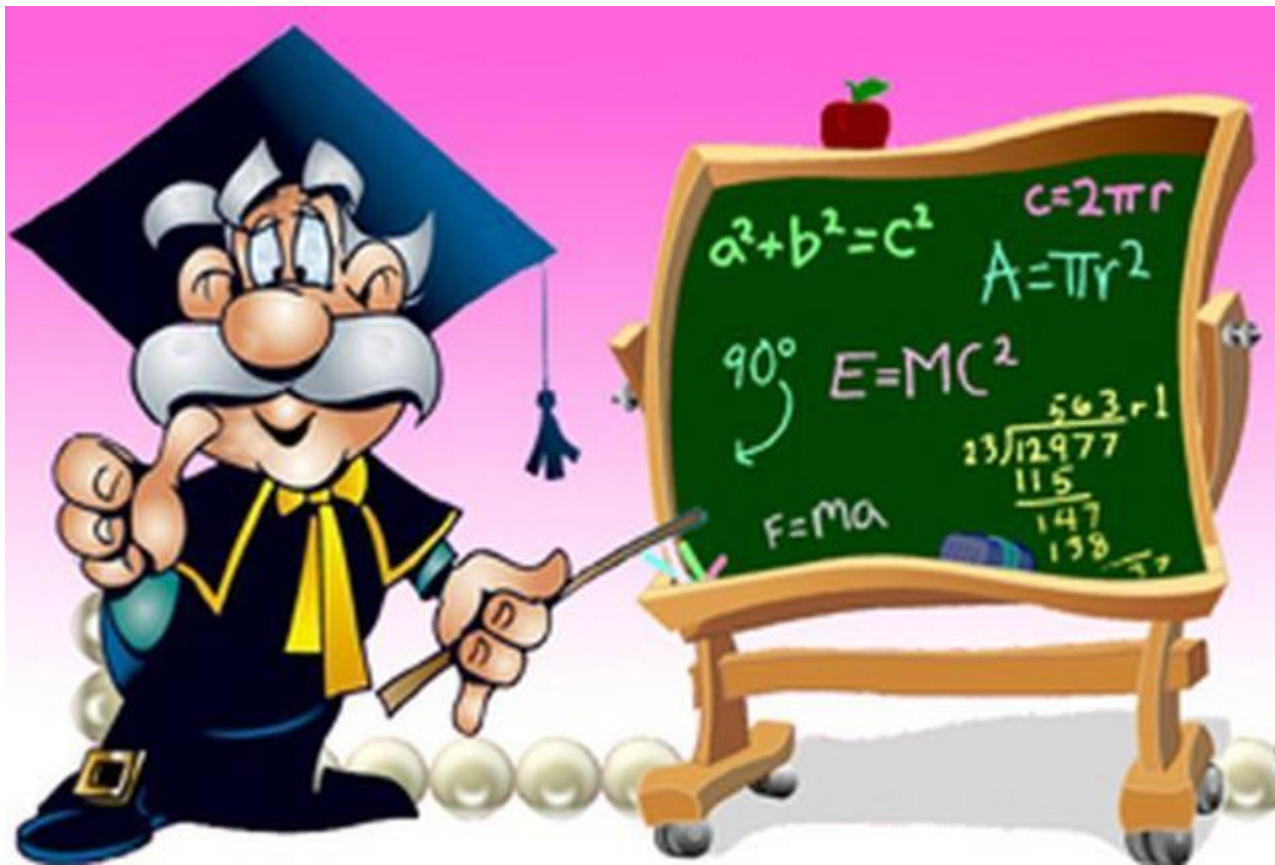


# Логарифмические уравнения



!!!

!!!

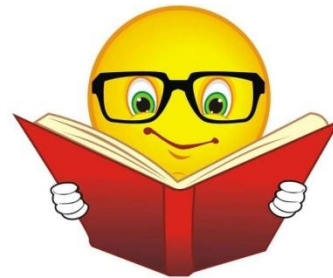
**Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$

$$f(x) > 0; g(x) > 0; a > 0; a \neq 1$$

*потенцируя, получаем*

$$f(x) = g(x)$$



!!!

