 4)$ на площину α: $3x + 2y - z - 6 = 0$.

Точка N служить основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 13).

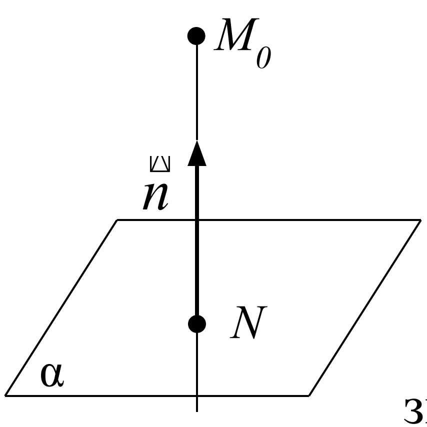


Рис. 13

Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна покласти $\vec{s} = \vec{n} = (3;\ 2;\ -1)$.

Тоді параметричні рівняння прямої M_0N:

$$x = 3t + 2;\ \ y = 2t - 5;\ \ z = -t + 4.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини

$$3(3t + 2) + 2(2t - 5) - (-t + 4) - 6 = 0;\ \ t = -1.$$

Тоді

$$x = 3(-1) + 2 = -1;\quad y = 2(-1) - 5 = -7;\quad z = -(-1) + 4 = 5.$$

Отже, проекцією служить точка N(–1; –7; 5).

На початок розділу

4.3. Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 14).

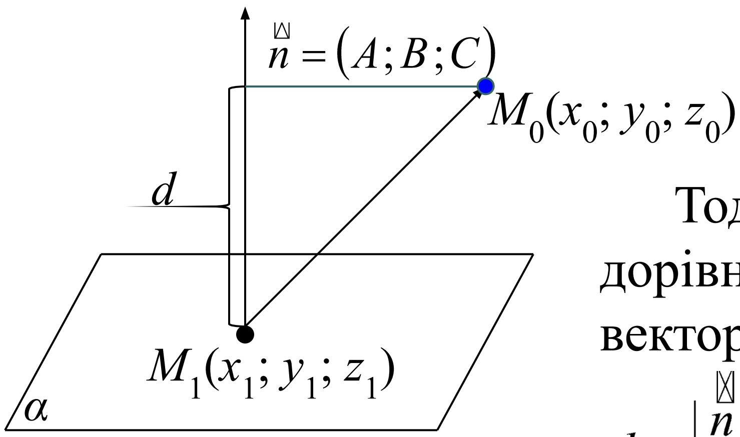


Рис. 14

Візьмемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1).$$

Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

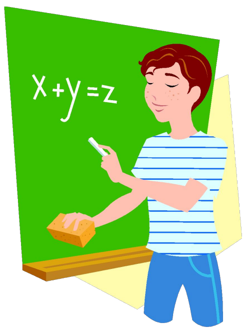
$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, то $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Приклад

Знайти відстань d від точки $M_0(2; -4; 3)$ до площини α: $3x - 2y - 6z - 1 = 0$. (Розв'язати самостійно).

На початок розділу



$$d=\frac{\left|3\cdot 2-2\cdot(-4)-6\cdot 3-1\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}}=$$

$$=\frac{\left|6+8-18-1\right|}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{\left|-5\right|}{\sqrt{49}}=\frac{5}{7}.$$

4.4. Відстань від точки до прямої

Нехай треба знайти відстань d від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої l, яка задана параметричними рівняннями:

$$x = mt + x_0\,;\ \ y = nt + y_0\,;\ \ z = pt + z_0\,.$$

Розглянемо три способи визначення цієї відстані.

Спосіб 1. Візьмемо на прямій відому точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{s} = (m\,; n\,; p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0\,; y_1 - y_0\,; z_1 - z_0)$ (рис. 15). Площа S цього паралелограма

$$S = |\vec{s}\,| \cdot d \quad \text{або} \quad S = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\,|.$$

Звідси $d = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\,| / |\vec{s}\,|.$

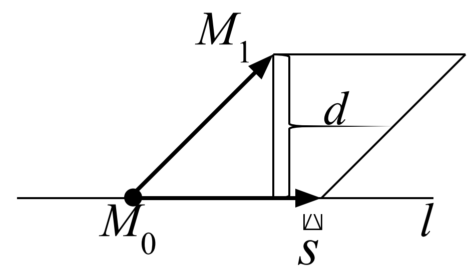


Рис. 15

Спосіб 2. Проведемо через точку M_1 площину α, яка перпендикулярна до прямої l (рис. 16). Вектор нормалі $\vec{n}$ площини α колінеарний напрямному вектору $\vec{s}$ прямої l. Можна покласти $\vec{n} = \vec{s} = (m\,; n\,; p)$. Тоді

$$\alpha: \quad m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0.$$

Далі треба знайти точку N перетину прямої та площини. Ця точка служить основою перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на пряму l. Отже, $d = M_1N$.

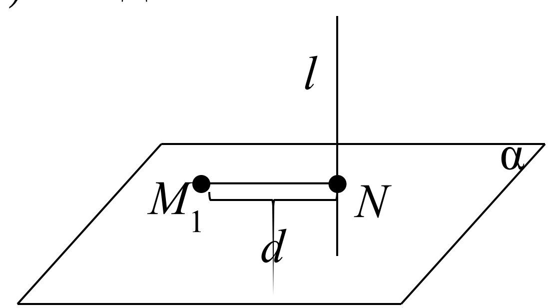


Рис. 16

Спосіб 3. Розглянемо функцію $u = d^2(t)$, яка дорівнює квадрату відстані

$$d(t) = \sqrt{(x_1 - mt - x_0)^2 + (y_1 - nt - y_0)^2 + (z_1 - pt - z_0)^2}$$

від точки M_1 до довільної точки прямої l.

Відстань d від точки M_1 до прямої l відповідає найменшому значенню цієї функції. Зі змісту задачі випливає, що мінімум існує і служить єдиним екстремальним значенням. Тому відповідне значення параметра t_m визначається однозначно з необхідної умови екстремуму $u'(t) = 0$:

$$-2m(x_1 - mt - x_0) - 2n(y_1 - nt - y_0) - 2p(z_1 - pt - z_0) = 0;$$

$$t_m = \frac{m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0)}{m^2 + n^2 + p^2}.$$

Тоді $d = d(t_m)$.

