

Формирование базовых компетенций студентов технического университета

НОЦ 4

**М.А.Вигура, О.А.Кеда, А.Ф.Рыбалко,
Н.М.Рыбалко, А.Б.Соболев**

**Математика
Поточная практика 7.5
Аналитическая геометрия
Поверхности второго порядка**

**УГТУ-УПИ
2007г.**

Цель занятия:

1. Овладеть соответствующим математическим аппаратом для дальнейшего изучения курса математики, демонстрировать и использовать математические методы в ходе изучения специальных дисциплин для будущей профессиональной деятельности.
2. Запомнить канонические уравнения поверхностей и демонстрировать способность изобразить эллипсоид, гиперболоиды и параболоиды по их сечениям.

Формируемые компетенции по ФГОС:

ОНК1: способность и готовность использовать фундаментальные математические законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и теоретического исследования.

ИК1: способность использовать современные средства вычислительной техники, коммуникаций и связи.

ИК4: готовность работать с информацией из различных источников (сбор, обработка, анализ, систематизация, представление).

СЛК3: способность самостоятельно приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

Поверхности второго порядка



Поверхности второго порядка

1. Теоретическая

часть

2. Задачи

3. Решения задач

Оглавление



Поверхности второго порядка

Оглавление:

1. Эллипсоид

2. Гиперболоиды

-Однополостный гиперболоид

-Двуполостный гиперболоид

3. Конус

4. Параболоиды

-Эллиптический параболоид

-Гиперболический параболоид

5. Цилиндры

-Эллиптический

-Гиперболический

-Параболический

6. Пары плоскостей

-пересекающихся

-параллельных

-сливающихся

7. Поверхности



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Задача №:

1	11
2	12
3	13
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Решение задачи №:

1	11
2	12
3	13
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

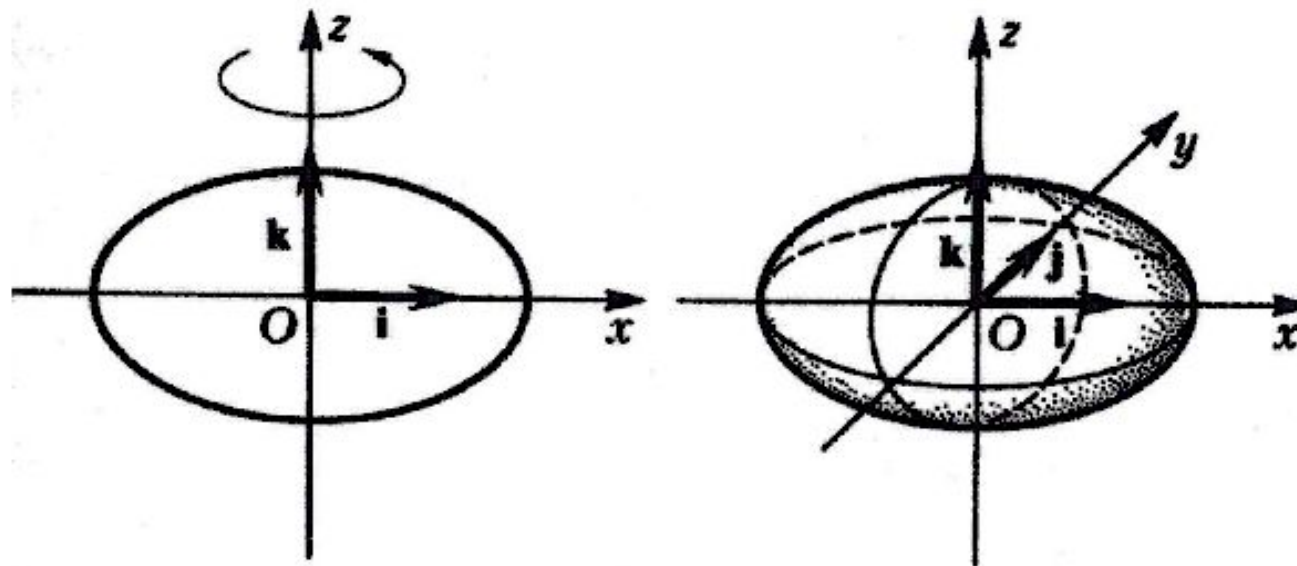


Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

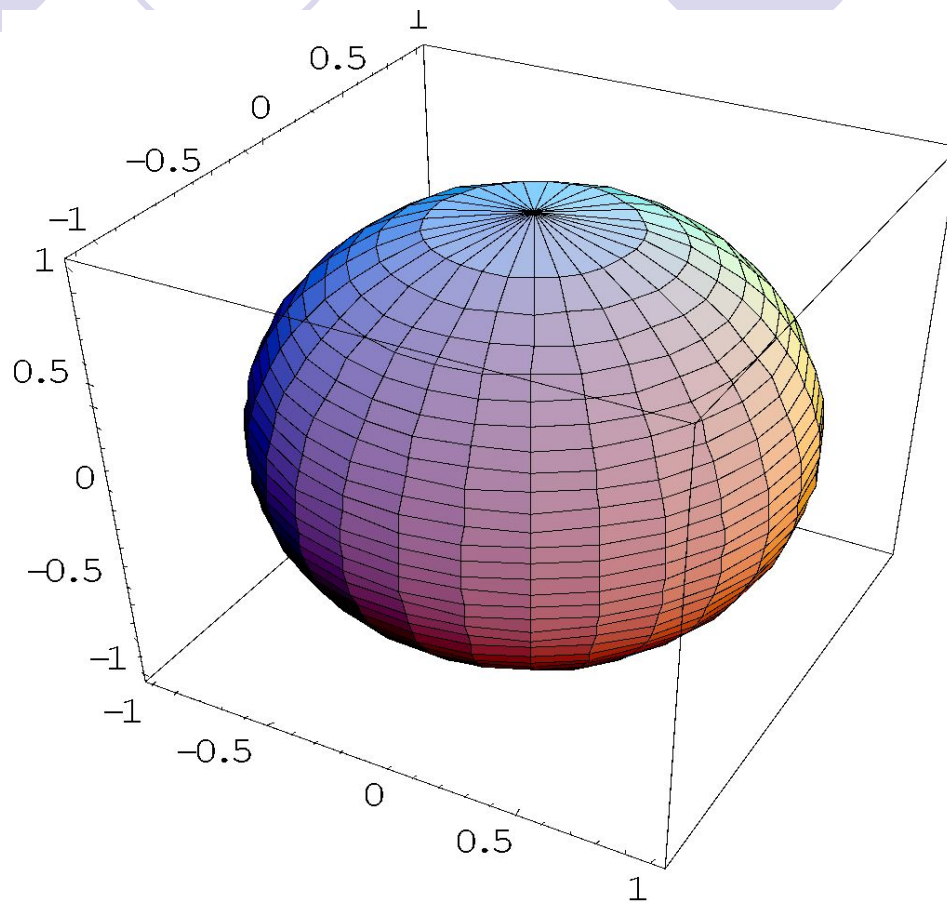
1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)



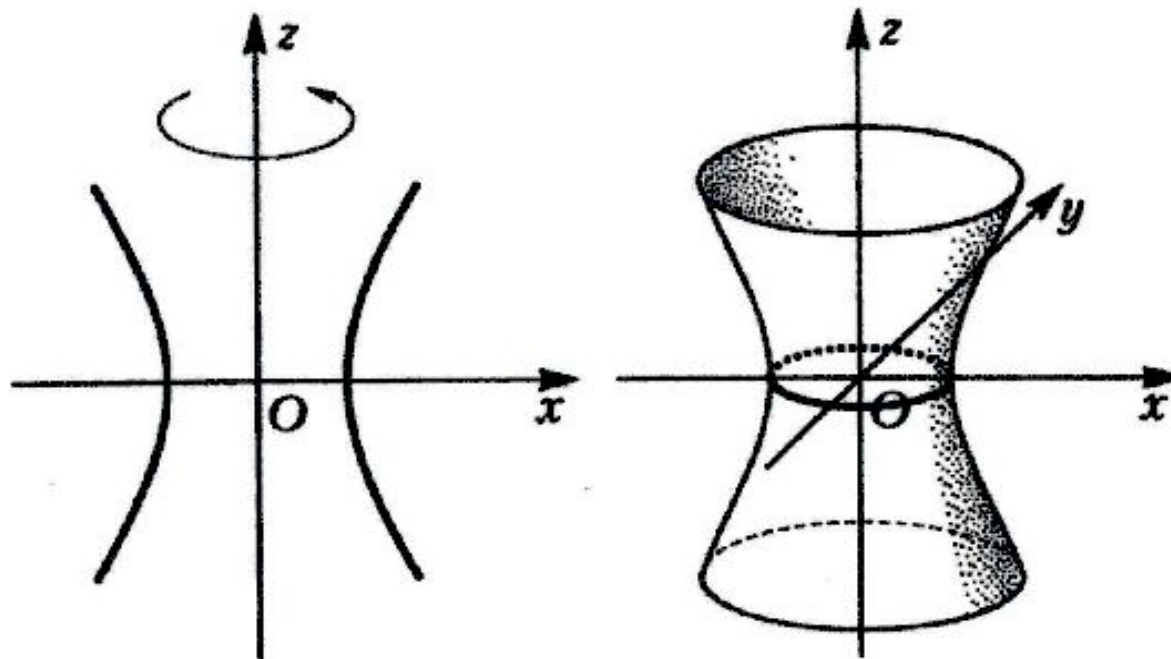
Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