!!!

# Методы решения

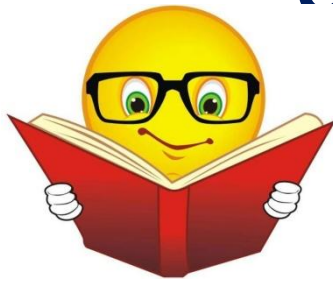
## уравнений

**1. Функционально-графический метод.**

**Основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функции**

**2. Метод потенцирования**

**Он основан на определении.**



$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

**3. Метод введения новой переменной.**

вместо  $\log_a f(x) = m, m \in R$

$$1) \log_{-3} x = 5$$

*так как  $-3 < 0$ , то корней нет*

*Ответ : корней нет*

---

$$2) \log_1(x^2 + 5) = 8$$

*так как основание равно 1, то корней нет*

*Ответ : корней нет*

---

$$3) \log_x(-5) = 8$$

*так как  $-5 < 0$ , то корней нет*

*Ответ : корней нет*

---

$$4) \log_2 x = -3$$

*ОДЗ :  $x > 0$ , то  $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$*

*Ответ :  $\frac{1}{8}$*



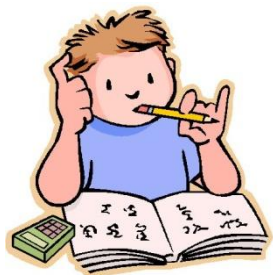
$$5) \log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$$

$$\text{ОДЗ: } x^2 + 4x + 3 > 0, \text{ то } x^2 + 4x + 3 = 2^3$$

$$x^2 + 4x + 3 = 8$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = -5; x_2 = 1$$



*Проверка:*

*если  $x = -5$ , то  $(-5)^2 + 4(-5) + 3 > 0$  – верно*

*если  $x = 1$ , то  $1^2 + 4 \cdot 1 + 3 > 0$  – верно*

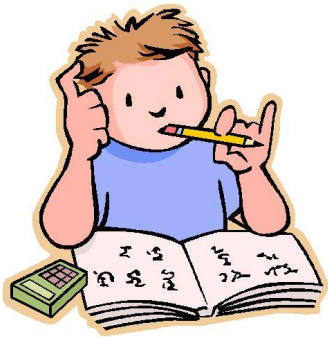
*$-5; 1$  – корни уравнения*

*Ответ:  $-5; 1$*

$$6) x \log_5(2 + 3)^x = \log_5(x + 1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \begin{cases} 2x > -3 / : 2 \\ x > -1 \end{cases} \begin{cases} x > -1,5 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$x \in (-1; +\infty)$$



$$2x + 3 = x + 1$$

$$x = -2$$

$$-2 \notin (-1; +\infty)$$

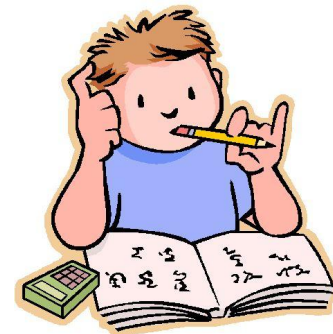
*корней нет*

*Ответ : корней нет*

$$7) \log_x(x^2 - 2x + 2) = 1$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x + 2 = x \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x_1 = 2; x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{если } x = 2, \text{ то } \begin{cases} 2 > 0 \\ 2 \neq 1 \\ 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 > 0 \end{cases} \quad \text{— верно}$$



$$\text{если } x = 1, \text{ то } \begin{cases} 1 > 0 \\ 1 \neq 1 \\ 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2 - \text{корень уравнения} \\ \text{— неверно} \end{matrix}$$