Приклад

Знайти відстань d від заданої точки M_1 до заданої прямої l: $M_1(2;\,3;\,-2)$,

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{2}.$$

Застосовуємо <u>спосіб 1:</u>

$$\vec{s}=(-1;-2;2);\ \ |\vec{s}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=3;$$

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\big(2-(-1);\ 3-2;\ -2-0\big)=\big(3;\ 1;\ -2\big);$$

$$\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k};$$

$$|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|=\sqrt{2^2+4^2+5^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5};$$

$$d=|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|/|\vec{s}|=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}.$$

(<u>Способами 2 і 3</u> розв’язати задачу самостійно).

На початок розділу

Застосовуємо <u>спосіб 2:</u>

Проведемо через точку M_1 площину, вектор нормалі якої колінеарний вектору нормалі прямої:

$$\vec{n} = \vec{s} = (-1; -2; 2); \qquad -1(x-2) - 2(y-3) + 2(z-(-2)) = 0;$$

$$x + 2y - 2z - 12 = 0.$$

Знайдемо точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{2} = t; \qquad l: \begin{cases} x = -t-1 \\ y = -2t+2. \\ z = 2t \end{cases}$$

$$-t - 1 + 2(-2t + 2) - 2(2t) - 12 = 0;$$

$$t = -1; \qquad x = 0;\ y = 4;\ z = -2.$$

$$N(0; 4; -2)$$

$$d = M_1N = \sqrt{(2-0)^2 + (3-4)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

Застосовуємо <u>спосіб 3:</u>

$$d(t)=\sqrt{\left(2-(-1)t-(-1)\right)^2+\left(3-(-2)t-2\right)^2+\left(-2-2t-0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(3+t)^2+(1+2t)^2+(-2-2t)^2}=$$

$$=\sqrt{9+6t+t^2+1+4t+4t^2+4+8t+4t^2}=\sqrt{9t^2+18t+14};$$

$$t_m=\frac{-1\left(2-(-1)\right)-2\left(3-2\right)+2\left(-2-0\right)}{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\frac{-9}{9}=-1;$$

$$d(t_m)=\sqrt{9(-1)^2+18(-1)+14}=\sqrt{5}.$$

5. Поверхні другого порядку та інші поверхні

зміст

5.1. Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких у декартовій системі координат *Oxyz* задовільняють рівнянню:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

де A, B,..., L – дійсні числа, причому хоча б один із коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля.

Для вивчення форми поверхні використовують метод паралельних перерізів. Суть цього методу полягає в наступному: поверхня перетинається площинами, паралельними координатним площинам, і визначаються лінії перетину поверхні з даними січними площинами. За виглядом цих ліній судять про форму даної поверхні.

На початок розділу

5.2. Сфера

Сферична поверхня або ***сфера*** – це множина всіх точок простору, рівновіддалених від деякої точки, що називається *центром.* Відстань від центра до довільної точки сфери називається її *радіусом*.

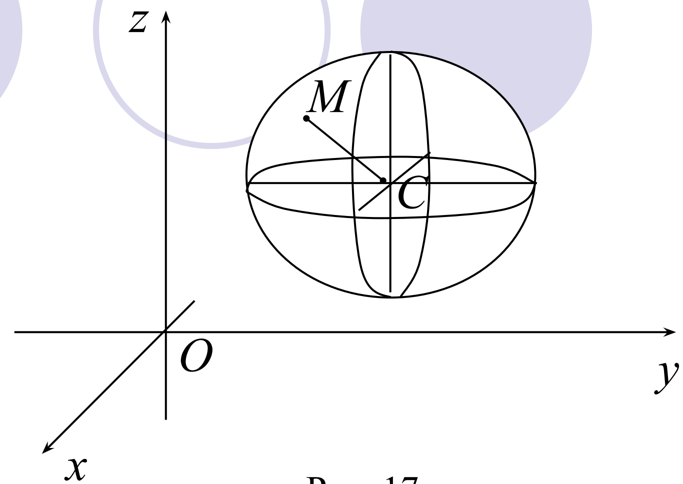


Рис. 17

Нехай у прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ точка $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ є центром сферичної поверхні радіуса R (рис. 17).

Для того, щоб точка $M(x; y; z)$ належала сферичній поверхні, необхідно та достатньо, щоб $MC = R$ або

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

або в розгорнутому вигляді:

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-R^2=0.$$

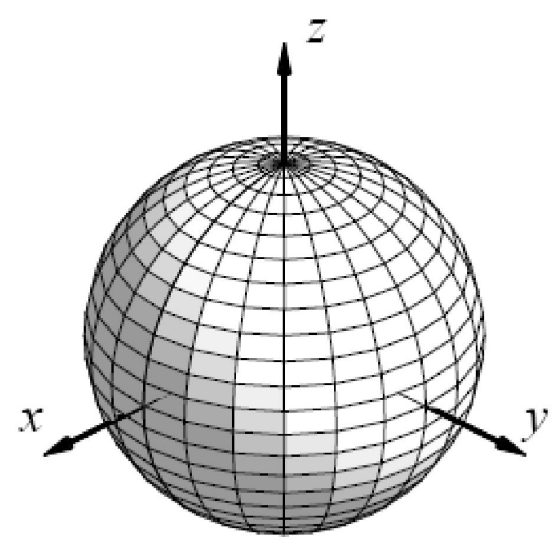


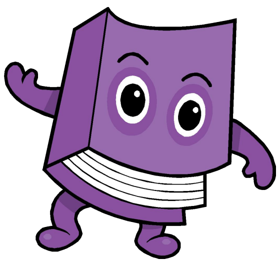
Рис. 18

Якщо точка C співпадає з початком координат, то рівняння сфери називається ***канонічним*** і має вигляд: $x^2+y^2+z^2=R^2$. (рис.18)

Приклад

Показати, що задане рівняння є рівнянням сфери, та знайти її центр і радіус:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 5z + 3 = 0.$$



$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 5z + 3 = 0;$$

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) + (z^2 + 5z) + 3 = 0;$$

$$(x^2 - 2\cdot 3x + 3^2 - 3^2) + (y^2 + 2\cdot 2y + 2^2 - 2^2) + \left(z^2 + 2\cdot\frac{5}{2}z + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 3 = 0;$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 = 0;$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}.$$

Одержане рівняння описує сферу з центром у точці $C(3; -2; -5/2)$ і радіусом $R = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

На початок розділу

5.3. Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею (***циліндром***) називається поверхня, утворена рухом прямої (***твірної***) l, яка перетинає задану лінію (***напрямну***) l_0, залишаючись паралельною заданій прямій a_0, причому задані лінії l_0 і a_0 не лежать в одній площині.

Поверхні, твірні яких є прямими лініями, називаються ***лінійчатими***. Оскільки лінійчаті поверхні конструюються з прямолінійних рейок, то такі поверхні широко використовують в будівництві (опори, башти, перекриття, покрівлі і т.п.).

