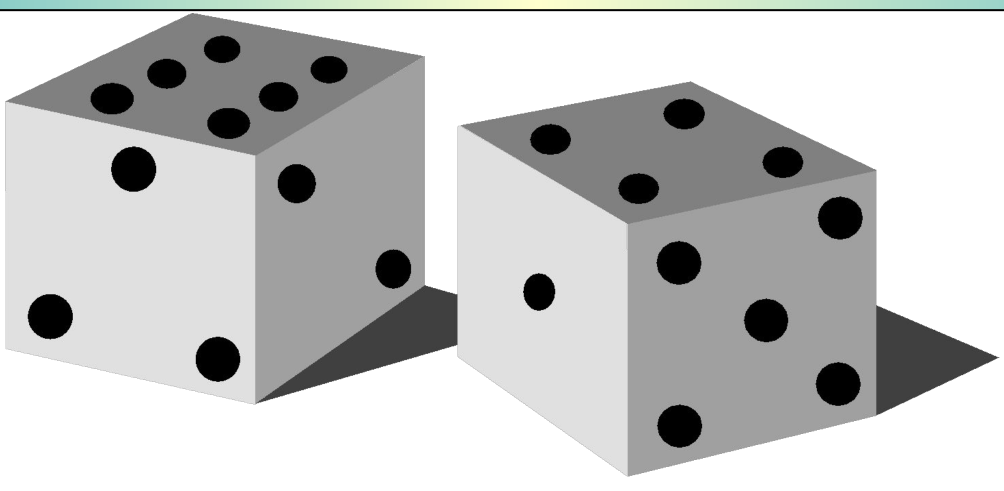
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРНІГІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра інформаційних технологій і програмної інженерії

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА



ЧЕРНІГІВ 2019

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ, випадові явища, випадкові величини, їх властивості та операції над ними

Математична статистика – математична наука, що розробляє математичні методи систематизації та використання статистичних даних для наукових і практични висновків

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ПРОСТІР ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ

Випадковою подією (просто подією) називається будь-який факт, який в результаті іспитання может відбутися чи не відбутися

Випадкові події позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, …

ПРИКЛАДИ

1) A {випала парна кількість очок};
2) B {випала кількість очок, кратна 3};
3) C {выпало більше 4 очок}

Під випробуванням (експериментом) мається на увазі виконання певного комплексу умов, в яких спостерігається те або інше явище, фіксується той чи інший результат

ПРИКЛАДИ

1)підкидання грального кубика;
2) складання екзамену;
3)постріл із гвинтівки;
4)хімічний експеримент і тд.

ПРОСТІР ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ

Серед усіх можливих подій, які,по волі випадку, в результаті досліду відбуваються, або не відбуваються, виділяють елементарні результати (елементарні події)

Елементарні результати – це події, що мають наступні властивості:

1) вони є взаємновиключними, в результаті випробування відбувається лише одне з них;

2) для будь-якої події (можливої в результаті досліду), по насталій елементарній події, можно визначити відбулась вона чи ні;

Елементарні події позначають ω *або* ω_i

Сукупність всіх елементарних подій називають простіром елементарних подій

Простір елементарних подій позначають $\Omega = \{\omega\}$

Будь-яку підмножину множини Ω називають подією

Подія А відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається одна з елементарних подій, що входять в А

ТИПИ ПОДІЙ

Вірогідна	**Випадкова**	**Неможлива**
обов’язково відбувається внаслідок певного випробування (ранок після ночі, каміння падає вниз, вода підвищує температуру при нагріванні і тд)	**може відбутися чи не відбутися внаслідок випробування (знайти скарб, в школі відмінили заняття, бутерброд впав ікрою вниз)**	**ніяк не може відбутися внаслідок даного випробування (людина народжується старою і молодшає з кожним днем, день народження 30 лютого, ви вдало складаєте іспит з ТЙМС)**

ПРИКЛАД

Задача: Розглянемо кубик, на гранях якого написані цифри 1, 7, 0, 1, 2, 4. Досвід полягає в тому, що кидаємо кубик і дивимося, яка цифра з'явиться на верхній межі.

Елементарними подіями є:

ω_0 - випадання цифри «0»;
ω_1 - випадання цифри «1»;
ω_2 - випадання цифри «2»;
ω_4 - випадання цифри «4»;
ω_7 - випадання цифри «7».

Простір елементарних результатів: $\Omega = \{\omega_0; \omega_1; \omega_2; \omega_4; \omega_7\}$

$\mathrm{A} = \{\omega_0; \omega_2; \omega_4\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде парна цифра;

$B = \{\omega_1; \omega_7\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде непарна цифра;

$C = \{\omega_2; \omega_7\}$ - подія, яка полягає в тому, що з'явиться просте число.

ПРИКЛАД

Припустимо, в результаті досвіду з'явилася цифра 7.

В цьому випадку відбулися події B і C, а подія A не відбулося

Події називаються сумісними, якщо поява однієї не виключає появи іншої. В іншому випадку події називаються несумісними

A і B – несумісні події ; B і C – сумісні події

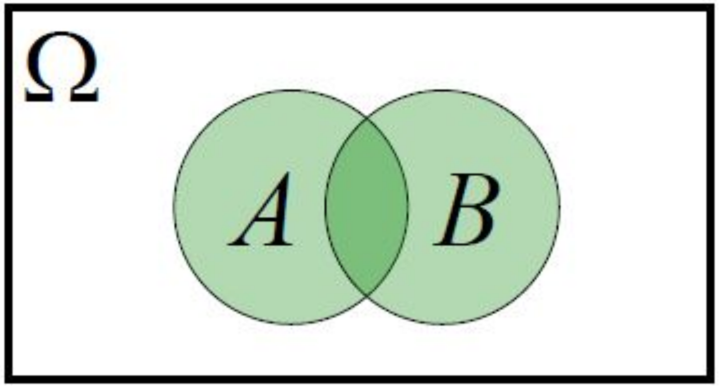
Неможливим для даного експерименту є подія, яка полягає у тому, що з'явиться цифра 5.

