# Теория вероятносте й

# Теория вероятностей

Введение

Основные комбинаторные объекты

Элементы теории вероятности

# Основные комбинаторные объекты

Задачи в которых производится подсчет всех возможных комбинаций составленных по некоторому правилу, называются комбинаторными. Раздел математики занимающийся их решением называется комбинаторикой.

Правило умножения

Размещения

Правило сложения

Перестановка

Сочетания

# Элементы теории вероятности

Основные понятия теории вероятностей

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Повторение испытаний

# Основные понятия теории вероятностей

Случайные события. Операции над событиями

Классическая формула вероятности

Статистическая и геометрическая вероятности

# Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей

Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Формула полной вероятности. Формула Байеса

# Повторение испытаний

Формула Бернулли

Асимптотические формулы

# Введение

Теория вероятностей возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат детерминированные закономерности, теория вероятностей изучает эти закономерности.

Математическая статистика это наука изучающая методы обработки результатов наблюдения массовых случайных явлений, обладающих статистической устойчивостью, с целью выявления эт закономерностей

# Правило умножения

Если требуется выполнить одно за другим какие то К действий при чем 1 действие можно выполнить $a_1$ способами, 2 действие – $a_2$ способами, и так до К-го действия , которое можно выполнить $a_к$ способами, то все К действий вместе могут быть выполнены $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_к$ способами.

4 мальчика 4 девочки садятся на 8 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки – на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать ?

Первый мальчик может сесть на любое из четырех четных мест, второй - на любое из оставшихся трех мест, третий – на любое оставшихся двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу умножения, мальчики могут занять четыре места $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=24$ способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Таким образом, согласно правилу умножения, мальчики и девочки могут занять все стулья $24 \cdot 24=576$ способами.

# Правило сложения

Если два действия взаимно исключают друг друга, при чем одно из них можно выполнить m способами, а другое – n способами, то выполнить одно любое из этих действий можно m+n способами.

Это правило легко распространить на любое конечное число действий

# Размещения

Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное подмножество из m элементов множества, состоящего из n различных элементов

## Теорема: число размещений из n по m равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример задачи

1) В журнале 10 страниц , необходимо на страницах поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать , если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии ?

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{сп}$$

2)Сколько можно записать четырехзначных чисел , используя без повторения все десять цифр?

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{сп}$$

$$A_{9}^{3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504_{сп}$$

$$Ответ : 5040 - 504 = 4536_{способов}$$

назад

# Перестановки

Перестановкой из n элементов называется любое упорядоченное множество, в которое входят по одному разу все n различных элементов данного множества

Теорема: Число перестановок n различных элементов равно n!

$$P_n = n!$$

Пример задачи

1) Записать все возможные перестановки для чисел 3,5,7

3,5,7 ; 3,7,5 ; 5,3,7 ; 5,7,3 ; 7,3,5 ; 7,5,3

2) Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

$$P_6 = 6! = 720$$

$$P_4 = 4! = 24$$

$$P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$$

назад

# Сочетания

Сочетанием из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n различных элементов

Теорема: Число сочетаний из n по m равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример задачи

Следствие: Число сочетаний из n элементов по n-m равно числу сочетаний из n элементов по m

$$C_n^{m-n} = C_n^m$$

1) Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров , что бы среди них были 3 черных ?

Решение: среди выбранных шаров 4 белых и 3 черных.

$$C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}=210$$ Способов выбора былых шаров

$$C_{5}^{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$$ Способов выбора черных шаров

По правилу умножения искомое число способов равно

$$C_{10}^{4}\cdot C_{5}^{3}=2100$$

2) Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более 5 , а во второй- не более 9 человек ?

$$C_{12}^{3}=220$$ Подгруппа из 3 человек

$$C_{12}^{4}=495$$ Подгруппа из 4 человек

$$C_{12}^{5}=792$$ Подгруппа из 5 человек

Выбор первой подгруппы однозначно определяет вторую, по правилу сложения искомое число способов равно:

$$C_{12}^{3}+C_{12}^{4}+C_{12}^{5}=1507$$

назад

# Случайные события. Операции над событиями

Событие- явление , которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий. Осуществление комплекса условий называется опытом или испытанием. Событие- результат испытания.

Случайным событием называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания ( при бросании монеты может выпасть орел , а может и не выпасть).

Достоверным событием называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания ( извлечение белого шарика из ящика с белыми шарами).

Невозможным считается событие, которое не может произойти в результате данного испытания( извлечение черного шарика из ящика с белыми шарами).

# Случайные события

Событие А называется благоприятствующим событию В , если появление события А влечет за собой появление события В.

События А и В называются не совместными, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого ( испытание: стрельба по мишени ; А-выбивание четного числа очков; В- не четного).

События А и В называются совместным, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого( А- в аудиторию вошел учитель; В- вошел студент).

назад далее

# Случайные события

Два события А и $\overline{A}$ называются противоположными, если не появление одного из них в результате испытания влечет появление другого( $\overline{A}$ отрицание А).

Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется полной группой событий.

События называются равновозможными , если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое ( А-орел; В-решка).

