

# ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Пусть проводятся  $n$  независимых испытаний, причем вероятность появления события  $A$  в каждом испытании равна одному и тому же числу  $p$ .

**Определение 1.** Испытания, проводящиеся в одних и тех же условиях и с одинаковой вероятностью наступления события  $A$  в каждом испытании, называются **повторными независимыми испытаниями**.

В повторных независимых испытаниях

основным объектом внимания является вероятность числа наступлений события  $A$ . Пусть  $P(A) = p$ .

Вероятность того, что событие  $A$  появится  $m$  раз в  $n$  независимых испытаниях обозначается  $P_{n,m}$  и определяется формулой **Бернулли**.

**Формула Бернулли:**

$$P_{n,m} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где  $q = 1 - p$ ,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Формула Бернулли является точной формулой и может применяться при любых  $n$ , но, как правило, применяется при  $n \leq 10$ .

**Задача.** В некоторой местности вероятность солнечных дней в марте равна 0.6. Найти вероятность того, что на следующей неделе будут:

а) два пасмурных дня;

б) не более двух пасмурных дней.

Дано:

$$p = P(A) = 0.4$$

$$q = P(\bar{A}) = 0.6$$

$A = \{\text{пасмурный день}\},$

$\bar{A} = \{\text{солнечный день}\}.$

а)  $m = 2$

$$n = 7$$

$$a) m = 2$$

$$b) m \leq 2$$

---

$$P_{7,2} = ?$$

$$P_{7,(m \leq 2)} = ?$$

$$P_{7,2} = C_7^2 \cdot p^2 q^{7-2} =$$

$$= \frac{7!}{2!5!} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^5 =$$

$$= 21 \cdot 0.16 \cdot 0.07776 = 0.2613$$

$$b) m \leq 2 \quad (m = 0 \text{ или } 1 \text{ или } 2)$$

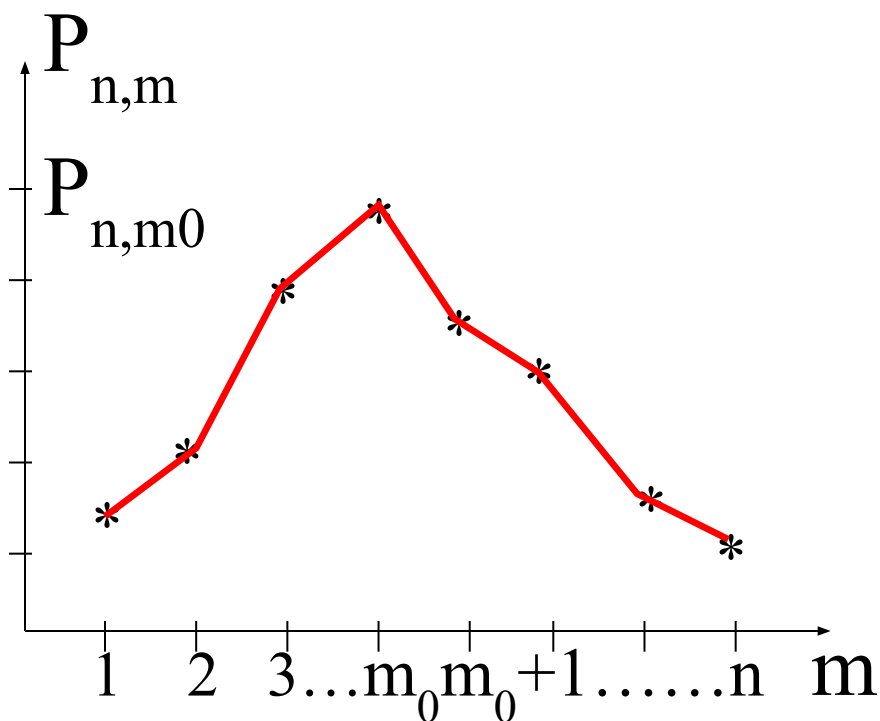
$$\begin{aligned} P_{7,(m \leq 2)} &= P_{7,0} + P_{7,1} + P_{7,2} = C_7^0 \cdot p^0 q^{7-0} + \\ &+ C_7^1 \cdot p^1 q^{7-1} + C_7^2 \cdot p^2 q^{7-2} = \frac{7!}{0!7!} \cdot 1 \cdot 0.6^7 + \\ &+ \frac{7!}{1!6!} \cdot 0.4 \cdot 0.6^6 + \frac{7!}{2!5!} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^5 = \end{aligned}$$

$$= 0.02799 + 0.13064 + 0.26127 = 0.4199$$

## Наивероятнейшее число наступлений события

Пусть проводятся  $n$  независимых испытаний. Событие  $A$  может появиться в  $n$  испытаниях 1 раз с вероятностью  $P_{n,1}$ , 2 раза – с вероятностью  $P_{n,2}$ , 3 раза – с вероятностью  $P_{n,3}, \dots$ ,  $m$  раз - с вероятностью  $P_{n,m}, \dots$ ,  $n$  раз - с вероятностью  $P_{n,n}$ . Вычислив все эти вероятности, можно найти наибольшую вероятность числа наступлений события  $A$ .