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

Означення

Сумою подій A и B називается подія

$$C = \left\{\omega \in \Omega \quad : \quad \omega \in A \quad \text{или} \quad \omega \in B\right\}$$



ПОЗНАЧАЄТЬСЯ

C=A+B или $C = A \cup B$

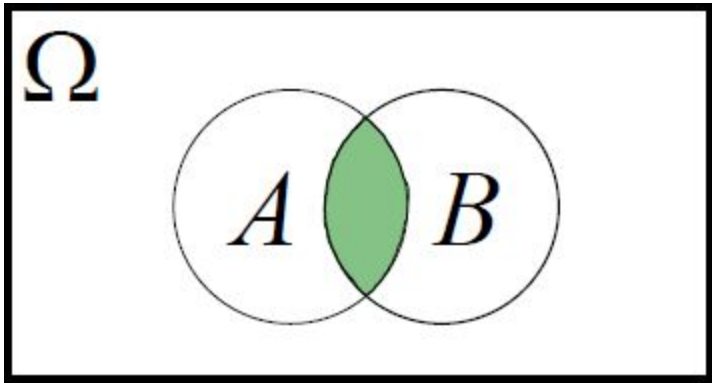
Подія A + B відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається або подія A або подія B або і A і B одночасно

Означення

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

Добутком подій А и В називається подія

$$C = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega \in A \ \ и \ \ \omega \in B\}$$



ПОЗНАЧАЄТЬСЯ

C=AB або $C = A \cap B$

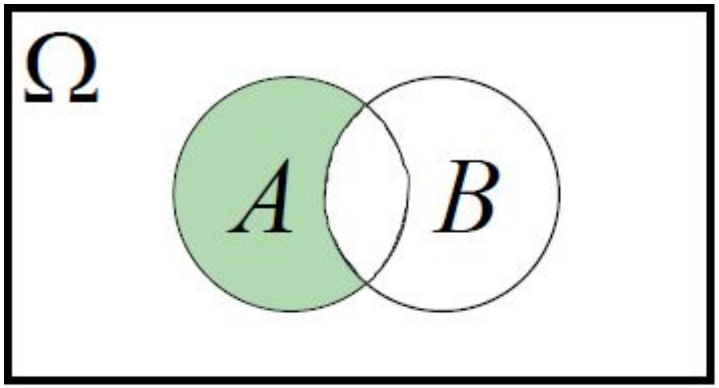
Подія AB відбувається тоді і тільки тоді, коли одночасно відбуваються події A і B.

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

Означення

Різницею подій А і В називається подія

$$C = \{\omega \in \Omega \;:\; \omega \in A \;\; u \;\; \omega \notin B\}$$



ПОЗНАЧАЄТЬСЯ

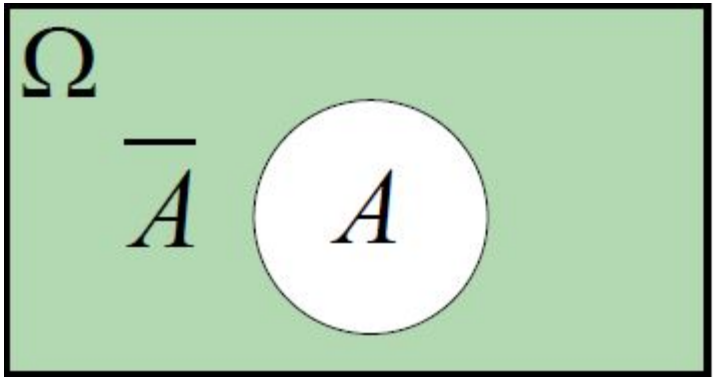
C=A-B або $C = A \setminus B$

Подія A\B відбувається тоді і тільки тоді, коли подія A відбувається

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

Означення

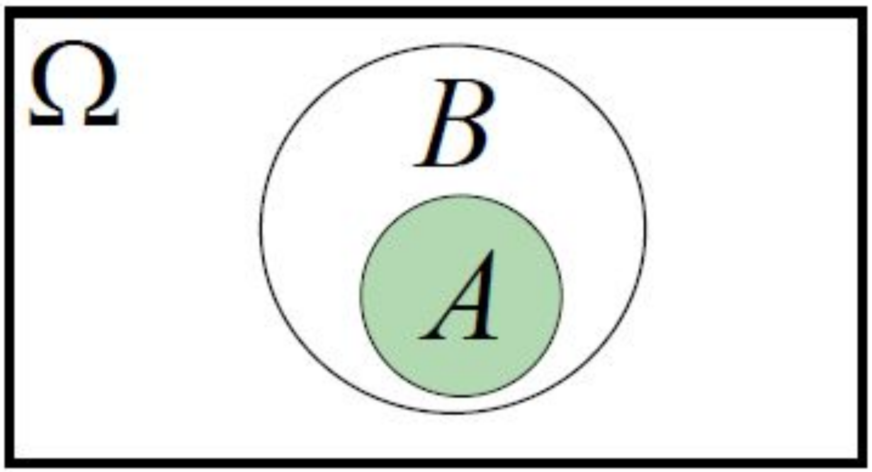
Подія $\Omega \setminus A$ называется <u>протилежною</u> подією до A



ПОЗНАЧАЄТЬСЯ $\overline{A}$

$$A \cdot \overline{A} = \qquad\qquad A + \overline{A} = \Omega$$

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ



$$A \subset B$$

В є наслідком
події А

Якщо кожна поява події А
Супроводжується появою В, то пишуть А ⊂
В
Якщо А ⊂ В, то кожна елементарна подія,
Що входить у А, міститься в події В.

ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

Виникнення теорії ймовірностей як науки відноситься до середини 17 століття. Перше визначення ймовірності було дано Бернуллі

Ймовірність – ступінь впевненості в тому, що подія відбудеться і ставлення до достовірності як частини до цілого

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

КЛАСИЧНЕ

ГЕОМЕТРИЧНЕ

АКСІОМАТИЧНЕ

СТАТИСТИЧНЕ

Класичне визначення ймовірності сформульовано в курсі лекцій Лапласа

ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

Нехай простір елементарних подій Ω складається з кінцевого числа рівно можливих елементарних результатів. $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$ Довільну подію А можна уявити $A = \{\omega_{i1}; \omega_{i2}; \ldots; \omega_{ik}\}$ $1 \le i1 < i2 < \ldots < ik \le k$

Подія А відповідає k елементарним результатам.

Означення

(класичне означення ймовірності)

<u>Ймовірністю події А</u> называється число, рівне відношенню числа елементарних результатів, сприяють появі події А до загальної кількості випадків

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Властивості КЛАСИЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

Кожному елементарного події відповідає тільки один елементарний результат

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Події Ω відповідає n елементарних результатів

$$P(\Omega) = 1$$

Неможливого події не відповідає жодного результату

$$P(\Theta) = 0$$

Властивості КЛАСИЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

$$0 \le P(A) \le 1, \quad \forall A \in \Omega$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \quad \forall A, B \subset \Omega : \quad A \cap B = \Theta$$

$$\text{Если} \quad P(A) = 0, \quad mo \quad A = \Theta$$

ЗАУВАЖЕННЯ

Класичне визначення ймовірності може застосовуватися лише в тих випадках, коли:

1)простір елементарних фіналів складається з кінцевого числа елементарних фіналів;

2) елементарні результати різновірогідні.

ПРИКЛАД

Задача: Розглянемо кубик, на гранях якого написані цифри 1, 7, 0, 1, 2, 4. Досвід полягає в тому, що кидаємо кубик і дивимося, яка цифра з'явиться на верхній межі.

Елементарними подіями являються:

ω_0 - випадання цифри «0»;
ω_1 - випадання цифри «1»;
ω_2 - випадання цифри «2»;
ω_4 - випадання цифри «4»;
ω_7 - випадання цифри «7».

Простір елементарних результатів: $\Omega = \{\omega_0; \omega_1; \omega_2; \omega_4; \omega_7\}$

$\mathrm{A} = \{\omega_0; \omega_2; \omega_4\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде парна цифра;

$B = \{\omega_1; \omega_7\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде непарна цифра;

$C = \{\omega_2; \omega_7\}$ - подія, яка полягає в тому, що з'явиться просте число.

ПРИКЛАД

В даному досвіді події не різновірогідні, так як появи цифри 1 відповідає 2 грані, появі інших цифр по однієї грані.

До даної моделі можна застосувати класичне визначення ймовірності, якщо на гранях з цифрами 1 зробити додаткові позначки, наприклад 1 'і 1 "і замість елементарного події ω1 розглянути елементарні події ω1 'і ω1 ". В цьому випадку простір елементарних подій буде мати вигляд

$$\Omega = \left\{\omega_0 ; \omega_{1'} ; \omega_{1''} ; \omega_2 ; \omega_4 ; \omega_7\right\}$$

$\mathrm{A} = \left\{\omega_0 ; \omega_2 ; \omega_4\right\}$ -подія, яка полягає в тому, що випаде парна цифра; $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$B = \left\{\omega_{1'} ; \omega_{1''} ; \omega_7\right\}$ - подія, яка полягає в тому, що випаде непарна цифра;

$C = \left\{\omega_2 ; \omega_7\right\}$ - подія, яка полягає в тому, що з'явиться просте число.

ПРИКЛАД

Експеримент	Число можливих результатів експерименту (n)	Подія А	Кількість вдалих результатів для цієї подіх (m)	Ймовірність настання події А P(a)=m/n
Кидаємо монету	2	Випав «Герб»	1	1/2
Витягаємо екзаменаційний білет	24	Витягнули білет №5	1	1/24
Кидаємо кубик	6	На кубику випало парне число	3	1/2
Граємо в лоторею	250	Виграли, купивши один білет	10	1/25

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Геометрична інтерпретація ймовірності була запропонована англійським математиком Венном

Геометричне означення ймовірності застосовується в тих випадках, коли є нескінченне число рівноможливих випадків.

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Найбіль поширені 3 моделі

1 Маємо відрізок [А, В]. Кидаємо в нього точку. теоретично точка може потрапити в будь-яку точку Х відрізка [А, В].

Простір елементарних подій складається з нескінченного числа елементарних результатів, отже класичне означення ймовірності застосувати не можна.