1 — не является корнем

Ответ: 2

$$8) \log_2(x+4) + \log_2(2x+3) = \log_2(1-2x)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+4 > 0 \\ 2x+3 > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases} \begin{cases} x > -4 \\ x > -1,5 \\ x < 0,5 \end{cases}$$



$$x \in (-1,5; 0,5)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3) = \log_2(1-2x)$$

$$(x+4)(2x+3) = 1-2x$$

$$2x^2 + 3x + 8x + 12 - 1 + 2x = 0$$

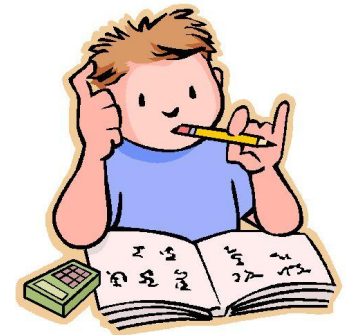
$$2x^2 + 13x + 11 = 0$$

$$x_1 = -5,5; x_2 = -1$$

$$-5,5 \notin (-1,5; 0,5)$$

$$-1 \in (-1,5; 0,5)$$

*-1 – корень уравнения*



*Ответ: -1*



$$9) \lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg \frac{x}{10}}$$

$$\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - \lg 10}$$

$$n^2 + n + 1 = \frac{7}{n-1} \quad / \cdot (n-1) \neq 0$$

$n \neq 1$

$$(n-1)(n^2 + n + 1) = 7$$
$$n^3 - 1 = 7$$

$$n^3 = 8$$

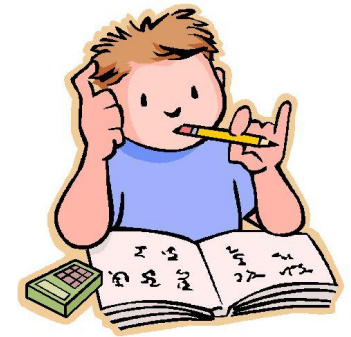
$$n = 2$$

если  $n = 2$ , то  $\lg x = 2$

$$x = 100$$

ОДЗ:  $x > 0$

Пусть  $\lg x = n$



Ответ: 100

$$10) \log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0$$

$$\log_5^2 x - \log_{\frac{1}{5^2}} x - 3 = 0$$

$$\log_5^2 x - 2 \log_5 x - 3 = 0$$

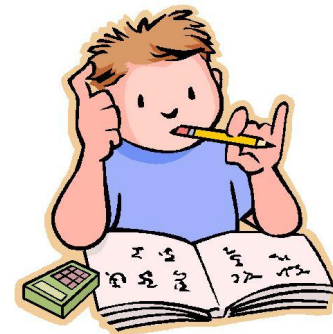
$$\text{Пусть } \log_5 = n$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$n_1 = 3; n_2 = -1$$

$$\text{если } n = 3, \text{ то } \log_5 x = 3; x = 125$$

$$\text{если } n = -1, \text{ то } \log_5 x = -1; x = \frac{1}{5}$$



$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}; 125$$

$$11) \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } x > 0; y > 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ \log_2 x - \log_2 16 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ \frac{x}{16} = \frac{3}{y} \end{cases}$$

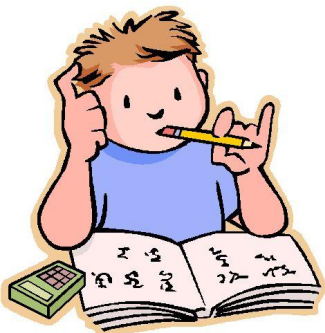
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \frac{48}{y} \end{cases}$$

$$\left(\frac{48}{y}\right)^2 + y^2 = 100$$

$$\frac{2308}{y^2} + y^2 = 100 \quad / \cdot y^2 \neq 0$$

$$y \neq 0$$



$$2308 + y^4 = 100y^2$$

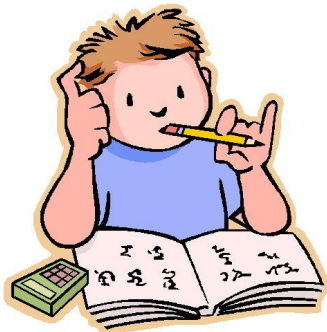
$$y^4 - 100y^2 + 2308 = 0 \quad \text{Пусть } y^2 = m, m > 0$$

$$m^2 - 100m + 2308 = 0$$

$$m_1 = 64; m_2 = 36$$

если  $m = 64$ , то  $y^2 = 64$ ,  $y = 8$  и  $x = 6$  (6; 8)