2. Гиперболоиды

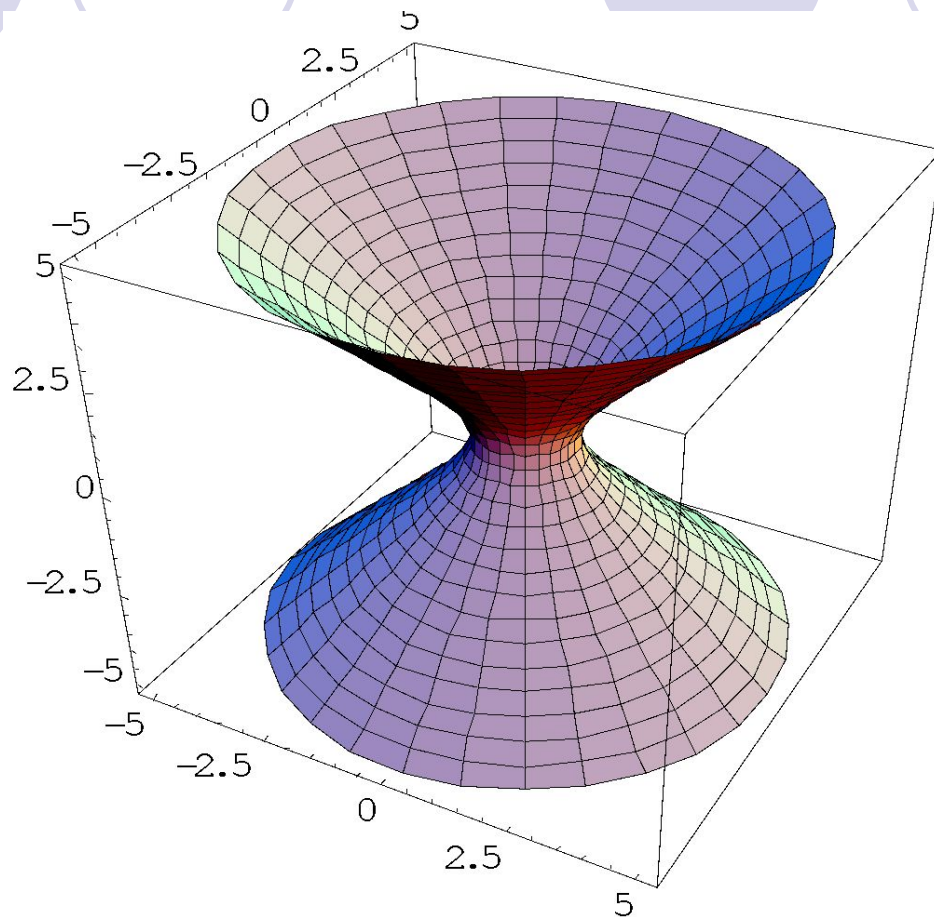
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

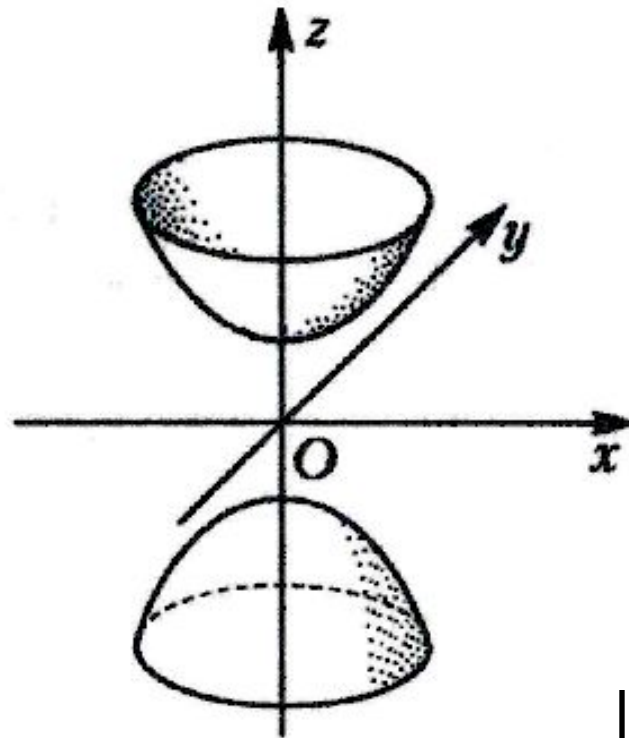
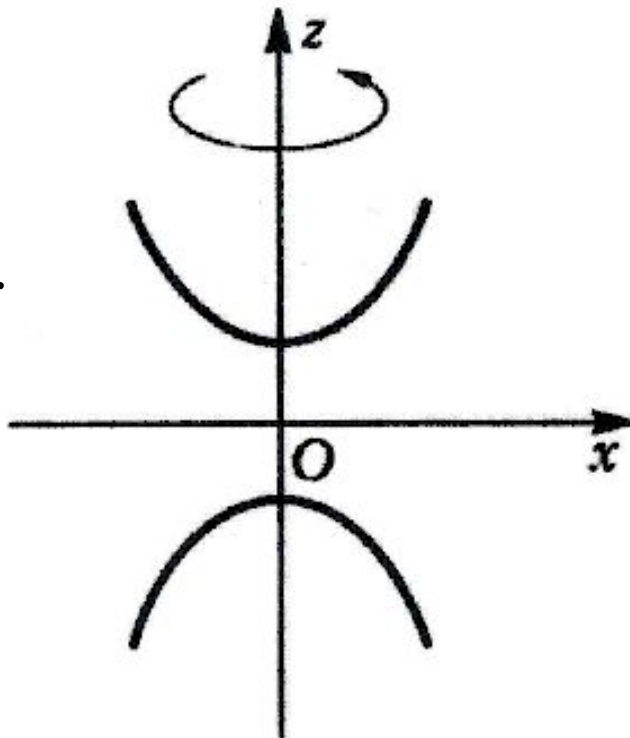


Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

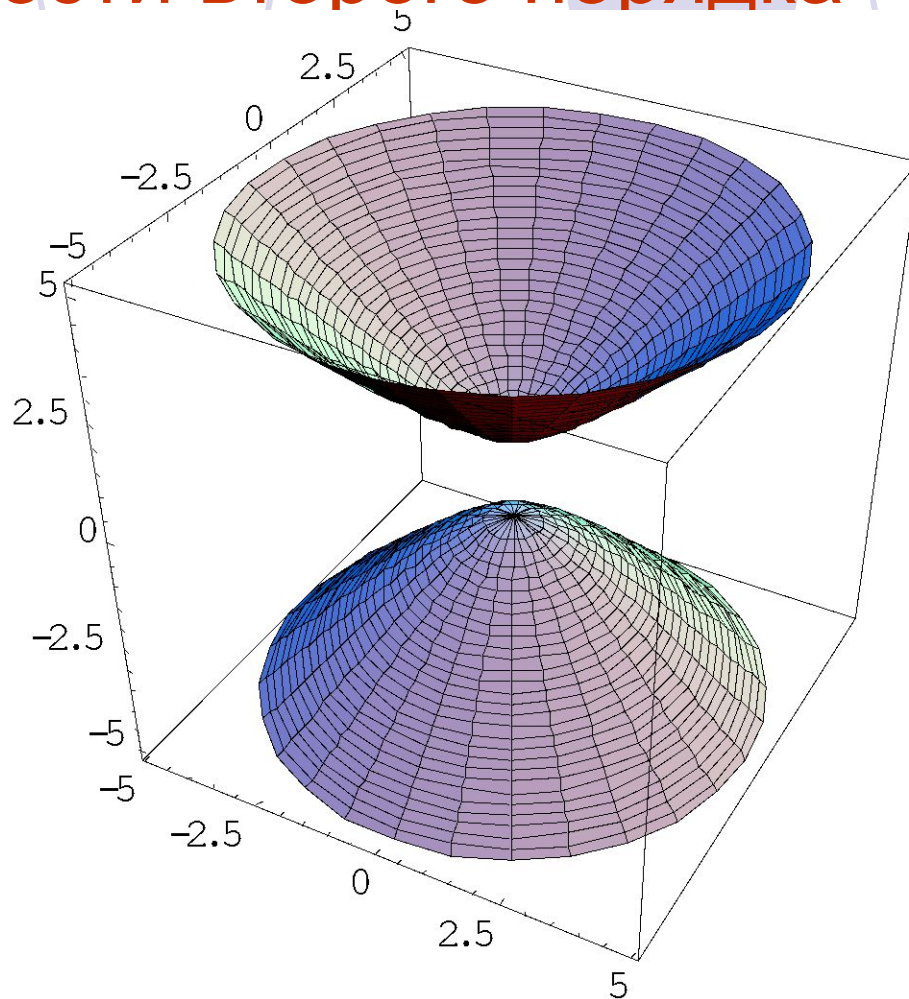
Двулостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