Ймовірністю події А, що складається в тому, що при киданні точки на відрізок [А, В] вона потрапить на відрізок [З, Д] $\subset$ [А, В],називається число,яке визначається за формулою

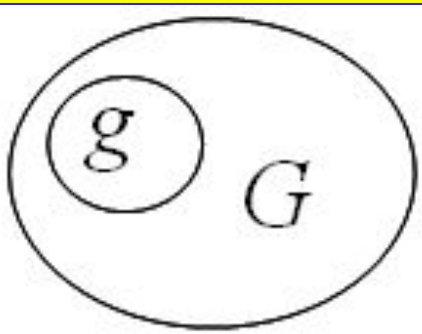
$$P(A)=\frac{\text{довжина [С, Д]}}{\text{довжина [ААВ]}}=\frac{|CД|}{|AB|}$$

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

2 Нехай на площині OXY задана замкнута обмежена область G з гладкою або кусочно-гладкою межею. кожній такій області можна поставити у відповідність число S (G) - площа області. Кидаємо точку в область G. Елементарне подія - точка попаде в точку P області G. Простір елементарних результатів складається з нескінченного числа рівноймовірно результатів

Ймовірністю події A, що складається в тому, що при киданні точки в область G вона потрапить в замкнуту обмежену область з гладкою або кусочно гладкої кордоном, називається число, яке визначається за формулою

$$g \subset G$$



$$P(A) = \frac{\text{площа g}}{\text{площа G}} = \frac{S(g)}{S(G)}$$

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

3 Нехай в задано замкнутий обмежене тіло T з гладкою або кусочно-гладкою межею. Йому можна поставити у відповідність число V (T) - обсяг тіла.

Ймовірністю події A, що складається в тому, що при киданні точки в область T вона потрапить в область $t \subset T$ називається число, яке визначається за формулою

$$P(A) = \frac{\text{об'єм t}}{\text{об'ємT}} = \frac{V(t)}{V(T)}$$

Всі три визначення можна звести до одного, якщо замість числових характеристик області вжити термін міра області - mes

Ймовірністю події A, що складається в тому, що при киданні точки в область D вона потрапить в область $d \subset D$ називається число, яке визначається за формулою

$$P(A) = \frac{\text{mes(d)}}{\text{mes(D)}}$$

Властивості ГЕОМЕТРИЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ

Міра області, відповідна елементарного події, дорівнює нулю. $P(\omega) = 0$

Сприятливим областю для події Ω є вся область D $P(\Omega) = 1$.

Сприятливим області для неможливого події немає

$$P(\Theta) = 0$$

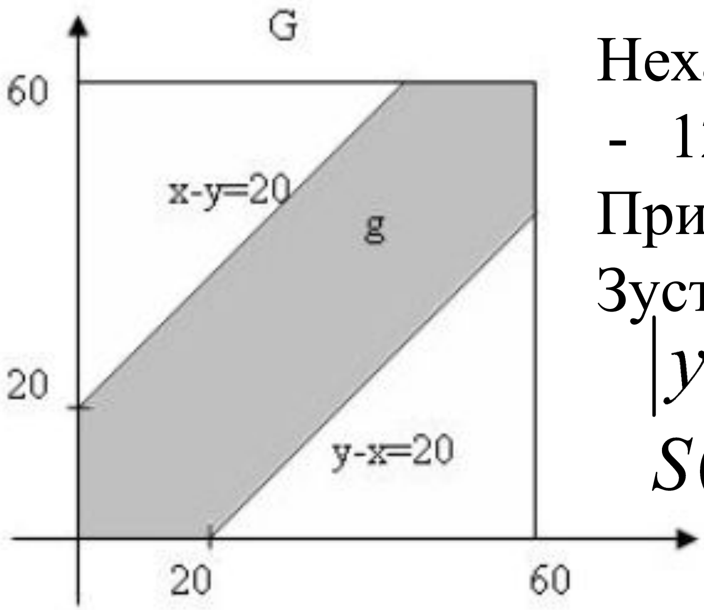
$$0 \le P(A) \le 1, \quad \forall A \in \Omega$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B), \quad \forall A, B \subset \Omega : \quad A \cap B = \Theta$$

Якщо $P(A) = 0, \quad mo \quad A = \Theta$

Задача: Двоє друзів домовилися зустрітися між 12 і 13 годинами дня. Прийшовши першим чекає другого протягом 20 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен навмання вибирає час свого приходу від 12 до 13 годин.

Розв'язання



Нехай час прибуття одного з них –

- 12 год. x хв.; другого – 12 год. y хв.

При цьому $0 \le x \le 60; \quad 0 \le y \le 60$

Зустріч відбудеться, якщо:

$$|y - x| \le 20 \Rightarrow x - 20 \le y \le x + 20$$

$$S(G) = 3600$$

$$\boxed{P(A) = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}}$$

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Статистичне визначення ймовірності є наслідком обробки результатів різних спостережень і поклало початок науці математична статистика

Проведемо серію з N дослідів. Як часто з'явиться подія А? (Наприклад, кидаємо монету кілька разів. Скільки разів при киданні монети з'явиться «герб»?)

Нехай N_A - число появ події А в серії з N дослідів.

Означення

(статистичне означення ймовірності)

Частотою (відносної частотою) появи події А в серії з N дослідів називається число, яке дорівнює відношенню числа появ події А в серії з N дослідів до загальної кількості дослідів

$$\boxed{\nu_A = \frac{N_A}{N}}$$

ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТОТИ

$$0 \le \nu_A \le 1 \quad \left(\text{т.к.} \quad 0 \le N_A \le N\right)$$

$$\nu_\Omega = 1 \quad \left(m.\kappa. \quad N_\Omega = N\right)$$

$$\nu_\Theta = 0 \quad \left(m.\kappa. \quad N_\Theta = 0\right)$$

$$\nu_{A+B} = \nu_A + \nu_B, \quad \forall A, B \subset \Omega: \quad A \cap B = \Theta$$