если  $m = 36$ , то  $y^2 = 36$ ,  $y = 6$  и  $x = 8$  (8; 6)



*Ответ : (6; 8); (8; 6)*

$$12) 0,5^x = -8$$

$-8 < 0$  – корней нет

*Ответ : корней нет*

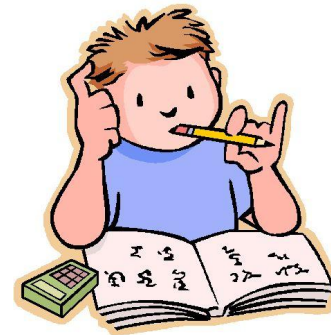
$$13) 5^{1-3x} = 7$$

$$5^{1-3x} = 5^{\log_5 7}$$

$$1-3x = \log_5 7$$

$$3x = 1 - \log_5 7$$

$$x = \frac{1 - \log_5 7}{3}$$



*Ответ :  $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \log_5 7$*

# Метод логарифмирования

$$14) x^{1-\log_5 x} = 0,04 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

прологарифмируем по основанию 5

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 \frac{1}{25}$$

$$(1 - \log_5 x) \log_5 x - \log_5 5^{-2} = 0$$

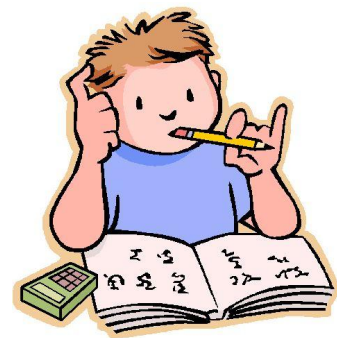
$$-\log_5^2 x + \log_5 x + 2 = 0 \quad \text{Пусть } \log_5 x = m$$

$$-m^2 + m + 2 = 0 \quad m_1 = 2; m_2 = -1$$

если  $m = 2$ , то  $\log_5 x = 2$ ,  $x = 25$

если  $m = -1$ , то  $\log_5 x = -1$ ,  $x = \frac{1}{5}$

Ответ:  $25; \frac{1}{5}$



$$15) \log_2 x^2 = 4$$

$$\text{ОДЗ} : x \neq 0$$

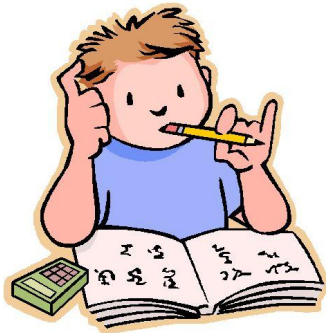
$$2 \log_2 |x| = 4$$

$$\log_2 |x| = 2$$

$$|x| = 4$$

$$x = \pm 4$$

*Ответ :  $\pm 4$*



$$16) \log_3(1 + \log_3(2^x - 7)) = 1$$

$$1 + \log_3(2^x - 7) = 3$$

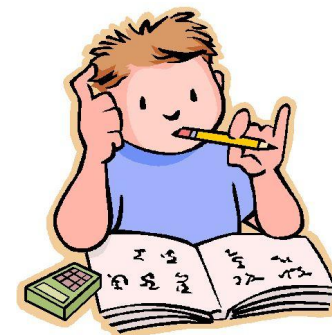
$$\log_3(2^x - 7) = 2$$

$$2^x - 7 = 9$$

$$2^x = 16$$

$$2^x = 2^4$$

$$x = 4$$



*так как  $y = 2^m$  – монотонна на  $D(y) = R$*

*Проверка:*

*если  $x = 4$ , то  $\log_3(1 + \log_3(2^4 - 7)) = 1$  – верно*

*Ответ: 4*



$$17) x^3 + 5^{\log_5 x} = 16^{\log_4 \sqrt{30}}$$

ОДЗ :  $x > 0$

$$3x^2 + x = \left(4^{\log_4 \sqrt{30}}\right)^2$$

$$3x^2 + x = 30$$

$$3x^2 + x - 30 = 0$$

$$x_1 = -\frac{20}{6} < 0; \quad x_2 = 3$$

Ответ : 3



$$18) x^{3\lg x - \frac{1}{\lg x}} = \sqrt[3]{10}$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0; x \neq 1$$