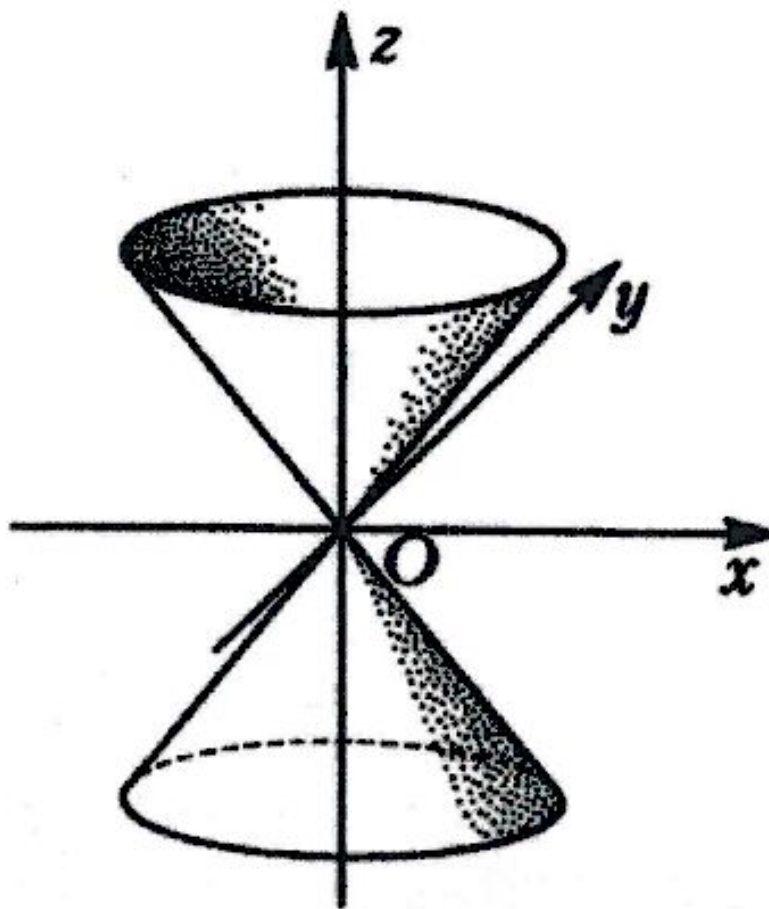


Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

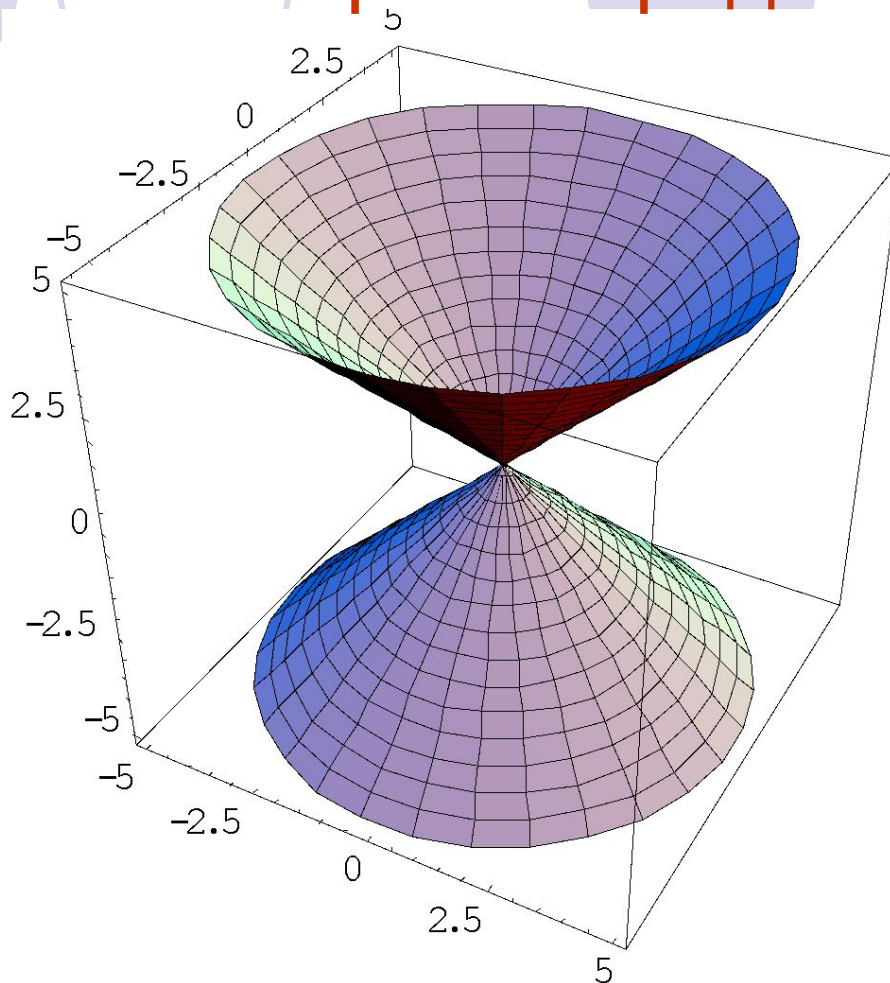
3. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)



Поверхности второго порядка

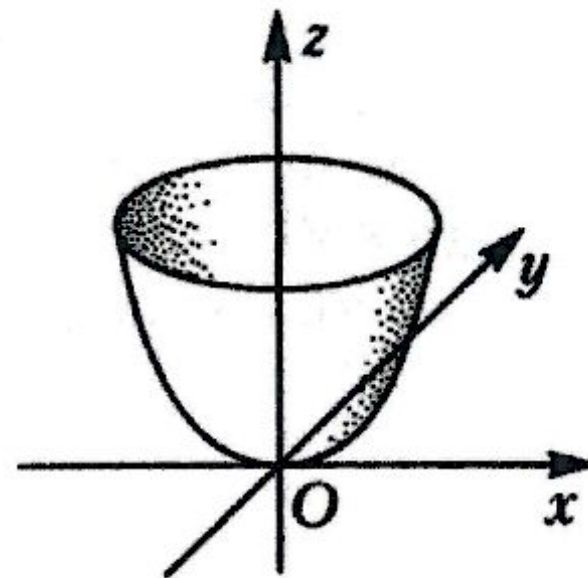
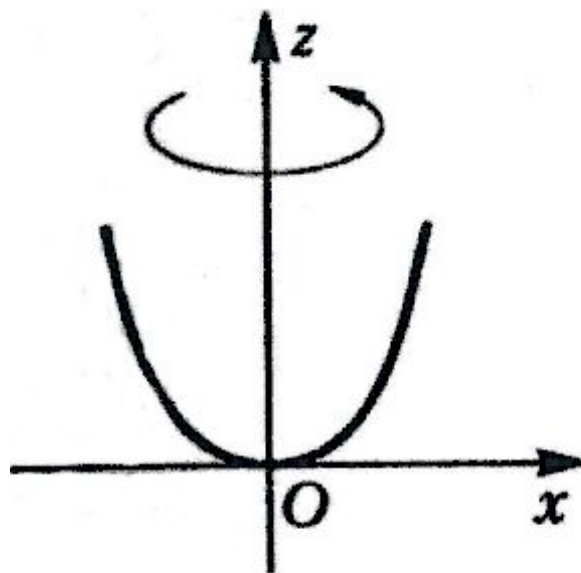
[Оглавление:](#)