Зауваження 1. Циліндр є лінійчатою поверхнею. Його можна уявити як "огорожу", виставлену вздовж лінії l_0.

Теорема 1. У просторі $Oxyz$ кожне рівняння з двома змінними $F(x,y)=0$, що не містить координати z, визначає циліндричну поверхню S, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною служить лінія

$$l_0: \begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases},$$

що лежить у площині Oxy (рис. 19).

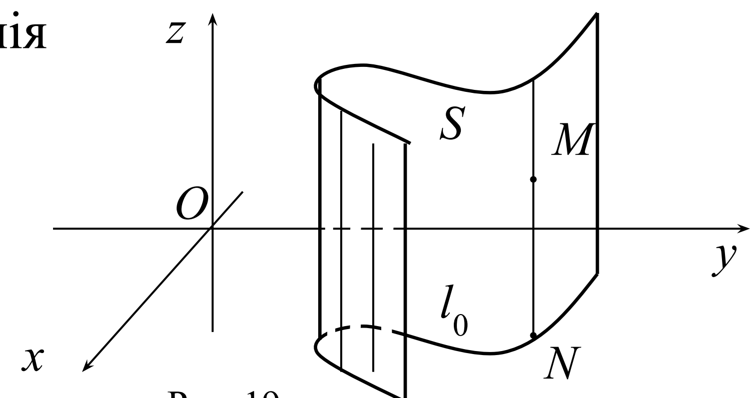


Рис. 19

Для довільної точки $M(x;\ y;\ z)$ вертикальної циліндричної поверхні S з напрямною

$$l_0:\ \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

її проекція $N(x;\ y;\ 0)$ на площину Oxy лежить на цій лінії l_0, а значить, задовольняє її рівняння

$$l_0:\ \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Отже, координати точки $M(x;\ y;\ z)$ задовольняють рівняння $F(x;\ y) = 0$, оскільки воно не містить змінної z.

Очевидно, що координати точок, які не лежать на поверхні S, це рівняння не задовольняють, оскільки вони проектуються на площину Oxy поза лінією l_0.

<u>Зауваження 2</u>. Рівняння $F(y;\ z) = 0$, що не місить змінну x, у просторі визначає циліндричну поверхню з твірними, що паралельні осі Ox. Рівняння $F(x;\ z) = 0$, що не місить змінну y, у просторі визначає циліндричну поверхню з твірними, що паралельні осі Oy.

На початок розділу

5.3.1. Еліптичний циліндр

Еліптичний циліндр (рис. 20) має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Зокрема, якщо $a = b = R$, то рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

визначає ***круговий циліндр***.

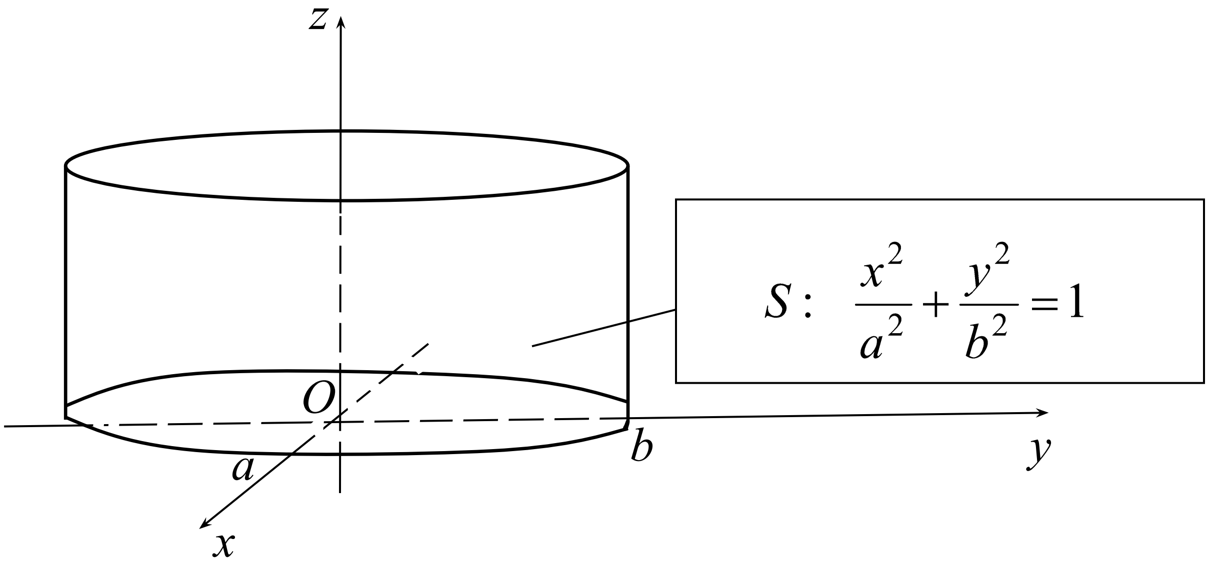


Рис. 20

На початок розділу

5.3.2. Гіперболічний циліндр

Рівняння $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

визначає в просторі гіперболічний циліндр з твірною, що паралельна осі Oz, і напрямною – гіперболою (рис. 21).