Якщо $\nu_A = 0$, *то* не *випливає*, *що* $A = \Theta$

Наприклад, якщо кинули монету 3 рази і кожен раз випало «решка», то частота появи «герба» в даній серії дослідів дорівнює нулю, але подія не є неможливим

ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Досліди показують, що при великих N частота vA в різних серіях випробувань виявляється приблизно однаковими, тобто існує деяке значення p (A), зване ймовірністю події A, біля якого групуються зазначені частоти

$$P(A) \approx \nu_A = \frac{N_A}{N}$$

Так як при проведенні експериментів або збору інформації можливі похибки, то зазвичай проводять кілька серій дослідів (наприклад k серій), в яких число випробувань одно N1, N2, ..., Nk. Опрределяют частоту появи події в кожній серії і під ймовірністю розуміють число

$$P(A) \approx \frac{\nu_A^1 + \nu_A^2 + \ldots + \nu_A^k}{k}$$

ТЕОРЕМИ МНОЖЕННЯ

Нехай заданий імовірнісний простір(Ω, F, P)

Теорема

Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншого, за умови що перше відбулося

$$\forall A, B \in F: \quad \begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) &= \mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}) \\ \mathrm{P}(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) &= \mathrm{P}(\mathrm{B})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \end{aligned}$$

$$\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in F \quad P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})$$

ПРИКЛАД

Задача: В урні лежать 12 білих, 8 червоних і 10 синіх куль. На удачу виймають 2 кулі. Яка ймовірність, що вийняті кулі різних кольорів, якщо відомо, що серед них не виявилося синього кулі?

Розв'язання

Так як відомо, що сині кульки не можуть виймались, то всього існує n = 20 можливих варіантів результату досвіду.

Подія Ai – i-й вийнята кулька біла;

Bi – i-й вийнята кулька червона.

$$i = 1,2$$

Якщо 1-им виймуть білу кулю, а 2-м червоний, то ймовірність такої події

$$P(C) = P(A_1 \cdot B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19}$$

Если 1-ым вынут красный шар, а 2-ым белый, то вероятность такого события

$$P(C) = P(A_1 \cdot B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2 / A_1) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19}$$

ПРИКЛАД

Так як порядок вилучення куль не має значення, нас влаштовують обидві події. Тоді враховуючи несумісних подій C і D, отримуємо

$$P = P(C + D) = P(C) + P(D) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{48}{95}$$

Означення

Події A і B називаються <u>незалежними</u>, якщо

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Означення

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються <u>попарно незалежними</u>, якщо $P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i \neq j$

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, F, P)
Нас цікавить подія A, яке може наступити при появі одного з несумісних подій A1, A2, ..., An, що утворюють повну групу

Означення

Сукупність подій {A1, A2, ..., An} називається <u>повною групою подій</u>, якщо:

1) події A1, A2, ..., An попарно незалежні, тобто

$$A_i \cdot A_j = \Theta \quad \forall i \neq j$$

2) $$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$$

В результаті експерименту обов'язково відбувається одна з подій Ai, i = 1,2, ..., n.
Події A1, A2, ..., An називаються <u>гіпотезами.</u>

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай відомі ймовірності подій $A_i, \quad i = \overline{1, n}$ та умовні ймовірності $P(A/A_1), \ P(A/A_2), ..., P(A/A_n)$

Як знайти ймовірність події А?

Теорема

(формула повної ймовірності)

Якщо події А1, А2, ..., Аn утворюють повну групу подій, то для будь-якої події А справедлива формула повної ймовірності

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2) + \ldots$$
$$\ldots + P(A_n) \cdot P(A/A_n)$$

Ймовірності р (Аk) називаються __апріорними ймовірностями__ гіпотез, що обчислюються до твору досвіду

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Формула повної ймовірності застосовується у випадках, коли досвід з випадковим результатом розпадається на два етапи: на першому етапі «розігруються» умови досвіду, а на другому - його результат.

Уявимо Ситуацію:

Досвід проведений. В результаті настало подія А. Як зміняться ймовірності гіпотез? Тобто як знайти апостеріорні ймовірності гіпотез

$$P(A_1 / A), \quad P(A_2 / A), \ldots, P(A_n / A)$$

Теорема (формула Байесса)

Припустимо, що в результаті випробування подія А сталося. Тоді ймовірність гіпотез А1, А2, ..., An можна обчислити

$$P(A_i / A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A / A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(A / A_j)}, \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$A_i, \quad i = \overline{1, n}$$

ПРИКЛАД

Задача: По об'єкту проводиться 2 постріли. ймовірність влучення при першому пострілі дорівнює 0,5; при другому - 0,7. імовірність руйнування об'єкта при одному попаданні дорівнює 0,4; при двох влучань - 0,8. Знайти ймовірність руйнування об'єкту при двох пострілах.

Розв’язання

Позначимо В1 і В2 попадання відповідно при 1-му і 2-му пострілі. Введемо гіпотези А2 два попадання при двох пострілах,

А1 - одне влучення при двох пострілах,

А0 - жодного попадання при двох пострілах.

Подія А1 відбудеться, якщо трапиться одне влучення при 1-му або 2-му пострілі, тобто $\mathrm{A}_1 = \underline{B_1} \cdot \underline{B_2} + B_1 \cdot B_2$

аналогічно $\mathrm{A}_2 = B_1 \cdot B_2, \quad A_0 = B_1 \cdot B_2$

Вважаючи В1 і В2 незалежними, отримаємо

$$P(A_1) = 0{,}5 \quad P(A_2) = 0{,}35 \quad P(A_0) = 0{,}15$$

$$P(A / A_1) = 0{,}4 \quad P(A / A_2) = 0{,}8 \quad P(A / A_0) = 0 \Rightarrow P(A) = 0{,}48$$

СХЕМА БЕРНУЛЛІ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

ОЗНАЧЕННЯ

Якщо проводиться кілька випробувань, причому ймовірність події А в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються незалежними щодо події А

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія А може з'явитися чи ні, до того ж ймовірність появи події А в кожному випробуванні стала і дорівнює числу p. Тоді ймовірність ненастання події А в кожному випробуванні також є сталою і дорівнює числу q=1-p.