4.Параболоиды

Эллиптический параболоид

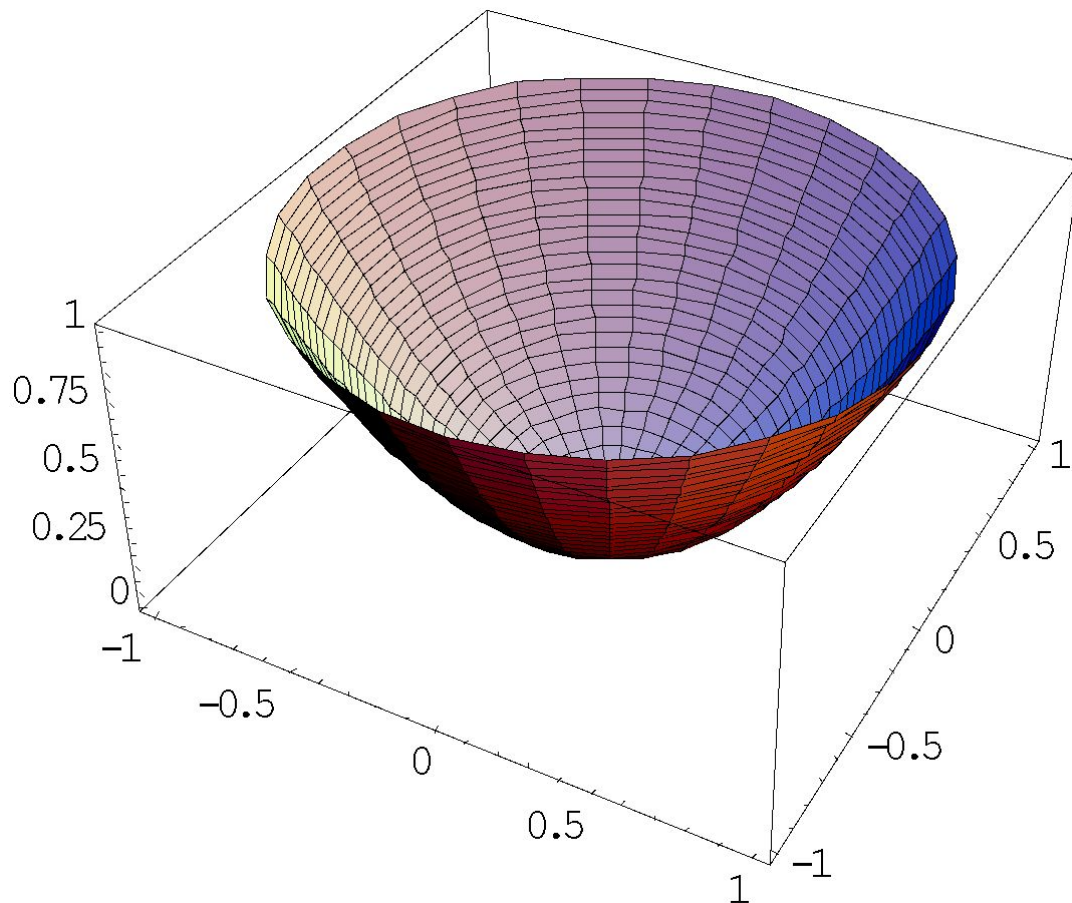
$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

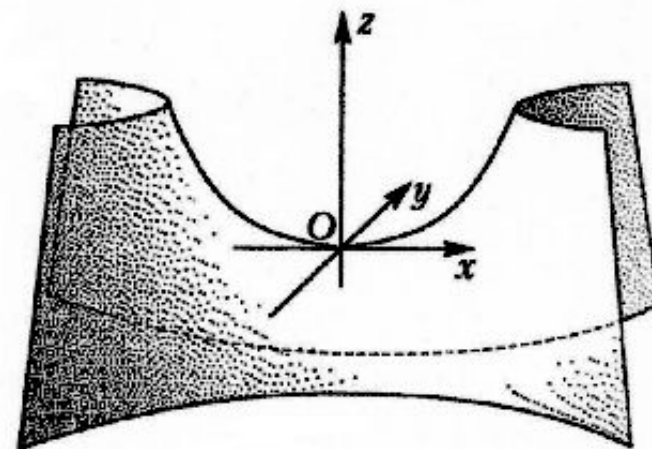
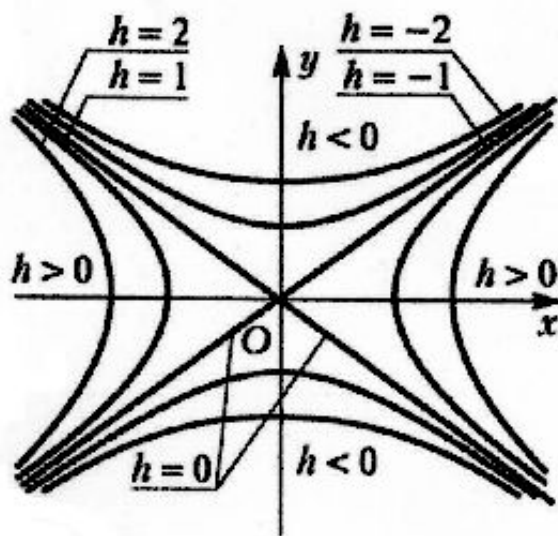


Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$



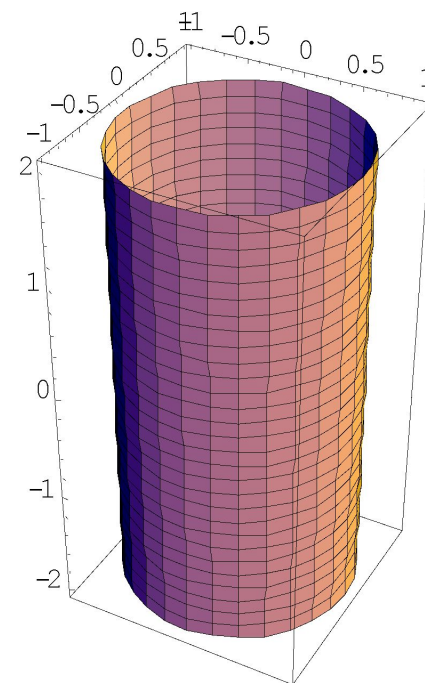
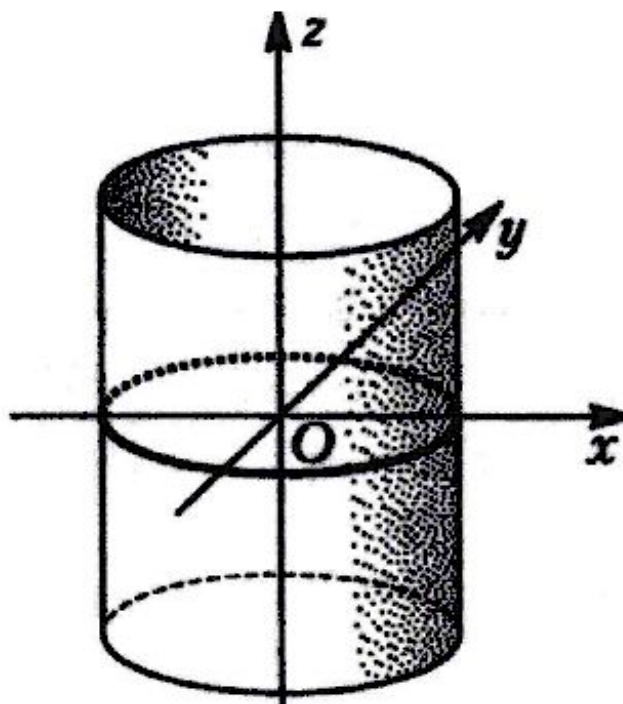
Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