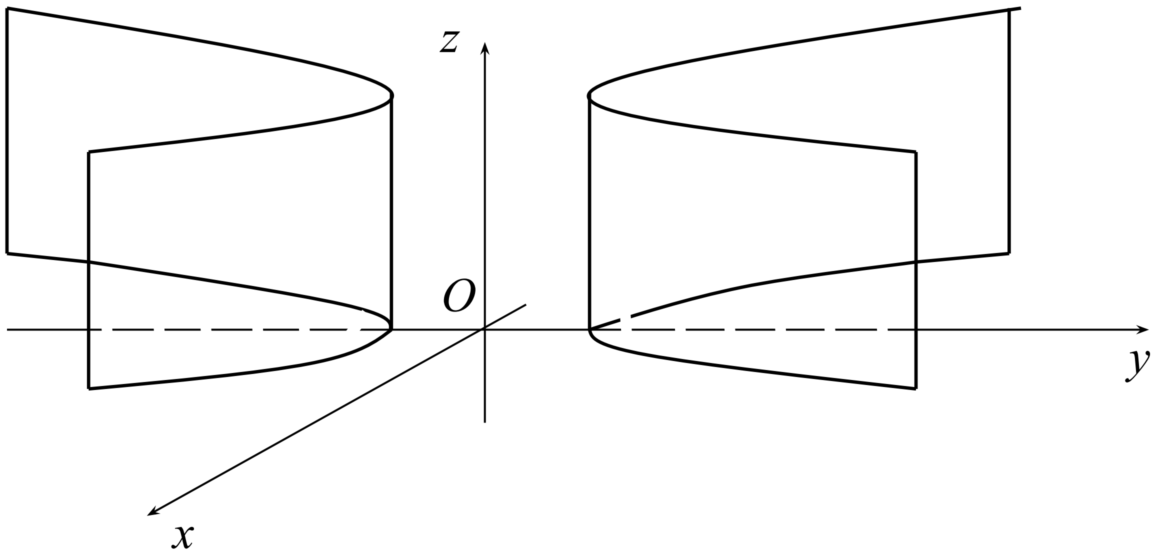


Рис. 21

На початок розділу

5.3.3. Параболічний циліндр

Рівняння $y^2 = 2px$

визначає в просторі параболічний циліндр з твірною, що паралельна осі Oz, і напрямною – параболою (рис. 22).

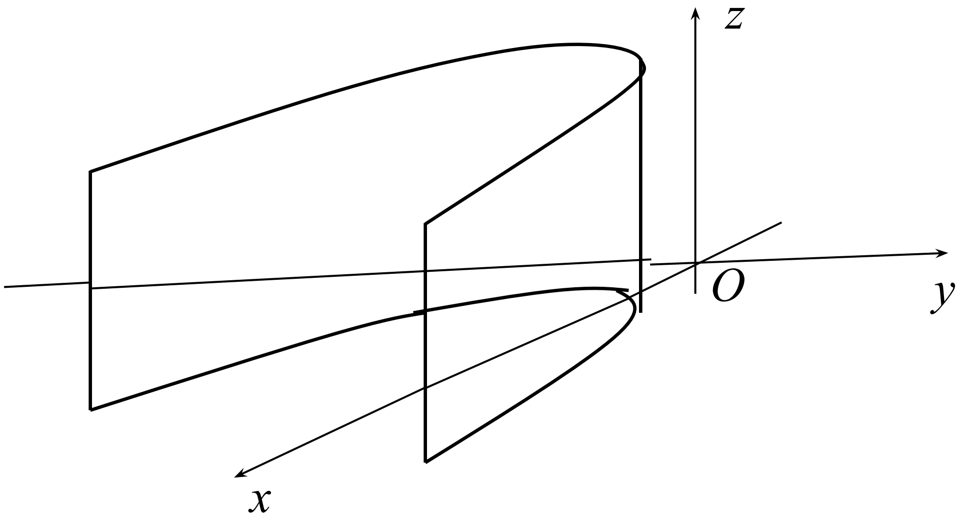


Рис. 22

На початок розділу

5.4. Конічні поверхні. Конус другого порядку

Конічною поверхнею (***конусом***) називається поверхня, утворена рухом прямої (***твірної***) l, яка проходить через задану точку $C(x_0; y_0; z_0)$ (***вершину***) і перетинає задану лінію (***напрямну***) l_0, причому задана точка C не лежить на заданій лінії l_0.

Нехай напрямна l_0 задана як перетин двох поверхонь

$$l_0:\ \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

Конус є лінійчатою поверхнею. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка конічної поверхні. Тоді рівняння твірної, на якій лежить ця точка, можна подати у вигляді рівняння прямої, що проходить через дві точки – вершину $C(x_0; y_0; z_0)$ і точку $N(X; Y; Z)$ перетину цієї твірної та напрямної:

$$\frac{x - x_0}{X - x_0} = \frac{y - y_0}{Y - y_0} = \frac{z - z_0}{Z - z_0}.$$

Якщо вилучити з наведених рівнянь для довільної точки твірної $M(x; y; z)$ (ця точка одночасно належить конічній поверхні) координати точки перетину $N(X; Y; Z)$, використовуючи співвідношення

$$\begin{cases} F_1(X, Y, Z) = 0 \\ F_2(X, Y, Z) = 0 \end{cases},$$

то отримаємо рівняння конічної поверхні $F(x, y, z) = 0$.

Конус другого порядку (***еліптичний конус***) (рис. 23) має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

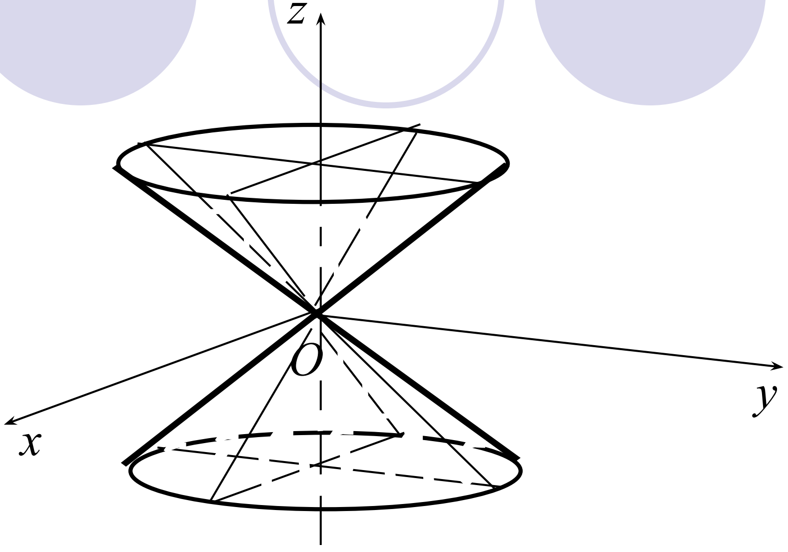


Рис. 23

Вершина цього конуса лежить у початку координат $O(0;0;0)$, а напрямною служить еліпс

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases}$$

з півосями a і b, що лежить у площині $z = c$, яка перпендикулярна до осі Oz. Вісь Oz є віссю симетрії даного конуса, а координатні площини служать його площинами симетрії.

Зокрема, якщо $a = b$, то рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

визначає ***круговий конус***.

На початок розділу

5.5. Поверхні обертання. Тор

Поверхня, утворена обертанням плоскої лінії (***твірної***, ***мередіана***) l навколо заданої прямої a_0 (***осі обертання***), що лежить у площині лінії l, називається ***поверхнею обертання***.

Коло, яке описує довільна точка твірної l при обертанні, називається ***паралеллю***. Площина паралелі перпендикулярна до осі обертання a_0.