*Прологарифмируем по основанию 10*

$$\lg x^{3\lg x - \frac{1}{\lg x}} = \lg \sqrt[3]{10}$$

$$\lg^2 x = \frac{4}{9}$$

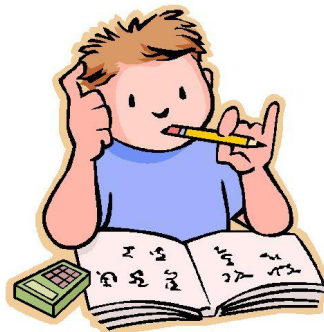
$$\left(3\lg x - \frac{1}{\lg x}\right) \lg x = \frac{1}{3}$$

$$\lg x = \frac{2}{3}; \lg x = -\frac{2}{3}$$

$$x = 10^{\frac{2}{3}} \quad x = 10^{-\frac{2}{3}}$$

$$3\lg^2 x - 1 = \frac{1}{3}$$

$$3\lg^2 x = \frac{4}{3}$$



$$\text{Ответ: } \sqrt[3]{100}; \sqrt[3]{\frac{1}{100}}$$

$$19) \log_7 \log_3 \log_2 x = 0$$

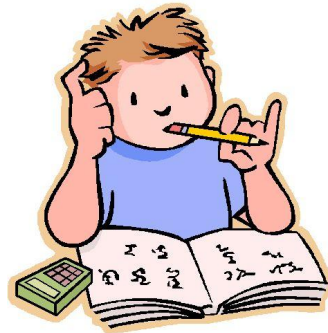
$$\text{ОДЗ} : x > 0$$

$$\log_3 \log_2 x = 7^0 = 1$$

$$\log_2 x = 3^1 = 3$$

$$x = 2^3 = 8$$

*Ответ : 8*



$$20) \quad \lg(x-5)^2 + \lg(x+6)^2 = 2$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 5; -6$$

$$2 \lg|x-5| + 2 \lg|x+6| = 2 \quad / : 2$$

$$\lg|x-5| + \lg|x+6| = 1$$

$$\lg(|x-5||x+6|) = 1$$

$$|x-5||x+6| = 10$$

$$|x^2 + x - 30| = 10$$

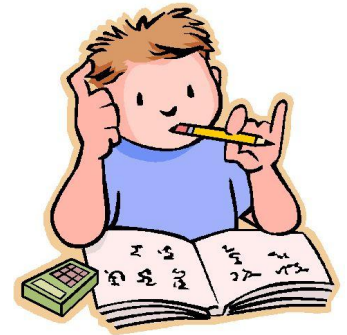
$$x^2 + x - 30 = 10; \quad x^2 + x - 30 = -10$$

$$x^2 + x - 40 = 0 \quad x^2 + x - 20 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{161}}{2}$$