5. Цилиндры

эллиптический

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



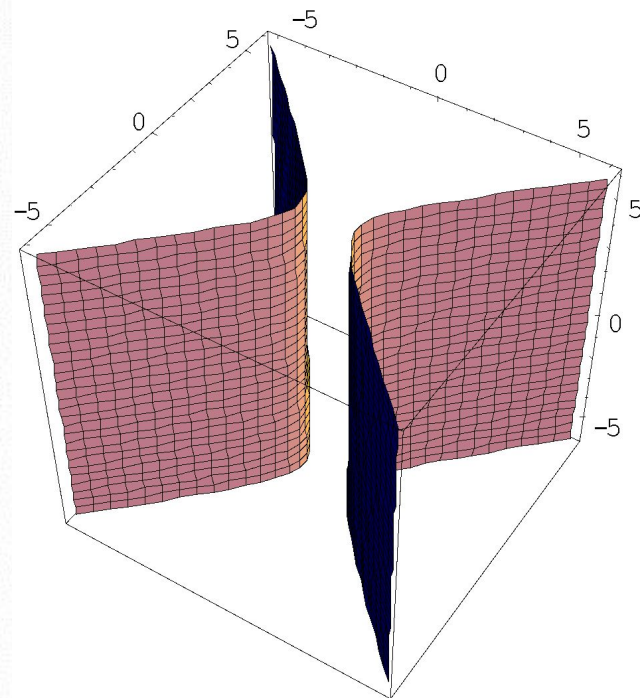
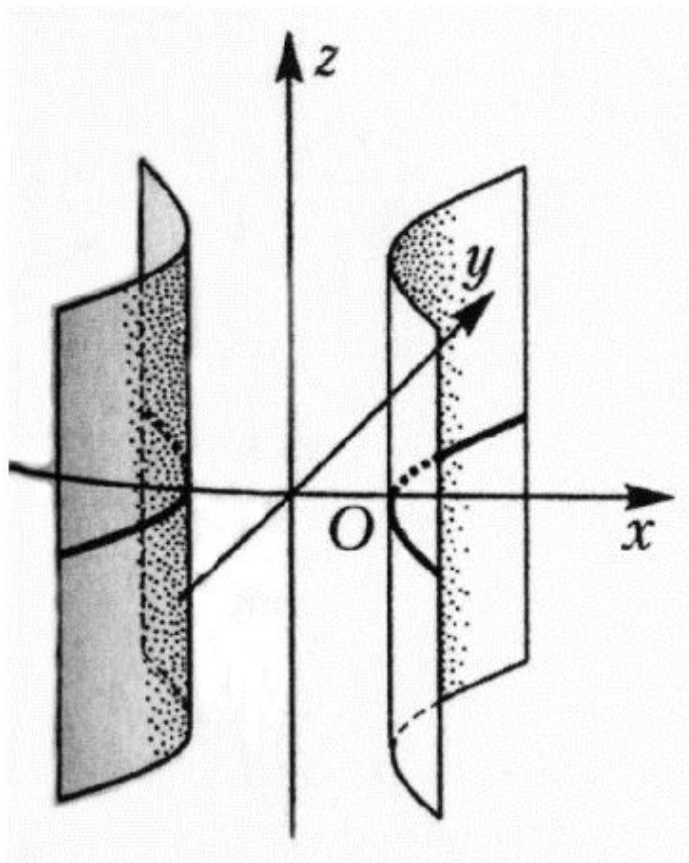
Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

5. Цилиндры

гиперболический

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

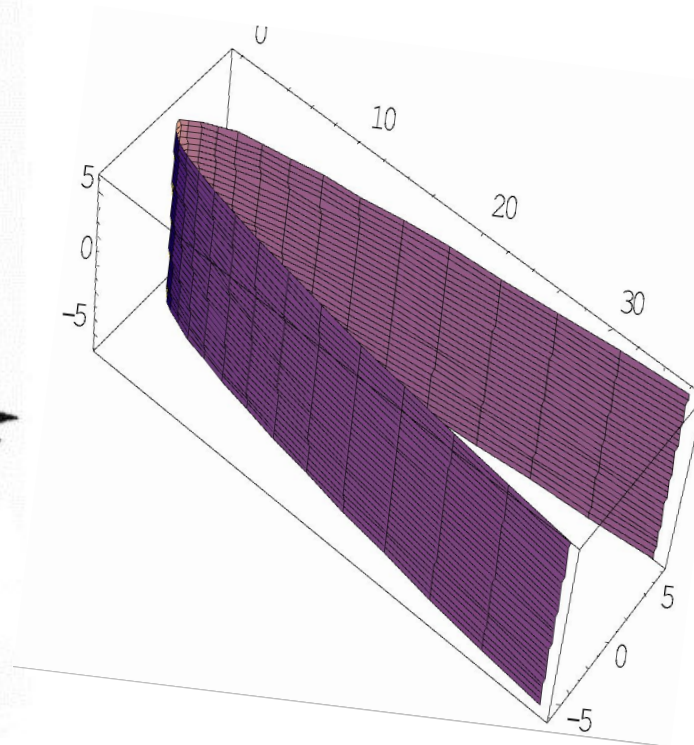
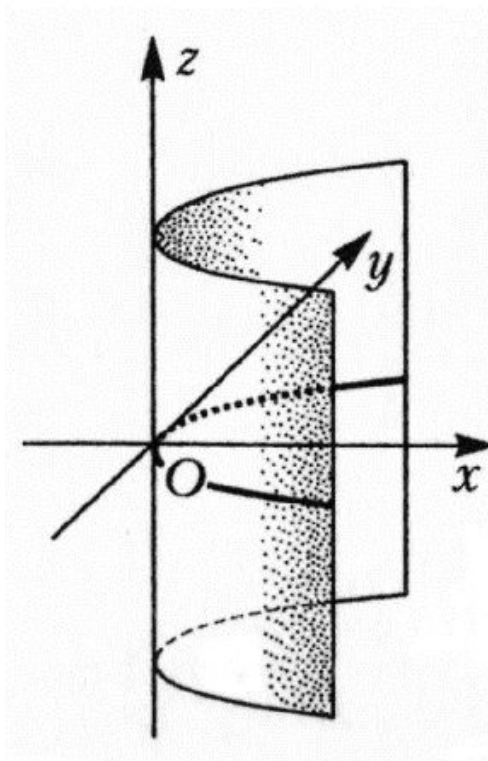


Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

параболический

$$y^2 = 2px$$

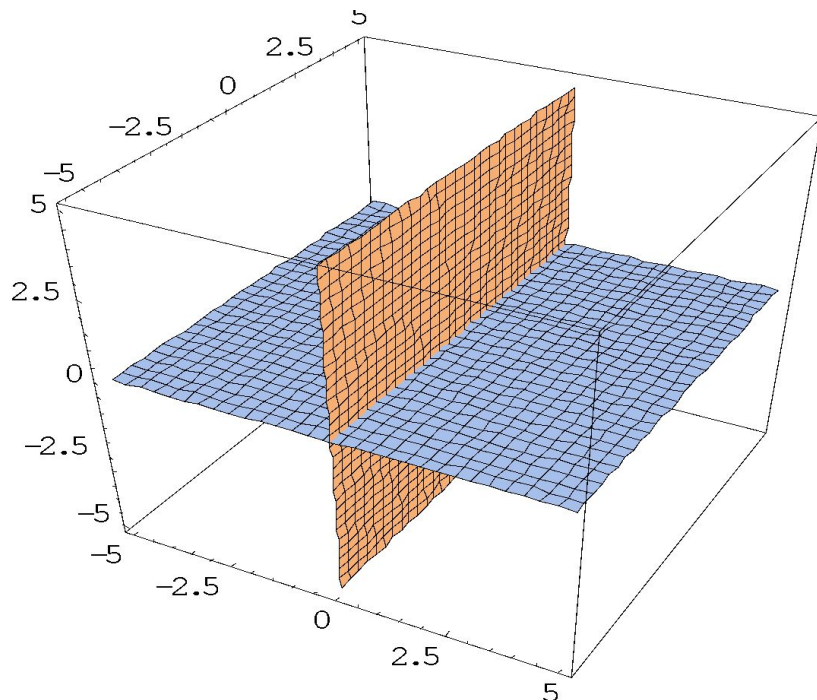


Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

6. Пары плоскостей

пара пересекающихся плоскостей



$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

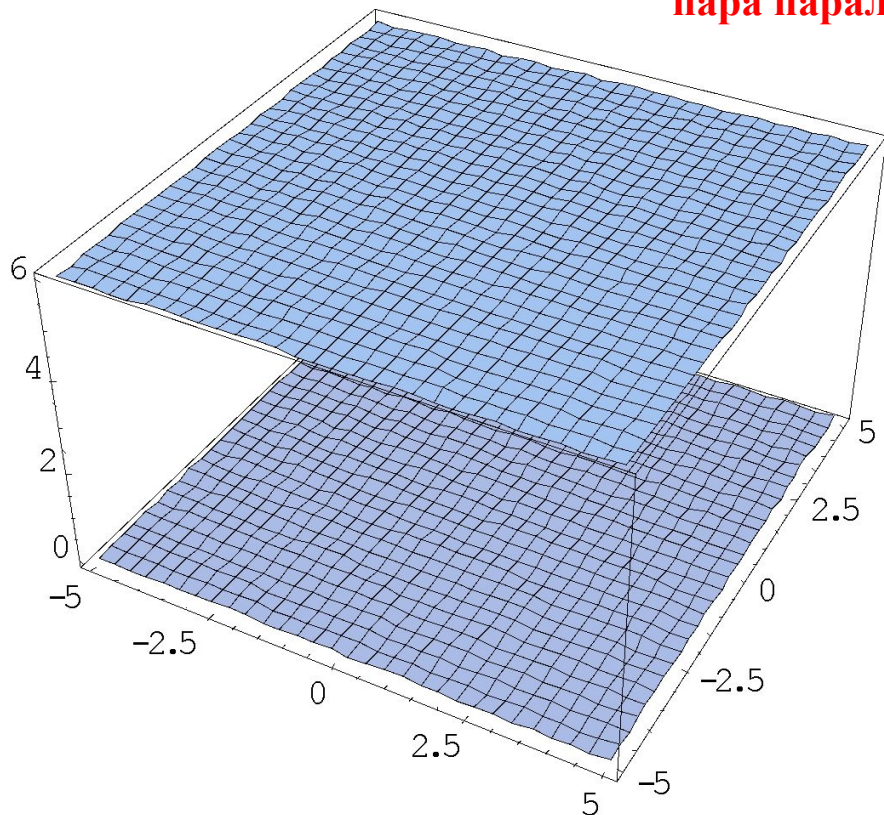


Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

6. Пары плоскостей

пара параллельных плоскостей

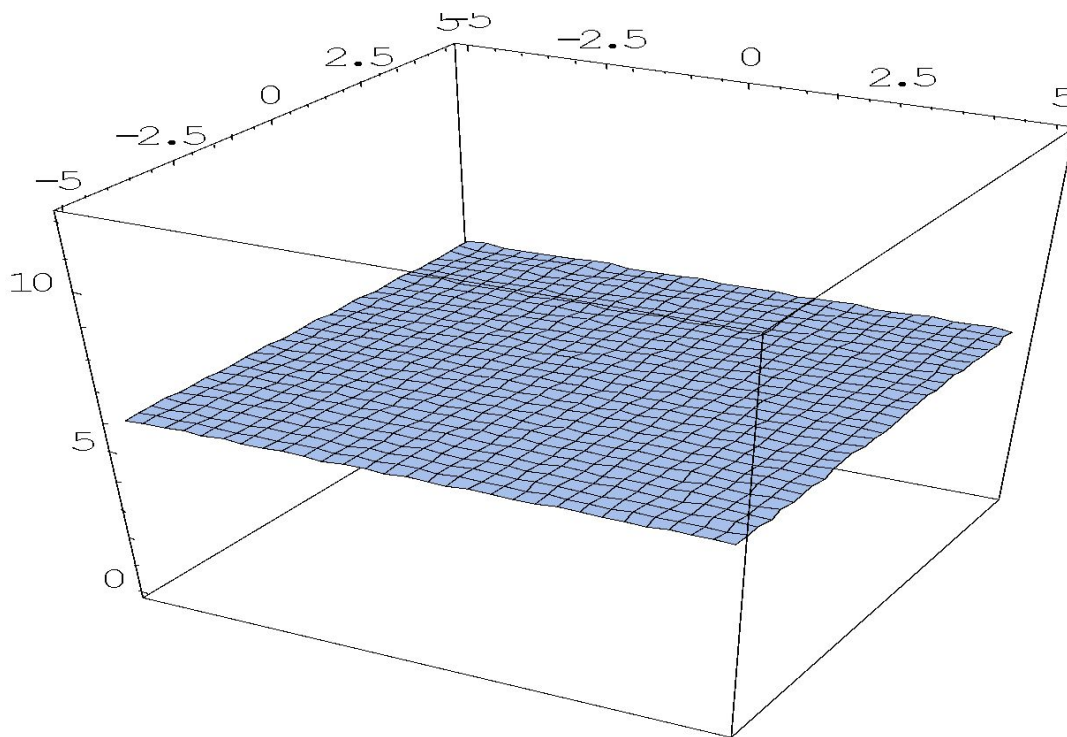


Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

6. Пары плоскостей

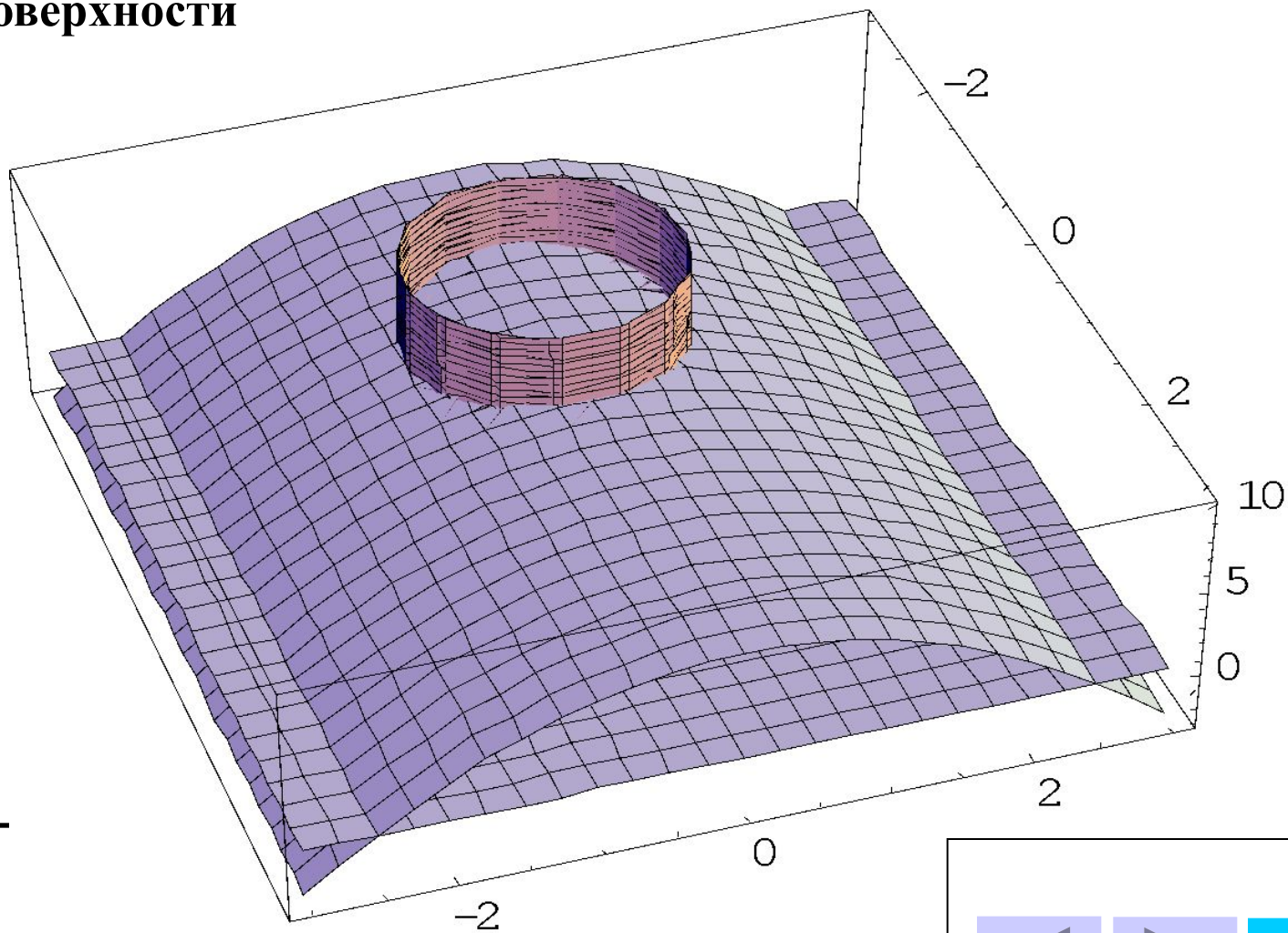
пара сливающихся плоскостей



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

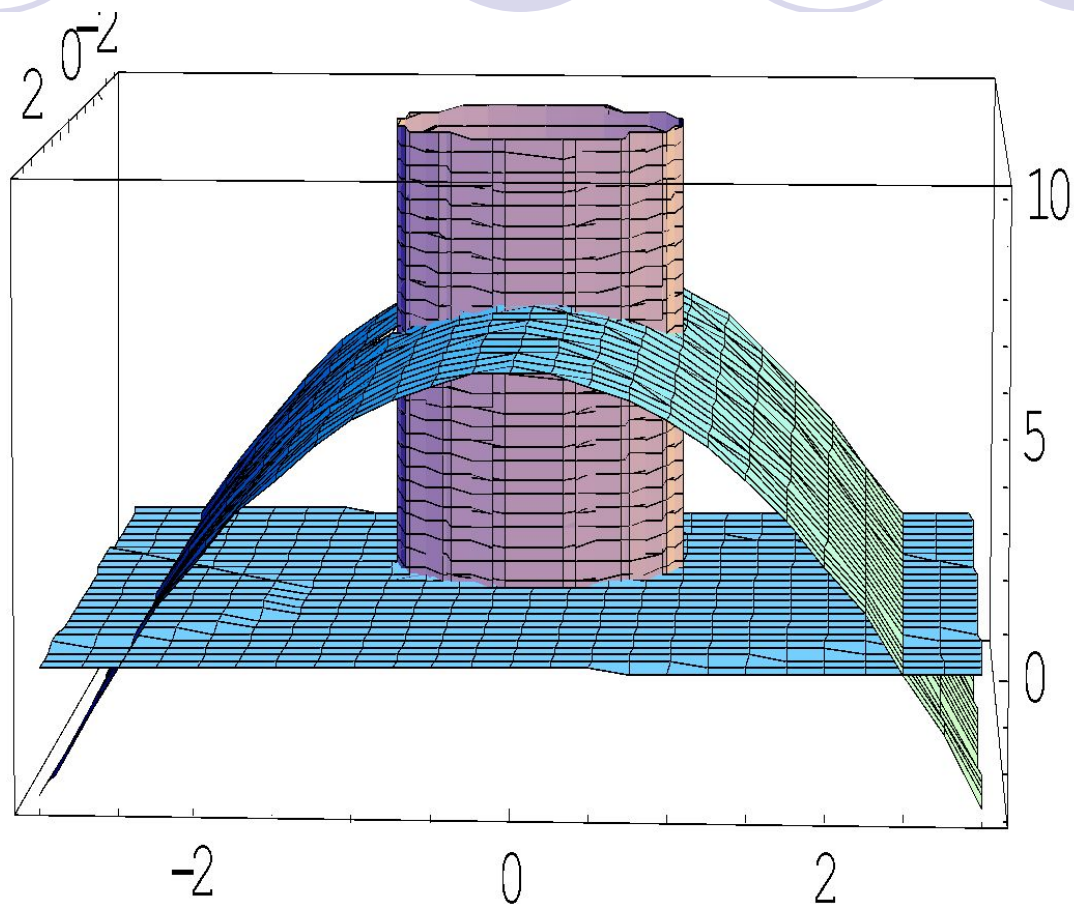
7. Поверхности



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

7. Поверхности



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

7. Поверхности



Броненосец



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

7. Поверхности



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

7. Поверхности



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Установите тип поверхности, заданной уравнением

$$x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0.$$

Задача 1

Ответ: Двуполостный гиперболоид

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Установите тип поверхности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z = 2$$

Задача 2

Ответ: Параболоид

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Установите тип указанной поверхности и постройте ее:

$$1. x^2 + y^2 - z + 2 = 0$$

$$2. x^2 + y^2 = 0$$

$$3. x^2 - y^2 = 0$$

$$4. x^2 = 1$$

$$5. x^2 + z^2 = 0$$

Задача 3

Ответ:

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Составьте уравнения проекций на координатные плоскости сечения эллиптического параболоида

$$x = y^2 + z^2$$

ПЛОСКОСТЬЮ

$$x + 2y - z = 0.$$

Задача 4

Ответ:

$$x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$$
$$x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$$
$$y^2 + z^2 + 2y - z = 0$$

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Составьте уравнение поверхности, образованной вращением кривой

$$\begin{cases} z = x^2, \\ y = 0 \end{cases}$$

вокруг оси OX .

Задача 5

Ответ: $y^2 + z^2 = x^4$.

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Найдите общие точки поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 67 = 0$$

и прямой

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}.$$

Задача 6

Ответ: Нет

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Найдите общие точки поверхности $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z$ и плоскости

$$3x - y + 6z - 14 = 0.$$

Задача 7

Ответ: $\frac{4(x+1.5)^2}{67} + \frac{2(y-1)^2}{67} = 1$

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Составьте уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $l = \{2; -3; 4\}$, а направляющая задана уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1. \end{cases}$$

Задача 8

Ответ: $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z = 131$.

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Составьте уравнение конуса с вершиной в точке $S(0;0;5)$ и направляющей

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

Задача 9