Теорема 1. Нехай лінія l лежить у площині Oyz і задається рівнянням

$$\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

Якщо ця лінія обертається навколо осі Oz, то утворюється поверхня обертання, рівняння якої

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0.$$

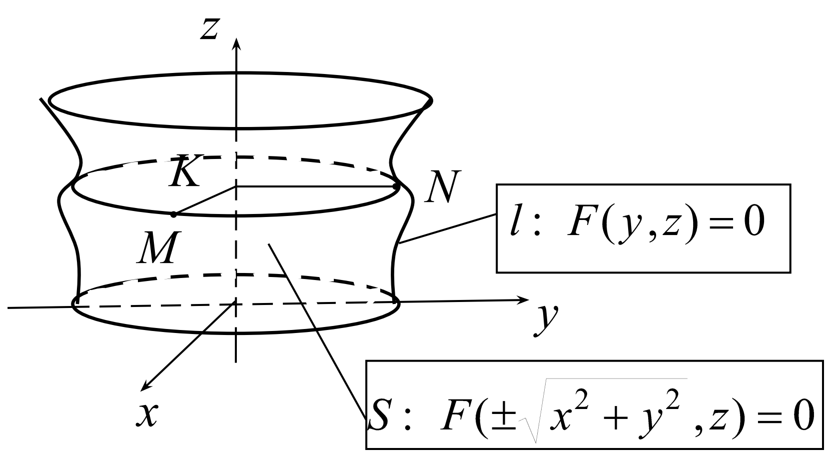


Рис. 24

Нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка поверхні обертання (рис. 24).

Проведемо через цю точку паралель, яка перетинає твірну l у точці $N(0;Y;z)$. Таким чином, точці $M(x;y;z)$ при обертанні відповідає єдина точка $N(0;Y;z)$ твірної.

Нехай $K(0;\ 0;\ z)$ – центр кола паралелі. Оскільки MK і NK – радіуси одного і того ж кола, то $NK = MK$.

Але $NK = |y|;\ MK = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тоді $|y| = \sqrt{x^2 + y^2};\ y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Оскільки точка $N\left(0, \pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right)$ належить твірній, то її координати задовольняють рівняння цієї лінії:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Одержане рівняння є рівнянням поверхні обертання, оскільки його задовольняють координати x, y, z довільної точки цієї поверхні, а координати інших точок простору це рівняння не задовольняють (їм при обертанні відповідають точки, що лежать поза твірною).

Зауваження. Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї площини, треба у рівнянні даної лінії зробити заміну змінних: змінну, що відповідає осі обертання залишити тією самою, а іншу змінну замінити на "плюс-мінус" квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат. Наприклад,

$$\begin{array}{c} F(y, z) = 0 \\ \circlearrowleft Oz \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Тор – геометричне тіло, яке одержується обертанням кола навколо осі, що лежить у одній площині з колом, але не перетинає його. Форма тора ззовні нагадує бублик (рис. 25).

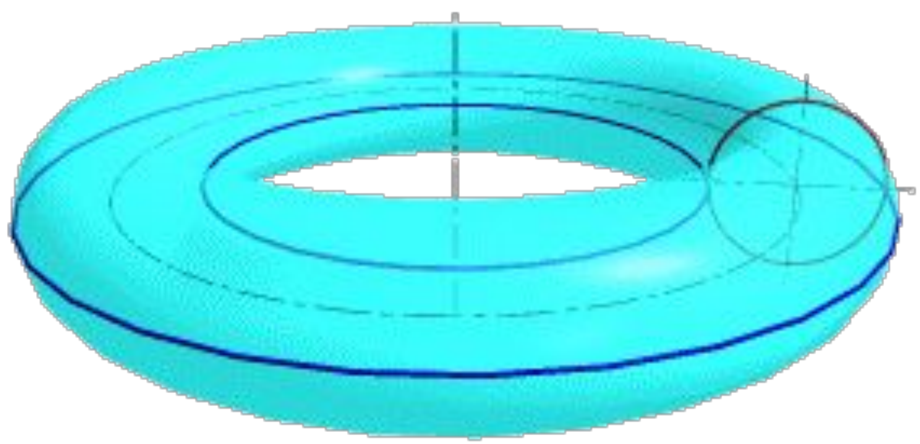


Рис. 25

Приклад

Знайти рівняння поверхні, отриманої в результаті обертання прямої $y = z$, що лежить в площині Oyz, навколо осі Oz.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y = z \\ \lrcorner Oz \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} = z.$$

Підносячи до квадрата ліву та праву частини останнього рівняння, отримаємо

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Звідси маємо

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

– канонічне рівняння кругового конуса.

На початок розділу

5.6. Еліпсоїд

Якщо еліпс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, що лежить в площині Oyz, обертати навколо осі Oz, то отримаємо ***еліпсоїд обертання*** навколо осі Oz (рис. 26).

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\lrcorner Oz}{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Звідси маємо $$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

– ***канонічне рівняння*** еліпсоїда обертання.

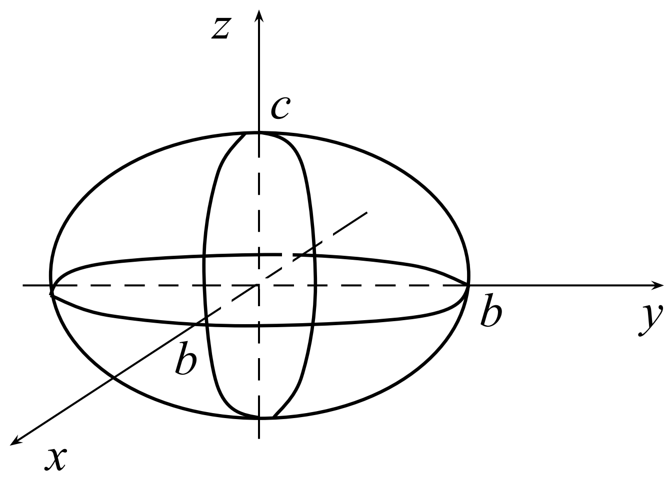


Рис. 26

Зокрема, якщо $b = c = R$, то маємо канонічне рівняння сфери

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Піддаючи еліпсоїд обертання $\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x \to kx$; $y \to y$; $z \to z$.

У результаті одержимо $\frac{((b/a)x)^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Звідси маємо

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

– ***канонічне рівняння еліпсоїда загального вигляду*** (***еліпсоїда***) (рис. 27).