$$x = -5; 4$$

$$\text{Ответ: } \frac{-1 \pm \sqrt{161}}{2}; -5; 4.$$



$$21) \quad 3^{x+1} = 5^{x-2}$$

*Прологарифмируем по основанию 10*

$$\lg 3^{x+1} = \lg 5^{x-2}$$

$$(x+1) \lg 3 = (x-2) \lg 5$$

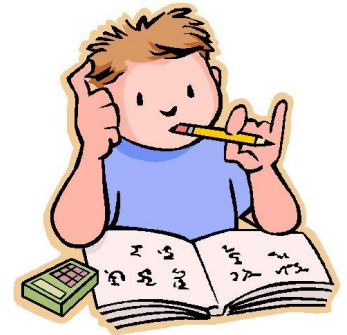
$$x \lg 3 + \lg 3 = x \lg 5 - 2 \lg 5$$

$$x \lg 3 - x \lg 5 = -2 \lg 5 - \lg 3$$

$$x(\lg 3 - \lg 5) = -(\lg 25 + \lg 3)$$

$$x = \frac{-\lg 75}{\lg 0,6}$$

*Ответ :*  $-\frac{\lg 75}{\lg 0,6}$



$$22) x^{\log_3 x} = 81$$

$$\text{ОДЗ} : x > 0$$

*Прологарифмируем по основанию 3*

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$$

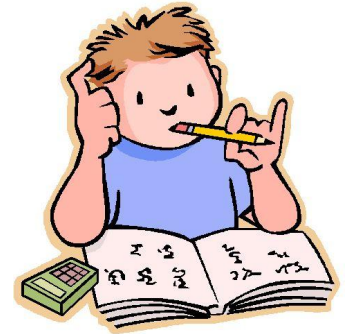
$$\log_3 x \cdot \log_3 x = 4$$

$$\log_3^2 x = 4$$

$$\log_3 x = 2; \quad \log_3 x = -2$$

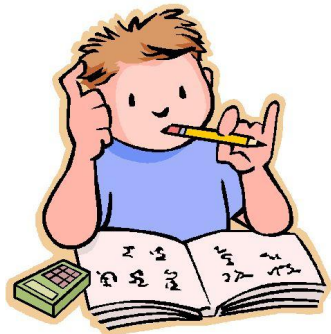
$$x = 9$$

$$x = \frac{1}{9}$$



*Ответ : 9;  $\frac{1}{9}$*

$$23) \log_9(3^x + 2x - 20) = x(1 - \log_3 9)$$



$$\log_9(3^x + 2x - 20) = x \cdot (1 - 0,5)$$

$$\log_9(3^x + 2x - 20) = 0,5x / \cdot 2$$

$$2 \log_9(3^x + 2x - 20) = x$$

$$(3^x + 2x - 20)^2 = 9^x$$

$$(3^x + 2x - 20)^2 = 3^{2x}$$

$$(3^x + 2x - 20)^2 = (3^x)^2$$

$$3^x + 2x - 20 = 3^x$$

если  $x = 10$ , то  $\log_9(3^{10} + 2 \cdot 10 - 20) = 10(1 - \log_3 9)$

$$\log_9 3^{10} = 5 - \text{верно}$$

$$2x - 20 = 0$$

$$2x = 20$$

$$x = 10$$

*Проверка:*

*Ответ: 10*

$$24) \quad 3 \log_2^2 \sin x + \log_2 (1 - \cos 2x) = 2$$

$$3 \log_2^2 \sin x + \log_2 2 \sin^2 x = 2$$

$$3 \log_2^2 \sin x + \log_2 2 + \log_2 \sin^2 x = 2$$

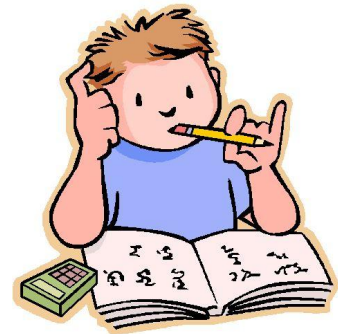
$$3 \log_2^2 \sin x + 1 + 2 \log_2 \sin x = 2$$

$$3 \log_2^2 \sin x + 2 \log_2 \sin x - 1 = 0 \quad \text{ОДЗ: } \sin x > 0$$

Пусть  $\log_2 \sin x = m$

$$3m^2 + 2m - 1 = 0$$

$$m_1 = -1; m_2 = \frac{1}{3}$$

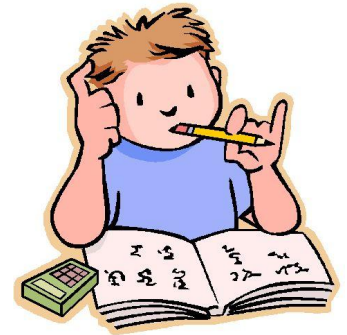




1) если  $m = -1$ ,  $\log_2 \sin x = -1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



2) если  $m = \frac{1}{3}$ ,  $\log_2 \sin x = \frac{1}{3}$

$$\sin x = \sqrt[3]{2} \quad \left| \sqrt[3]{2} \right| \leq 1 - \text{неверно}$$

*корней нет*

*Ответ :*  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$