Ответ: $\frac{X^2}{4} + Y^2 = \frac{(z-5)^2}{25}$

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Найдите общие точки поверхности

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z$$

и плоскости

$$3x - y + 6z - 14 = 0$$

Задача 10

Ответ: $\frac{4(x+1.5)^2}{67} + \frac{2(y-1)^2}{67} = 1$

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Составьте уравнение сферы с центром в точке $(3, -5, -2)$, если плоскость $2x - y - 3z + 11 = 0$ касается сферы.

Задача 11

Ответ: $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = 56$

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Составьте уравнение сферы, проходящей через точки $M_1(3,1,-3)$
 $M_2(-2,4,1)$, $M_3(-5,0,0)$, центр которой лежит на плоскости

$$2x + y - z + 3 = 0.$$

Задача 12

Ответ: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 49$

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Методом сечений исследуйте поверхность, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4.$$

Задача 13

Ответ: Однополостный гиперболоид вращения

[Решение:](#)



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Перенесем константу в правую часть уравнения и разделим обе части уравнения на число 4.

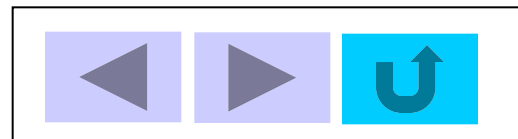
Получим

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{4} = -1.$$

Это уравнение задает двуполостный гиперболоид вращения с осью OY .

Решение [задачи 1](#)

Ответ: Двуполостный гиперболоид



Поверхности второго порядка

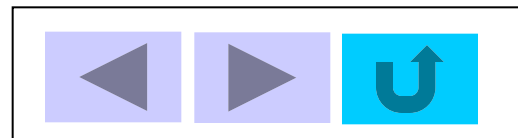
[Оглавление:](#)

$$x^2 + y^2 + z = 2, \quad x^2 + y^2 = -(z - 2)$$

параболоид вращения с осью OZ ,
вершина которого находится в точке $(0;0;2)$,
выпуклость обращена вверх.

Решение [задачи 2](#)

Ответ: Параболоид



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

- 1) параболоид вращения;
- 2) ось oz ;
- 3) две пересекающиеся плоскости $x = \pm y$;
- 4) две плоскости $x = \pm 1$, параллельные плоскости zoy ;
- 5) круговой цилиндр с образующей, параллельной оси oy .

Решение [задачи 3](#)

Ответ:



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Сечение параболоида плоскостью задается системой уравнений:

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

Этой системе соответствует некоторая линия в пространстве. Чтобы найти проекцию этой линии на координатную плоскость OXY , следует исключить из этой системы переменную z , в результате получаем

$$x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0.$$

Аналогично находятся остальные проекции:

на плоскость OXZ : $x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$,

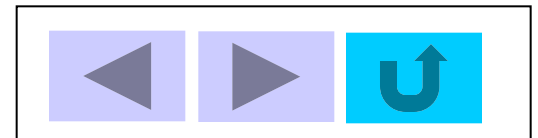
на плоскость OYZ : $y^2 + z^2 + 2y - z = 0$.

Решение [задачи 4](#)

$$x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$$

Ответ: $x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$

$$y^2 + z^2 + 2y - z = 0$$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

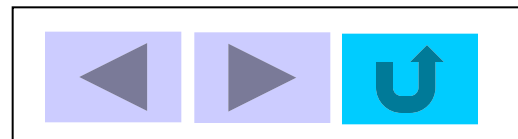
Сечение искомой поверхности плоскостью $x = x_0$, перпендикулярной оси вращения - окружность с центром в точке $C(x_0, 0, 0)$ и радиусом $R = z(x_0)$:

$$y^2 + z^2 = x_0^4.$$

Для произвольного x_0 получаем уравнение поверхности вращения $y^2 + z^2 = x^4$.

Решение [задачи 5](#)

Ответ: $y^2 + z^2 = x^4$.