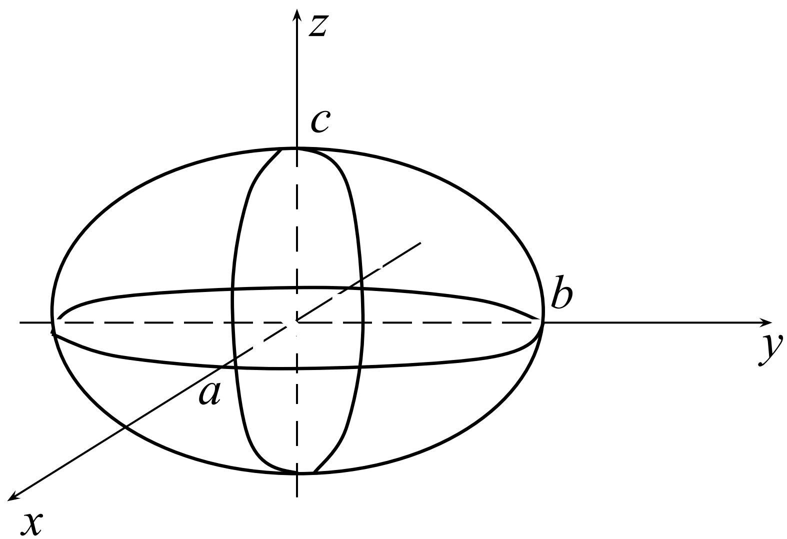


Рис. 27

На початок розділу

5.7. Однопорожнинний гіперболоїд

Якщо гіперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, що лежить в площині Oyz, обертати навколо уявної осі Oz, то отримаємо ***однопорожнинний гіперболоїд обертання*** навколо осі Oz (рис. 28) .

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\lrcorner Oz}{\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Звідси маємо

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

– ***канонічне рівняння*** однопорожнинного гіперболоїда обертання.

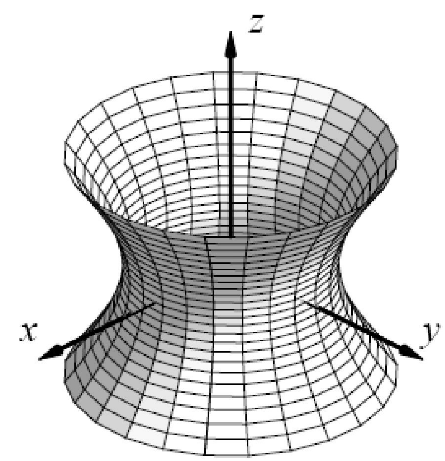


Рис. 28

Піддаючи однопорожнинний гіперболоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну

$$x \to kx\,;\ \ y \to y\,;\ \ z \to z.$$

У результаті одержимо $\dfrac{((b/a)x)^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Звідси маємо $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

– ***канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда загального вигляду*** (***однопорожнинного гіперболоїда***) (рис. 29).

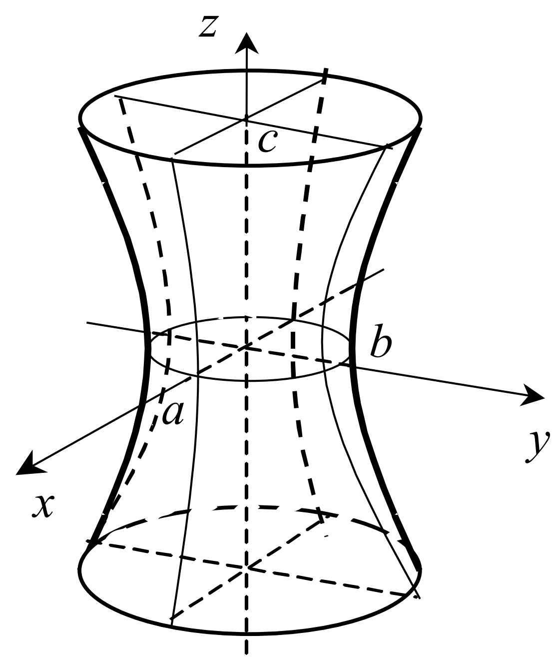


Рис. 29

Зауваження 1. Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, що розширюється в обидва боки осі симетрії Oz. Поперечним перерізом є еліпс. Найвужчий з перерізів – при $z = 0$.

Зауваження 2. Однопорожнинний гіперболоїд є лінійчатою поверхнею.

На початок розділу

5.8. Двопорожнинний гіперболоїд

Якщо гіперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, що лежить в площині Oyz, обертати навколо дійсної осі Oz, то отримаємо ***двопорожнинний гіперболоїд обертання*** навколо осі Oz (рис. 30).

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\frac{y^2}{b^2}-\underset{\hookleftarrow Oz}{\frac{z^2}{c^2}}=-1 \Rightarrow \left(\begin{array}{c} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right) \Rightarrow \frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Звідси маємо

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

– ***канонічне рівняння*** двопорожнинного гіперболоїда обертання.

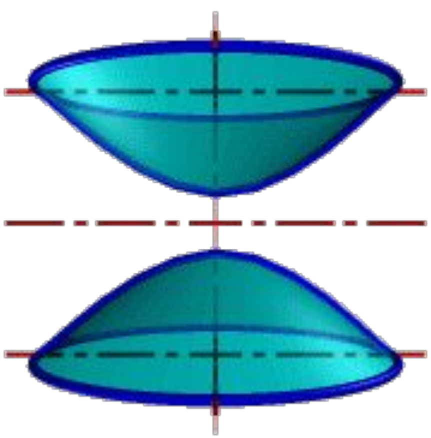


Рис. 30

Піддаючи двопорожнинний гіперболоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k=b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну

$$x \to kx\ ;\ \ y \to y\ ;\ \ z \to z.$$

У результаті одержимо

$$\frac{((b/a)x)^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Звідси маємо

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

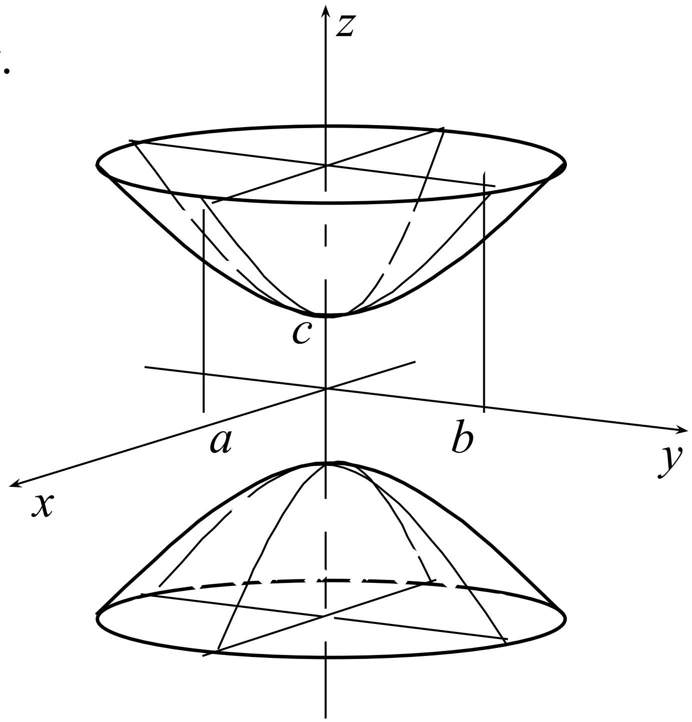


Рис. 31

– ***канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда загального вигляду*** (***двопорожнинного гіперболоїда***) (рис. 31).