# Операции над событиями

**Суммой** нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Пример: в ящике находится красный, черный и белый шары.

А- извлечение черного шара

В- извлечение красного шара

С- извлечение белого шара

А+В – извлечен черный или красный шар

В+С – извлечен красный или белый шар

А+С – извлечен черный или белый шар

# Операции над событиями

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Пример: происходят следующие события:

A- из колоды карт вынута "дама"

B- вынута карта пиковой масти

A·B – событие – вынута карта "дама пик"

назад

# Классическая формула вероятности

Вероятность события- это численная мера объективной возможности ее появления. Если имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий, то вероятность P(A) наступления события A вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания.

$$P(A)=\frac{M}{N}$$

N – число всех исходов испытания

M – число исходов благоприятствующих событию A

Пример задачи

Свойство вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна 1

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{N}{N}=1$$

2) Вероятность невозможного события равна 0

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{0}{N}=0$$

3) Вероятность события A удовлетворяет двойному неравенству

$$0\le P(A)\le 1$$

1) В ящике 4 черных и 6 белых шаров, извлекают 1 шар , какова вероятность что шар будет белым, черным ?

N=10; M=6; A- Извлечение белого шара $P(A)=\frac{6}{10}=0,6$

N=10; M=4; A- Извлечение черного шара $P(A)=\frac{4}{10}=0,4$

2) В ящике 10 шаров 2 черных, 4 белых, 4 красных, извлекают 1 шар. Какова вероятность, что он:

A- черный; B- белый; C- красный; D- зеленый

N=10; M=2 $$P(A)=\frac{2}{10}=0,2$$

N=10; M=4 $$P(B)=\frac{4}{10}=0,4$$

N=10; M=4 $$P(C)=\frac{4}{10}=0,4$$

N=10; M=0 $$P(D)=\frac{0}{10}=0$$

назад

# Статистическая и геометрическая вероятности

Было замечено , что при многократном повторении опытов относительная частота появления события в этих опытах стремится к устойчивости. Под относительной частотой появления события понимается отношение M/N , где N- число опытов; M-число появления события. При увеличении опытов относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном опыте. Относительную частоту появления события называют статистической вероятностью. С возрастанием числа опытов, относительная частота стремится к вероятности Р(Г)=0,5. Относительную частоту при достаточно большем числе опытов , можно считать приближенным значению вероятности.

Геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события , к мере всей области.

# Теорема сложения вероятностей

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

P(A+B)=P(A)+P(B)

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Ai\right) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai)$$

Сумма вероятностей попарно несовместных $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n,$ событий, образующих полную группу , равна 1.

далее

# Теорема сложения вероятностей

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

назад

# Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого:

$$P(A) = P_B(A) \quad \text{или} \quad P(B) = P_A(B)$$

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

# Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)P_{A1}(A_2)P_{A1A2}(A_3)\ldots P_{A1A2A3\ \ldots An-1}(A_n);$$

$P_{A1A2A3\ldots An-1}(A_n)$ – вероятность появления события $A_n$ , вычисленная в предположении, что события $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}$ произошли

$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\ldots\ldots\overline{A}_n$

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\ldots P(A_n)$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1A_2A_3\ldots A_n$ , независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\ldots\ldots\overline{A}_n$

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P\ldots(\overline{A_n})$$

назад

# Формула полной вероятности. Формула Байеса

Вероятность события A, которое может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A)$$

Формула полной вероятности

далее

# Формула полной вероятности. Формула Байеса

Рассмотрим события $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ которые образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них $B_i$ событие $A$ может наступать с некоторой условной вероятностью $P_{B_i}(A)$

Тогда вероятность наступления события $A$ равна сумме произведений вероятностей каждого из событий на соответствующую условную вероятность события $A$

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

Сколько бы не было вероятностей:

$$P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$$

# Формула полной вероятности. Формула Байеса

Рассмотрим событие A которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий, $B_1$, $B_2$, $B_3$,…,$B_n$ , которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло то вероятность событий может быть переоценена по формуле Байеса, формуле вероятности гипотез:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$$

назад

# Формула Бернулли

Вероятность того что в n независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна P , P(0<P<1) , событие наступит К раз безразлично в какой последовательности, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(K) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

q=1-p ; q- вероятность противоположного события

или

$$P_n(K) = \frac{n!}{K!(n-K)!} \cdot p^k \cdot q^{n-m}$$

# Асимптотические формулы

Если число испытаний велико, то использование формулы Бернулли будет нецелесообразным в силу необходимости выполнения громоздких вычислений. Теорема Муавра-Лапласа, дающая асимптотическую формулу , позволяет вычислить вероятность приближенно.

Теорема: Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаниях равна p и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} f(u), где$$

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}, u = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

далее

# Асимптотические формулы. Распределение Пуассона

Если вероятность события в отдельном испытании близка к нулю, то применяют другую асимптотическую формулу- формулу Пуассона. Теорема:

Если вероятность $p$ наступления события $A$ в каждом испытании постоянна, но близка к нулю, число независимых испытаний $n$ достаточно велико, а произведение $np=\lambda$, то вероятность $P_n(m)$ того, что в $n$ независимых испытаниях событие $A$ наступит $m$ раз, приближенно равна

$$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

назад

1) В журнале 10 страниц , необходимо на страницах поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать , если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии ?

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{сп}$$

2)Сколько можно записать четырехзначных чисел , используя без повторения все десять цифр?

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{сп}$$

$$A_{9}^{3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504_{сп}$$

$$Ответ: 5040 - 504 = 4536_{способов}$$

назад