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 67 = 0,$$

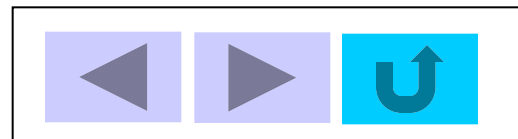
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9^2 - \text{сфера.}$$

$$L: \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 3t, \\ y = 2t, \\ z = -25 - 2t. \end{cases}$$

Подстановка этих значений переменных в уравнение поверхности приводит к квадратному уравнению для t с отрицательным дискриминантом. Следовательно, действительных значений t не существует, и поверхность не имеет общих точек с прямой, которая проходит вне сферы.

Решение [задачи 6](#)

Ответ: Нет



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Общие точки поверхностей:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z, \\ 3x - y + 6z - 14 = 0 \end{cases}$$

Приравнивая значения $2z$ из этих уравнений, получим

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = \frac{y}{3} - x + \frac{14}{3}.$$

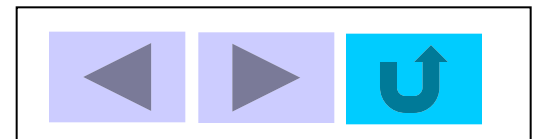
Выделим полные квадраты, получим уравнение эллипса

$$\frac{4(x+1.5)^2}{67} + \frac{2(y-1)^2}{67} = 1$$

- линию пересечения эллиптического параболоида и плоскости.

Решение [задачи 7](#)

Ответ:
$$\frac{4(x+1.5)^2}{67} + \frac{2(y-1)^2}{67} = 1$$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Если $M(x; y; z)$ - произвольная точка прямой, а $N(X; Y; I)$ – фиксированная точка направляющей, через которую проходит прямая, называемая образующей.

Множество точек искомой поверхности образовано точками, лежащими на прямых, проходящих через точку направляющей параллельно вектору l .

Канонические уравнения этих прямых:

$$\frac{x-X}{2} = \frac{y-Y}{-3} = \frac{z-1}{4} \Rightarrow X = \frac{1}{2}(1 + 2x - z), Y = \frac{1}{4}(-3 + 4y + 3z).$$

Подставим эти выражения в уравнение $X^2 + Y^2 = 9$, которому удовлетворяют координаты точек направляющей, получим уравнение цилиндрической поверхности:

$$16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z = 131.$$

Решение [задачи 8](#)

Ответ: $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z = 131.$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка прямой, а $N(X;Y;0)$ - фиксированная точка направляющей, через которую проходит прямая, называемая образующей.

Множество точек искомой поверхности образовано точками, лежащими на прямых, проходящих через некоторую точку направляющей и точку S .

Составим канонические уравнения этих прямых

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z-5}{-5} \Rightarrow X = -\frac{5x}{z-5}, Y = -\frac{5y}{z-5}.$$

Подставим эти выражения в уравнение направляющей

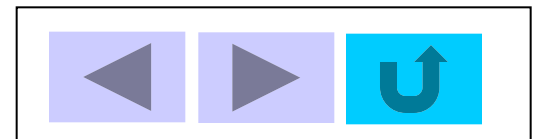
$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1,$$

получим искомое уравнение конической поверхности:

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = \frac{(z-5)^2}{25}.$$

Решение [задачи 9](#)

Ответ: $\frac{X^2}{4} + Y^2 = \frac{(z-5)^2}{25}$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Общие точки поверхностей удовлетворяют

$$\text{системе } \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z, \\ 3x - y + 6z - 14 = 0, \end{cases}$$

Приравнивая значения $2z$, выраженные из этих уравнений, получим, что $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = \frac{y}{3} - x + \frac{14}{3}$.

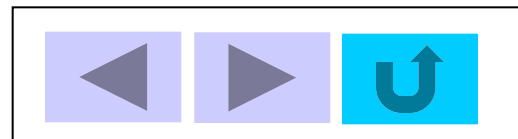
Выделение полных квадратов переменных приводит к уравнению эллипса

$$\frac{4(x + 1,5)^2}{67} + \frac{2(y - 1)^2}{67} = 1, \text{ который является линией}$$

пересечения эллиптического параболоида и плоскости.

Решение [задачи 10](#)

Ответ: $\frac{4(x + 1,5)^2}{67} + \frac{2(y - 1)^2}{67} = 1$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Расстояние от центра сферы до касательной плоскости равно радиусу сферы:

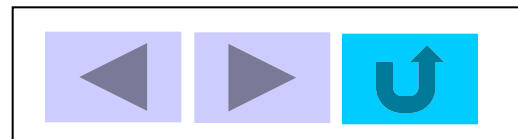
$$R = \frac{|3 \cdot 2 - (-5) - 3(-2) + 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}.$$

Уравнение сферы:

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = 56.$$

Решение [задачи 11](#)

Ответ: $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = 56$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Уравнение сферы: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

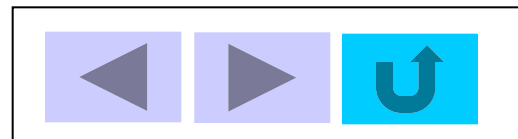
$M_1(3, 1, -3), M_2(-2, 4, 1), M_3(-5, 0, 0) \in S$:

$$\begin{cases} (3 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 + (-3 - z_0)^2 = R^2, \\ (-2 - x_0)^2 + (4 - y_0)^2 + (1 - z_0)^2 = R^2, \\ (-5 - x_0)^2 + (0 - y_0)^2 + (0 - z_0)^2 = R^2, \\ 2x_0 + y_0 - z_0 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 6x_0 - 2y_0 + 6z_0 + 19 = R^2, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 4x_0 - 8y_0 - 2z_0 + 21 = R^2, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 10x_0 + 25 = R^2, \\ 2x_0 + y_0 - z_0 + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение [задачи 12](#)

Ответ: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 49$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Вычитая из третьего уравнения второе и из второго первое, для координат центра сферы получаем равносильную систему

$$\begin{cases} 3x_0 + 4y_0 + z_0 = -2, \\ 5x_0 - 3y_0 - 4z_0 = -1, \\ 2x_0 + y_0 - z_0 = -3, \end{cases}$$

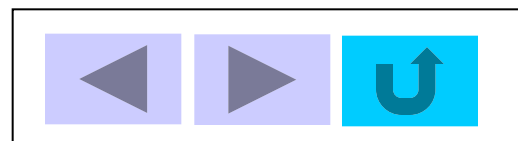
откуда $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = 3$ и $R = 7$.

Уравнение сферы

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 49.$$

Решение [задачи 12](#)

Ответ: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 49$



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2 + 4$$

Рассмотрим сечения поверхности плоскостями $z = h$.

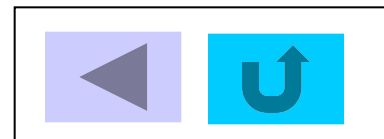
В сечении получаются окружности с центром на оси Oz и радиусом $R = \sqrt{h^2 + 4}$.

Поверхность является поверхностью вращения вокруг оси Oz , точки поверхности существуют при любых значениях z .

Рассмотрим осевое сечение плоскостью Oxz ($y = 0$): $x^2 - z^2 = 4$.

Решение [задачи 13](#)

Ответ: Однополостный гиперболоид вращения



Поверхности второго порядка

[Оглавление:](#)

Приведем к каноническому виду

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{– уравнение гиперболы,}$$

Ox – действительная ось, Oz – мнимая ось.

Поверхность получена вращением гиперболы относительно ее мнимой оси, представляет однополостный гиперболоид вращения (Oz – ось симметрии, Oxy – плоскость симметрии).

Решение [задачи 13](#)

Ответ: Однополостный гиперболоид вращения



В результате студент должен уметь

строить поверхности второго порядка по их параллельным сечениям.

Перечень источников, список дополнительной литературы по теме.

1. Сборник задач по математике для вузов: В 4 ч. Ч. 1: Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры / А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин, И. Б. Кожухов и др. / Под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2003. - 288 с.: ил.; 21 см. - ISBN 5-940520-34-0.
2. Клетеник, Давид Викторович. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для студентов вузов / Под ред. Н.В. Ефимова. - 15-е изд. - М.: Наука. Физматлит, 1998. - 223с. - ISBN 5-02-015080-0.
3. Данко, Павел Ефимович. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов: В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М.: ОНИКС 21 век : Мир и образование, 2003. - 304с.: ил.; 22 см. - ISBN 5-329-00326-1.
4. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры: Сб. комплектов вариантов задач по курсу "Высшая математика". Ч. 1 / Урал. гос. техн. ин-т; Сост. О. А. Белослудцев, М. А. Вигура, Н. В. Кожевников, А. Ф. Рыбалко и др. ; Науч. ред. С. И. Машаров. - Екатеринбург: УГТУ, 1997. - 110 с. - ISBN 5-230-17046-8.