На початок розділу

5.9. Еліптичний параболоїд

Якщо параболу $y^2 = 2pz$, що лежить в площині Oyz, обертати навколо її осі Oz, то отримаємо ***параболоїд обертання*** навколо осі Oz (рис. 32).

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y^2 = 2pz \\ \circlearrowleft Oz \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 2pz.$$

Звідси маємо

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z$$

– ***канонічне рівняння*** параболоїда обертання.

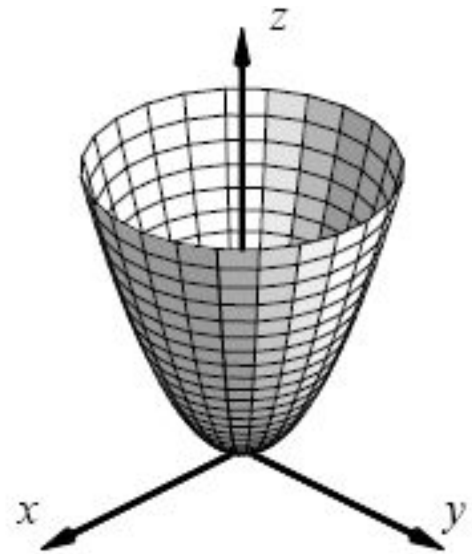


Рис. 32

Піддаючи параболоїд обертання $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2p}=z$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Oy з коефіцієнтом деформації $k=\sqrt{p/q}$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну

$$x \to x\ ;\ \ y \to ky\ ;\ \ z \to z.$$

У результаті одержимо $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{\left(\sqrt{p/q}\,y\right)^2}{2p}=z.$

Звідси маємо $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$

– ***канонічне рівняння параболоїда загального вигляду*** (***еліптичного параболоїда***) (рис. 33).

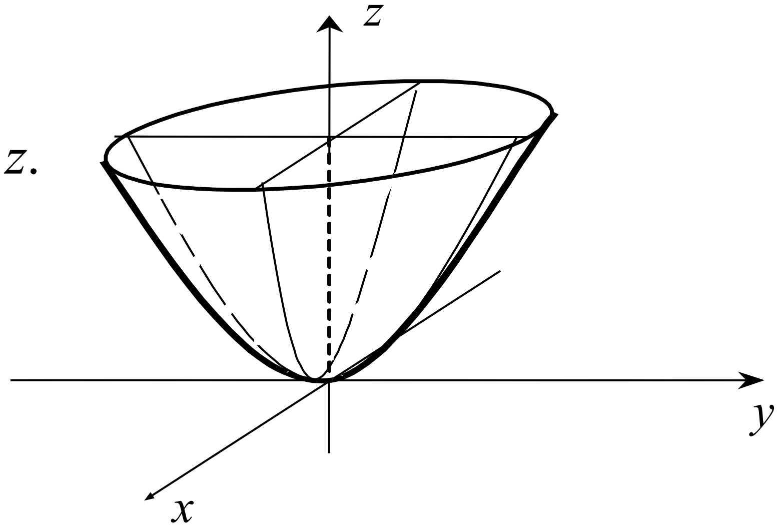


Рис. 33

<u>Зауваження</u>. Еліптичний параболоїд можна утворити рухом параболи $y^2 = 2qz$ вздовж параболи $x^2 = 2pz$ так, що площина першої параболи залишається паралельною координатній площині Oyz, а її вершина ковзає по другій параболі. Площини цих парабол перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболи повернуті опуклостями в один бік – вершиною вниз.

На початок розділу

5.10. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня (рис. 34), що задається ***канонічним рівнянням***

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z.$$

Ця поверхня утворюється рухом параболи $y^2 = -2qz$ вздовж параболи $x^2 = 2pz$ так, що площина першої параболи залишається паралельною координатній площині Oyz, а її вершина ковзає по іншій параболі. Площини цих парабол перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболи повернуті опуклостями у протилежні боки: перша напрямлена вершиною вверх, а друга – вершиною вниз.

Зауваження 1. Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Початок координат $O(0;0;0)$ (***вершина*** гіперболічного параболоїда) є ***сідловою точкою*** (***точкою перевалу***) цієї поверхні.

Зауваження 2. Гіперболічний параболоїд є лінійчатою поверхнею.