Така послідовність випробувань називається серією випробувань, які відповідають схемі Бернуллі.

СХЕМА БЕРНУЛЛІ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Обчислити ймовірність того, що подія А при проведенні n незалежних випробувань, які відповідають схемі Бернуллі, з'явиться рівно m раз

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$

C_n^m - загальне число складних подій, в яких подія А настане m раз;

$p^m \cdot q^{n-m}$ - ймовірність кожного складного події

НАСЛІДОК

1. Імовірність того, що подія А настане хоча б один раз при проведенні випробувань за схемою Бернуллі дорівнює $p_n(m \geq 1) = 1 - q^n$
2. Імовірність того, що подія А при проведенні n випробувань за Схема Бернуллі настане не менше m1 раз і не більше m2 раз дорівнює $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} p_n(k)$

Даніель Бернуллі

Даніе́ль Берну́ллі (29 січня (8 лютого) 1700 — 17 березня 1782) — швейцарський учений, син Йоганна Бернуллі.
Академік (1725–1733) та іноземний почесний член (1733) Петербурзької АН, член Болонської АН (1724), Берлінської АН (1747), Паризької АН (1748), Лондонського королівського товариства (1750).
Даніеля Бернуллі разом з Даламбером, Ейлером і Лагранжем можна вважати засновником математичної фізики.

ПРИКЛАД

Задача: Чому дорівнює ймовірність того, що при чотирьох підкидання гральної кістки трійка випаде 2 рази?

Розв'язання

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2} = \frac{25}{216}$$

Задача: Два рівносильних шахматисти грають в шахи, що найімовірніше: виграти дві партії з чотирьох чи три партії з шести (нічиї до уваги не беруться)?

$$P_4(2) = C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2(1-\frac{1}{2})^{4-2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} = \frac{24}{64}$$

$$P_6(3) = C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3(1-\frac{1}{2})^{6-3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64}$$

Ймовірність виграти 2 партії з 4 вища

Найімовірніше число НАСТАННЯ ПОДІЇ ПРИ ПРОВЕДЕННІ ВИПРОБУВАНЬ за схемою Бернуллі

Задача: Робочий обслуговує 12 однотипних верстатів. імовірність того, що верстат потребує до себе уваги протягом часу Т, дорівнює 1/3.
Складемо закон розподілу ймовірностей в залежності від кількості вимог верстатів.

Розв'язання:

$$P_{12}(0) = 0{,}0077 \quad P_{12}(5) = 0{,}1907 \quad P_{12}(9) = 0{,}003317$$
$$P_{12}(1) = 0{,}0462 \quad P_{12}(6) = 0{,}1112 \quad P_{12}(10) = 0{,}0004967$$
$$P_{12}(2) = 0{,}1271 \quad P_{12}(7) = 0{,}0476 \quad P_{12}(11) = 0{,}0000451$$
$$P_{12}(3) = 0{,}2119 \quad P_{12}(8) = 0{,}0121 \quad P_{12}(12) = 0{,}0000018$$
$$P_{12}(4) = 0{,}2384$$

Спочатку з ростом числа вимог верстатів, ймовірності зростають, досягаючи піку при m = 4; потім їх значення починаю зменшуватися.

Найімовірніше число НАСТАННЯ ПОДІЇ ПРИ ПРОВЕДЕННІ ВИПРОБУВАНЬ за схемою Бернуллі

Дослідження показали, що така ситуація спостерігається для моделі, що підкоряються схемою Бернуллі. У схемі Бернуллі серед можливого числа успіхів можна виділити кількість успіхів m^* якому відповідає найбільша ймовірність, тобто m^* найімовірніше число успіхів.

Формула для визначення найімовірнішого числа успіхів:

$$n \cdot p - q \leq m^* \leq n \cdot p + p$$

Рішення раніше поданного завдання:

$$n = 12, \quad p = \frac{1}{3}, \quad q = \frac{2}{3} \Rightarrow 4 - \frac{2}{3} \leq m^* \leq 4 + \frac{1}{3} \Rightarrow m^* = 4$$

Зауваження

Якщо np-q - ціле число, то оскільки np + p = np + 1-q = np-q + 1 - ціле число, то значень буде два

Задача: В ВУЗі навчаються 730 студентів. Імовірність того, що день народження навмання взятого студента припадає на певний день року 1/365 (для року з 365 днів, високосні роки не враховуються). Знайти найбільш імовірне число студентів, народжених 1 січня.

Розв'язання:

$$\mathrm{n} = 730, \quad p = \frac{1}{365}, \quad q = \frac{364}{365}$$

$$np - q = \frac{366}{365}, \quad np + p = \frac{731}{365}$$

$$\frac{366}{365} \leq m^* \leq \frac{731}{365} \Rightarrow m^* = 2$$

ФОРМУЛА ПУАССОНА

У разі великої кількості n випробувань і малу ймовірність успіху (тобто p <0,1; np <10) замість формули Бернуллі прийнятну точність дає наближена формула Пуассона

$$P_n(m) \overset{n\cdot p\cdot q\geq 10}{\approx} \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \text{где} \quad \lambda = n \cdot p$$

Це пов'язано з тим, що можна отримати

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \forall 0 \leq m \leq n \quad \text{и} \quad 0 < \lambda < +\infty$$

Якщо кількість n випробувань Бернуллі велике, а ймовірність появи події A в кожному випробуванні занадто мала, то застосовують інші наближення формули Бернуллі.

