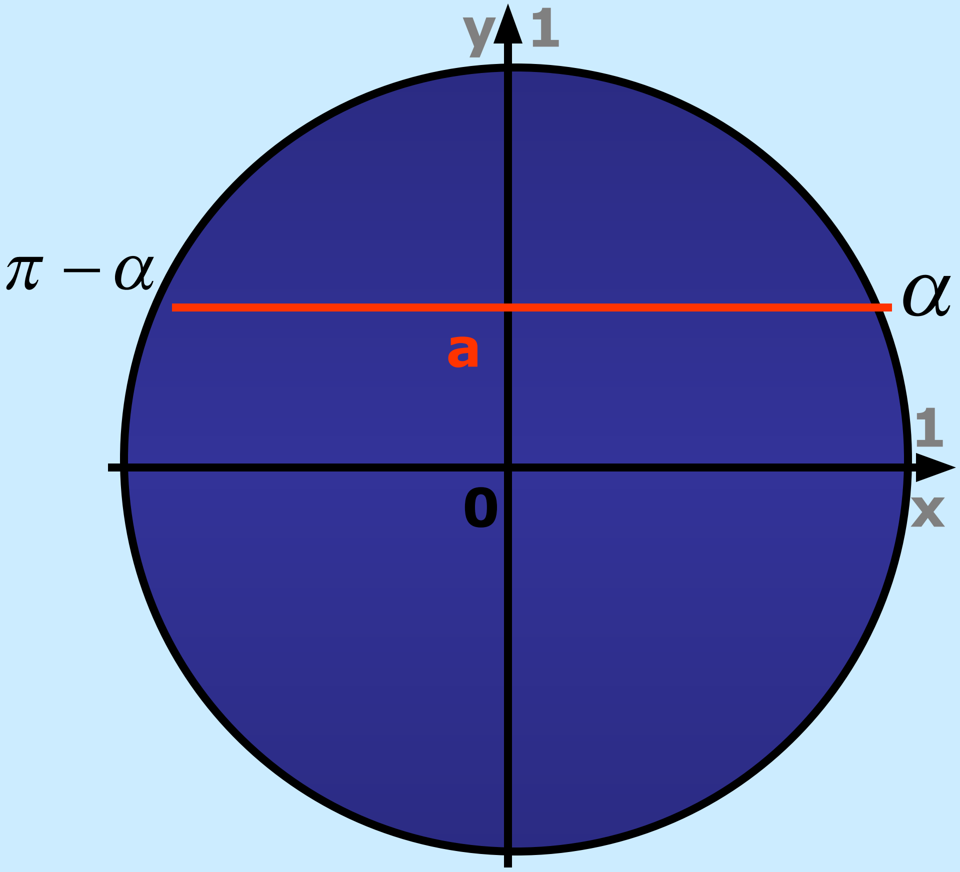
Решение уравнений sinx=a. Понятие арксинуса числа.

Преподаватель математики СПб СВУ МО РФ
Лошак В.С.

Уравнение sin x=a



$$\sin x = a; |a| \leq 1.$$

$$x = \alpha + 2\pi k;$$

$$x = \pi - \alpha + 2\pi k;$$

$$k \in Z.$$

$$\alpha = \arcsin a$$

АРКСИНУС ЧИСЛА

Определение. **Арксинусом числа** $a \in [-1;1]$ **называется такое число** $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, **синус которого равен** a

$$\sin(\arcsin a) = a,$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2},$$