На початок розділу

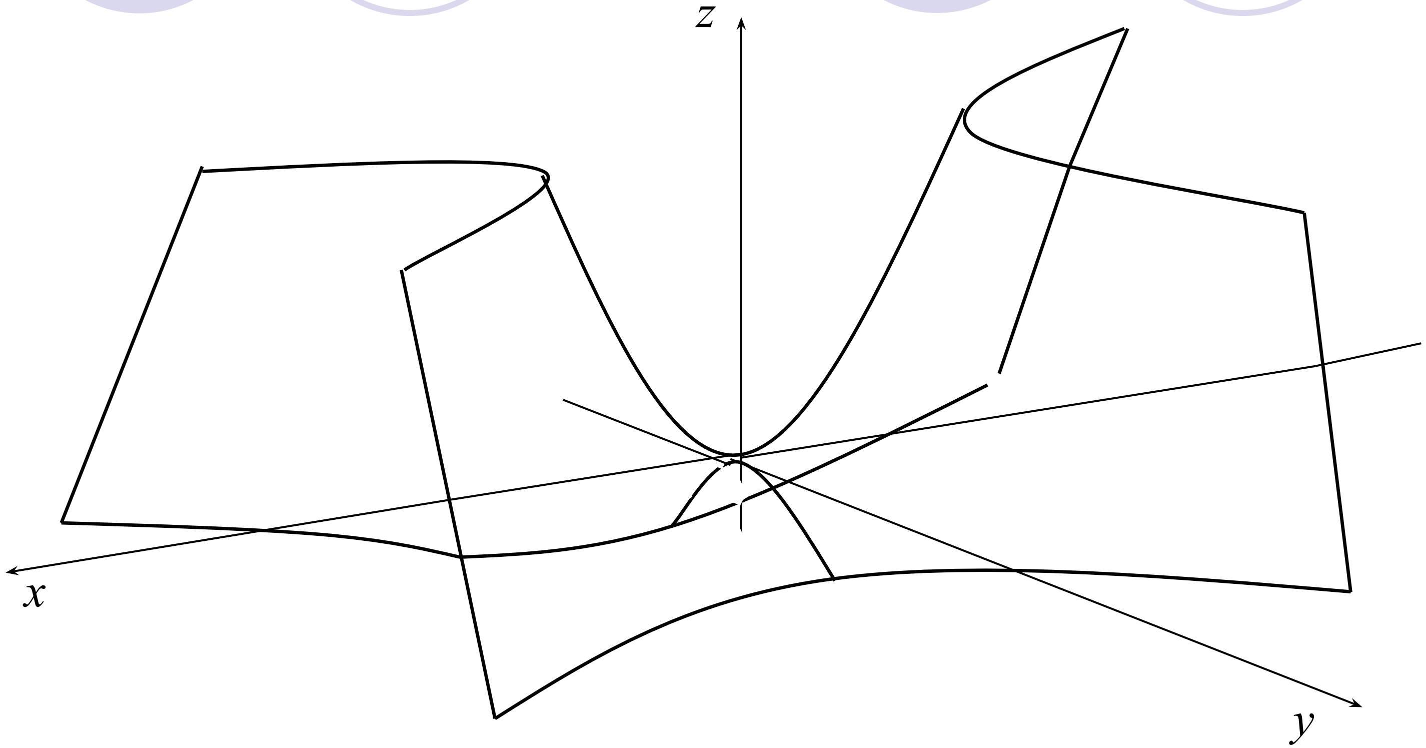


Рис. 34

5.11. Односторонні поверхні

Усі розглянуті вище поверхні є ***двосторонніми***: при обході довільного замкненого контуру, що цілком лежить на поверхні та не має спільних точок з її межею, повернення в початкову точку не змінює напряму вектора нормалі.

На ***односторонній*** поверхні існує замкнений контур, що не має спільних точок з її межею, повний обхід якого приводить до зміни напряму нормалі на протилежний.

5.11.1. Стрічка Мебіуса

Звичайна паперова смужка служить моделлю частини площини і є двосторонньою поверхнею.

Стрічка Мебіуса одержується з паперової смужки, зігнутої і склеєної кінцями з перекрученням на півоберта (на відміну від звичайного циліндричного кільця на рис. 35) (рис. 36).

У неї лише одна сторона, тоді як у циліндричного кільця їх дві. Якщо поставити олівець і провести ним, не відриваючи його від паперу, лінію уздовж цієї стрічки, поки вона не замкнеться, то слід від олівця буде скрізь. Отже, стрічка Мебіуса є односторонньою поверхнею.

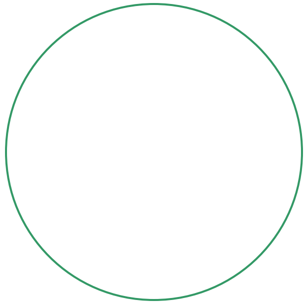


Рис. 35

Рис. 36

На початок розділу

5.11.2. Пляшка Клейна

Уявіть собі звичайну тонкостінну пляшку, що зроблена з «пластичного» скла, яке можна гнути і скручувати. Вона є моделлю поверхні, що має дві сторони – внутрішню і зовнішню, розділені краями шийки.

Пророблюємо в її боці дірку, беремо за шийку, згинаємо і вставляємо шийку в цю дірку. Пропускаємо її всередині до самого дна. У дні пророблюємо ще одну дірку. Краї шийки і дірки у дні акуратно склеюємо. Отримаємо односторонню поверхню, що називається ***пляшкою Клейна*** (рис. 37).

Оскільки олівцем по ній не поводиш – незручно, то пустимо повзати муху. Ця муха може повзати скрізь по всій поверхні, жодного разу не перейшовши через її межу – краї дірки у боці.

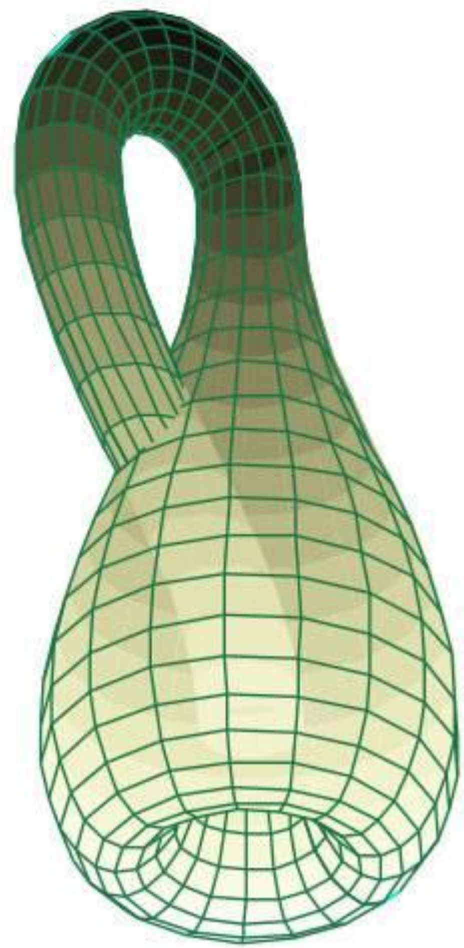


Рис. 37

На початок розділу

Список літератури

1. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. – М.: Наука, 1997. –304 с.
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия – М.: МГТУ им. Баумана, 2000. – 386 с.
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.
5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.
7. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2005. – 496 с.
8. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.
9. Станішевський С.О., Якунін А.В., Ситникова В.С. Вища математика для електротехніків. Модуль 1. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 308 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Колосов Анатолій Іванович, **Якунін** Анатолій Вікторович,
Ламтюгова Світлана Миколаївна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРЕЗЕНТАЦІЯХ.
ЧАСТИНА II: АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

Електронний альбом дидактичних матеріалів до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” (для студентів 1-2 курсів денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”, спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”)

Відповідальний за випуск: С.О. Станішевський
Редактор: М.З. Аляб’єв

План 2010, поз. 135 М

Підп. до друку — Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі — Ум..-друк. арк 4,5
Тираж 10 пр. — Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи: ДК №731 від 19.12.2001