Пуассон, Симеон Дени

Симео́н Дени́ Пуассо́н (21 июня 1781, Питивье, Франция — 25 апреля 1840, Со, Франция) — французский математик, механик и физик.

ПРИКЛАД

Телефонна станція обслуговую 2000
Абонентів. Ймовірність того, що абонент подзвонить впродовж години дорівнюе 0,003. Яка ймовірність того, що впродовж години Подзвонять 5 абонентів?

$$\{a = np = 2000 \cdot 0.003 \Rightarrow$$

$$P_5 = \frac{6^5 \cdot e^{-6}}{5!} \approx 0.13\}$$

ЛОКАЛЬНА ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Імовірність того, що в n (n >> 1) незалежних випробуваннях Бернуллі подія А відбудеться рівно m раз, може бути знайдена за наближеною формулою

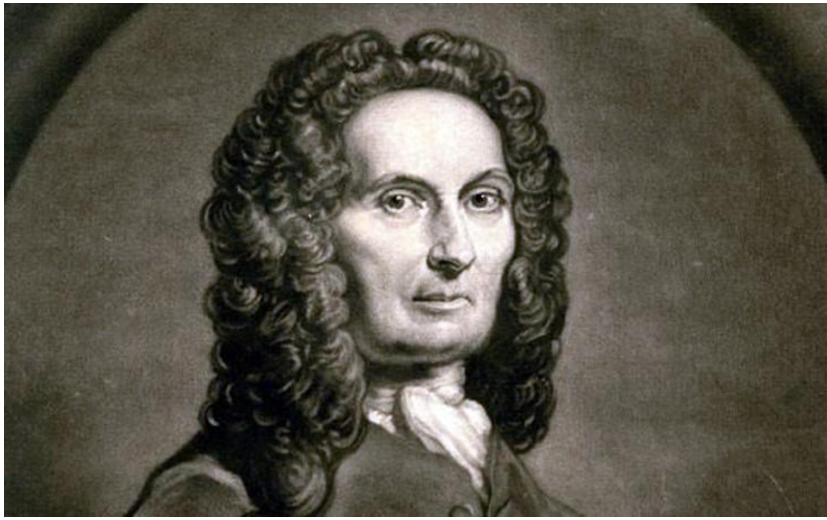
$$p_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

де p - ймовірність появи події А в кожному випробуванні;

q=1-p

Абрахам де Муавр

Абрахам де Муавр (26 травня 1667, Вітрі-ле-Франсуа, Шампань, Франція — 27 листопада 1754, Лондон, Англія) — англійський математик французького походження. Відомий переважно через формулу Муавра, працями на теми нормального розподілу та теорії ймовірностей. Член Лондонського королівського товариства з 1697 року, Паризької (1754) та Берлінської (1735) академій наук.



П'єр-Симон Лаплас

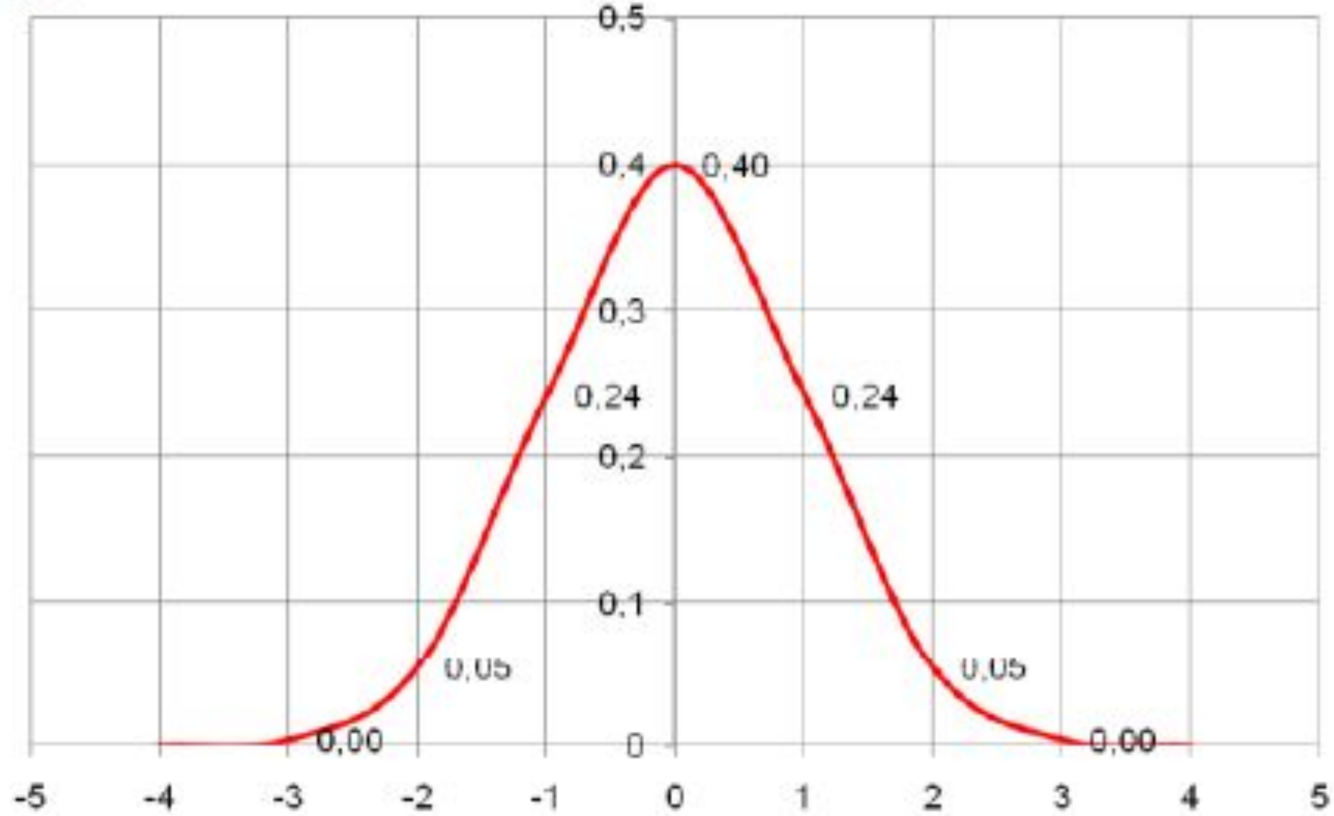
П'єр-Сімо́н Лапла́с (23 березня 1749 — 5 березня 1827) — французький математик і астроном; відомий своїми працями в галузі диференційних рівнянь, один із творців теорії ймовірностей.