$$-1 \le a \le 1$$

АРКСИНУС ЧИСЛА

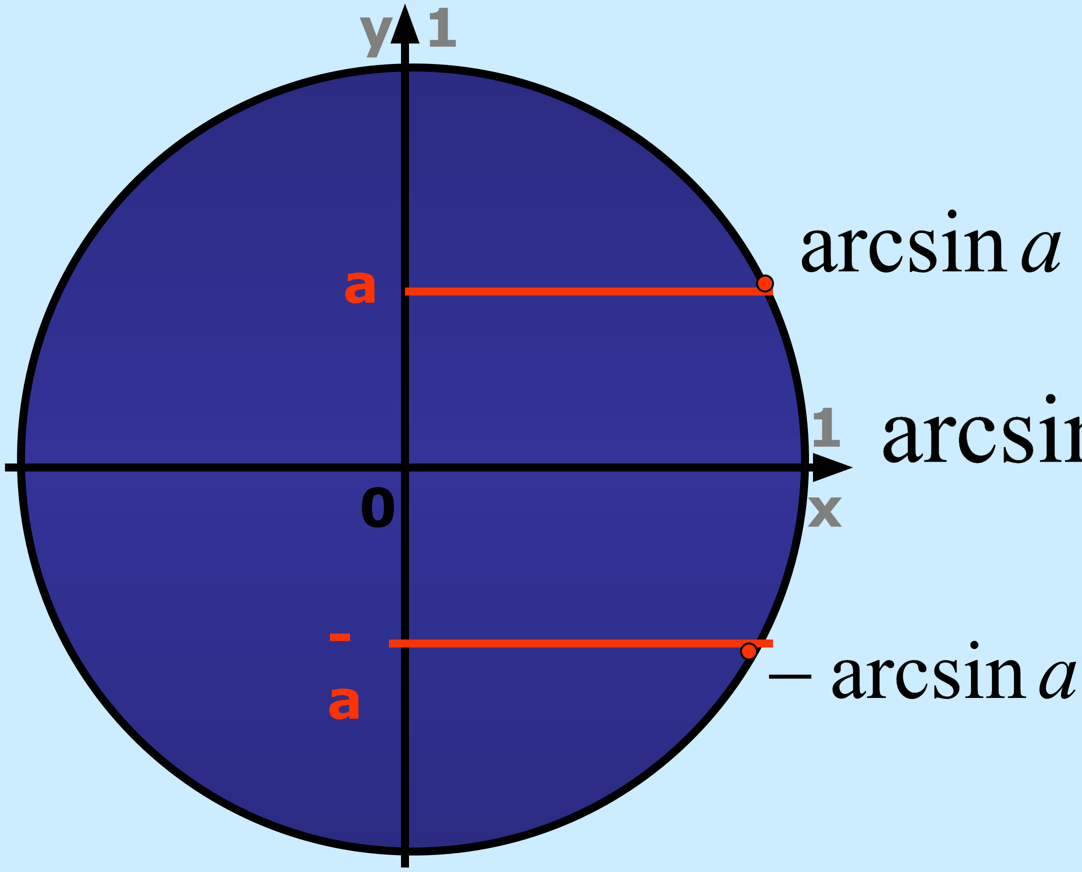
- **Например**

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};$$ **т. к.** $$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2};\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\arcsin 0=0;$$ **т. к.** $$-\frac{\pi}{2}\le 0\le\frac{\pi}{2};\sin 0=0.$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3};$$ **т. к.** $$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2};\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

АРКСИНУС ЧИСЛА
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ



$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

АРКСИНУС ЧИСЛА
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

- **Например**

1. $3\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=3\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\arcsin\frac{1}{2}=$

$=3\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{12}\pi$

2. $\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\arcsin 1+\sqrt{5}\arcsin 0=$

$=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot\frac{\pi}{2}+\sqrt{5}\cdot 0=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{7}{6}\pi$

АРКСИНУС ЧИСЛА
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\alpha = \arcsin a \qquad \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin a)} = \sqrt{1-a^2}$$

АРКСИНУС ЧИСЛА
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

sin(arcsina) = a

- **Например**

3. $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **4.** $\sin\left(\arcsin\frac{6}{7}\right) = \frac{6}{7}$

5. $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)\right) = \sqrt{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{25}} =$

$\sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

cos(arcsin a) = $\sqrt{1-a^2}$

АРКСИНУС ЧИСЛА
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin(\arcsin a) = a, \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], a \in [-1;1]$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$$

$$\arcsin(\sin \alpha) = \alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

АРКСИНУС ЧИСЛА
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

- **Например**

7. $$tg\left(5\cdot\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)= \quad tg\frac{5}{4}\pi = \quad tg\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)= \quad tg\frac{\pi}{4}=1$$

8. $$ctg\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)= \quad \frac{\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}= \quad \frac{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}}=$$

$$\sqrt{\frac{8}{9}}\cdot 3= \quad 2\sqrt{2}$$

АРКСИНУС ЧИСЛА
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

$$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha, \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

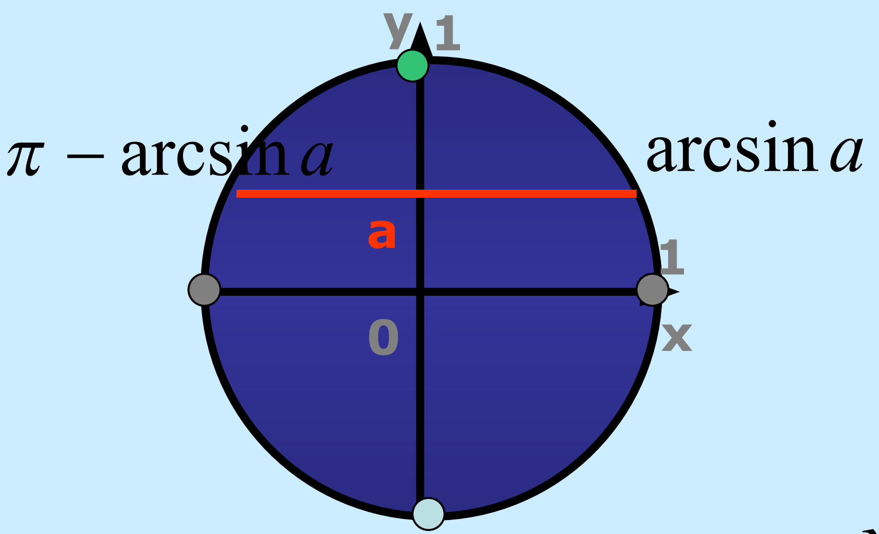
- **Например**

9. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{5}$

10. $\arcsin\left(\sin\frac{3}{5}\pi\right)=\arcsin\left(\sin\left(\pi-\frac{2}{5}\pi\right)\right)=$

$\arcsin\left(\sin\frac{2}{5}\pi\right)=\frac{2}{5}\pi$

Уравнение sinx=a



$$\sin x = a, |a| \le 1$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k, k \in Z$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

Уравнение sinx=a

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$$

Пусть n-чётное число, n=2k, тогда

$$x = (-1)^{2k} \cdot \arcsin a + 2\pi k = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$$

Пусть n-нечётное число, n=2k+1, тогда

$$x = (-1)^{2k+1} \cdot \arcsin a + \pi \cdot (2k+1) = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$$

**Ита
к**

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{array} \right., k \in Z$$

Уравнение sinx=a

- **Пример 1.** $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \\ 2x = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \end{array}\right. ;\quad \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. ;\quad \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k \end{array}\right. , k \in Z.$$

или

$$2x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n;$$

$$2x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n \;;$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Уравнение sinx=a

Пример 2.

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\pi k \\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\pi k \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi k \\ x-\frac{\pi}{4}=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi k \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi k \\ x-\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}+2\pi k \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x=2\pi k \\ x=\frac{3}{2}\pi+2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Уравнение sinx=a

- **Пример 2.**

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left[\begin{aligned}&x=2\pi k\\&x=\frac{3}{2}\pi+2\pi k, k\in Z.\end{aligned}\right.$$

или

$$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\cdot\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi n;$$

$$x=(-1)^n\cdot\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{4}+\pi n;$$

$$x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$$

Уравнение sinx=a

- **Пример 3.**

$$\left(3\sin x - 1\right)\cdot\left(2\sin x + 1\right) = 0$$

$$3\sin x - 1 = 0;$$

$$\sin x = \frac{1}{3};$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z.$$

$$2\sin x + 1 = 0;$$

$$\sin x = -\frac{1}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \\ x = \pi + \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k \end{array}\right., k \in Z.$$

Уравнение sinx=a

- **Пример 4.**

$$\sin x + \sqrt{2}\cos x + \sin 3x = 0$$

$$\left(\sin x + \sin 3x\right) + \sqrt{2}\cos x = 0$$

$$2\sin 2x \cdot \cos x + \sqrt{2}\cos x = 0$$

$$\cos x \cdot \left(2\sin 2x + \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\cos x = 0$$

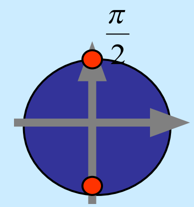
$$2\sin 2x + \sqrt{2} = 0$$

Уравнение sinx=a

- **Пример 4.**

$$\sin x + \sqrt{2}\cos x + \sin 3x = 0$$

$$\cos x = 0$$



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

$$2\sin 2x + \sqrt{2} = 0$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + \pi n \\ x = \frac{5}{8}\pi + \pi n \end{array}\right., n \in Z.$$