У працях з математичної астрономії Лаплас вивчав рух планет і довів стійкість Сонячної системи.

У філософії Лаплас був прибічником детермінізму. Він був прихильником постулату про те, що якби якась розумна істота мала можливість дізнатися положення і швидкість усіх часток у світі в певний момент, вона б могла з абсолютною точністю передбачати перебіг еволюції Всесвіту.

Така гіпотетична істота була пізніше названа демоном Лапласа.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$$ - Функція Гаусса



1. парна
2. при *x*≥4 можна вважати рівній 0.

Карл Фрідріх Гаусс

Йога́нн Карл Фрі́дріх Га́усс (30 квітня 1777, Брауншвейг — 23 лютого 1855, Геттінген) — німецький математик, астроном, геодезист та фізик.

ПРИКЛАД

Ймовірність потрапляння в мішень при одному пострілі для даного стрілка 0,7. Яка ймовірність попасти 160 разів При 200 пострілах?

$$\{x = \frac{160 - 200 * 0.7}{\sqrt{200 * 0.7 * 0.3}} \approx \frac{20}{6.48} \approx 3.1$$

$$\varphi(3.1) \approx 0.0033$$

$$P_{200}(160) \approx \frac{1}{6.48} \cdot 0.0033 \approx 0.0005\}$$

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

x	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3,	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0030	0020
4,	0001									

$x = 3.1$

ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМА Муавра-Лапласа

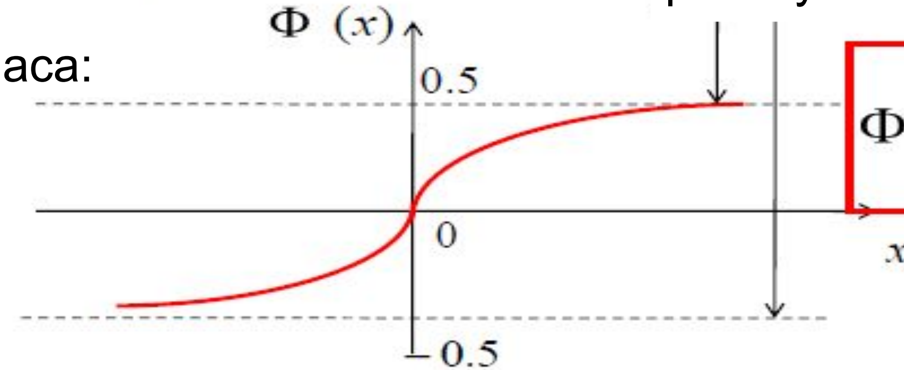
Імовірність того, що в n (n >> 1) незалежних випробуваннях подія А відбудеться від m1 до m2 раз, може бути знайдена за наближеною формулою

$$p_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

p - ймовірність появи події А в кожному випробуванні;   q=1-p

Нормована функція Лапласа:

Інтеграл Пуассона



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

1. Непарна:: $\Phi(x) = -\Phi(-x)$
2. При *x>5 можна вважати рівній 0.5*

ПРИКЛАД

Цех у середньому випускає 96% продукціївищого сорту.
Під час прийому продукції перевіряють 200 виробів. Якщо
серед них більше 10 не вищого сорту, то всю партію
Повертають до цеху.
Яка ймовірність того, що партія буде прийнята?

$$\{x_1 = \frac{0 - 200 * 0.04}{\sqrt{200 * 0.04 * 0.96}} \approx -2.9,$$

$$x_2 = \frac{10 - 200 * 0.04}{\sqrt{200 * 0.04 * 0.96}} \approx 0.72$$

Із таблиці

$$P_{200}(0 \le m \le 10) = \underline{\Phi\ (0.72)} - \underline{\Phi\ (-2.9)}$$

$$= \quad 0.2642 + 0.4981 = 0.7623\}$$

Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$x_2 = 0.72$

$x_1 = 2.9$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
	Десятые доли x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000[1]

ТЕОРЕМИ МУАВРА-ЛАПЛАСА

Зауваження

Локальна і інтегральна теореми Муавра-Лапласа забезпечують прийнятну точність, якщо ймовірність р кожного успіху задовольняє обмеженням:

$$p > \frac{1}{n+1} \quad \text{або} \quad p < \frac{n}{n+1}$$

Тобто, р не дуже мала і не близька до одиниці