**Определение.** Число  $m = m_0$ , при котором вероятность  $P_{n,m}$  наступления события  $A$   $m$  раз в  $n$  испытаниях – наибольшая, называется **наивероятнейшим числом** (или **наивероятнейшей частотой**) наступлений события.



Здесь  $m$  – целое число.

$$nr - q \leq m_0 \leq nr + p$$

В этой формуле

$$(nr + p) - (nr - q) = p + q = 1.$$

- a)* если  $nr - q$  – целое, то  $m_0$  – определяется единственным образом;
- b)* если  $nr + p$  не целое, то  $m_0$  – определяется единственным образом;
- c)* если  $nr + p$  и  $nr - q$  – целые, то существуют два наивероятнейших числа  $m_{01}$  и  $m_{02}$ , отличающиеся на 1, и

$$P_n(m_{01} \text{ или } m_{02}) = P_{n,m_{01}} + P_{n,m_{02}}.$$

Например:

Если  $16,4 \leq m_0 \leq 17,4$ , то  $m_0 = 17$ .

Если  $13 \leq m_0 \leq 14$ , то  $m_{01} = 13$ ,  $m_{02} = 14$ .

**Задача.** Вероятность выигрыша на 1 билет лотереи равна 0,3. Определить наиболее вероятное число выигрышей на 8 билетов и вероятность этого числа выигрышей.

Дано:

$$p=0,3; q=0,7$$

$$n = 8$$

$$m_0 = ?$$

$$P_{n,m_0} = ?$$

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

$$8 \cdot 0,3 - 0,7 \leq m_0 \leq 8 \cdot 0,3 + 0,3$$

$$1,7 \leq m_0 \leq 2,7$$

$$m_0 = 2$$



$$P_{n,m0} = C_8^2 \cdot p^2 \cdot q^{8-2} = \frac{8!}{2!6!} * 0.3^2 \cdot 0.7^6 = 0.296.$$

## Локальная теорема Лапласа ( $n > 10$ )

**Теорема.** Если вероятность события  $A$  в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1 (т. е.  $p \neq 0, p \neq 1$ ), то

$$P_{n,m} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Здесь

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

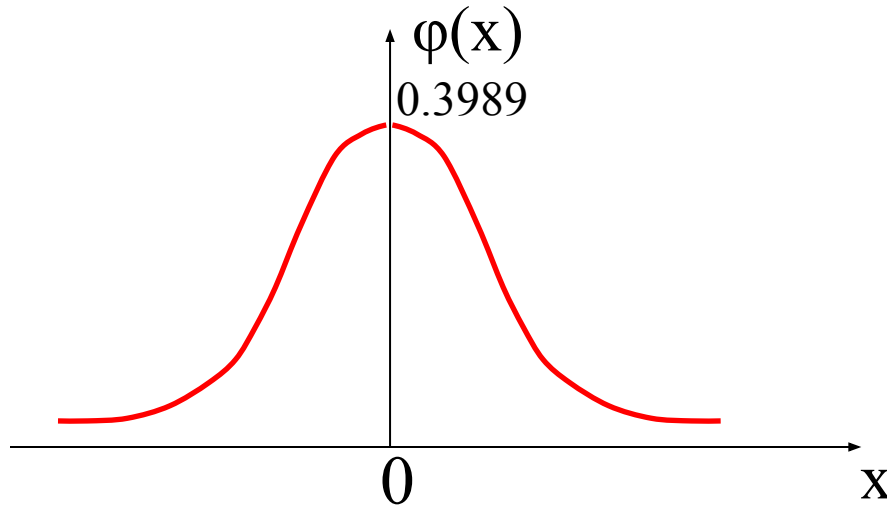
Отсюда

$$P_{n,m} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

### Свойства малой функции Лапласа $\varphi(x)$ .

- 1). Функция  $\varphi(x)$  – четна:  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ ;
- 2).  $\max \varphi(x) = \varphi(0) = 0.3989$ ;
- 3).  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ ;
- 4) При  $x > 4.5$   $\varphi(x) = 0$ .

5) Значения функции  $\varphi(x)$  табулированы и приведены в **Приложении 1**.



## Алгоритм вычисления

Дано:

$p; n; m$

$P_{n,m} = ?$

1.  $q = 1 - p;$

2.  $\sqrt{npq}$

$$3. x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}};$$

4.  $\varphi(x)$  – по таблице;

$$5. P_{n,m} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}.$$

**Задача.** Вероятность того, что посаженное дерево приживется, равна 0.8. Посажено 100 деревьев. Найти количество деревьев, которые приживутся, если вероятность такого числа равна 0.01087.

Дано:

$$p = 0.8$$

$$n = 100$$

$$P_{n,m} = 0.01087$$

$$m = ?$$

$$q = 1 - 0.8 = 0.2.$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 * 0.8 * 0.2} = 4$$

$$P_{n,m} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = 0.01087$$

$$\varphi(x) = \sqrt{npq} * 0.01087 =$$

$$= 4 * 0.01087 = 0.04348.$$

По таблице Приложения 1 находим  $x = 2.1$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{m - 100 * 0.8}{4} = 2.1.$$

$$m - 80 = 2.1 * 4 = 8.4.$$

$$m = 80 + 8.4 = 88.$$

## Интегральная теорема Лапласа ( $n > 10$ )

**Теорема.** Если вероятность события  $A$  в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1 ( $p \neq 0, p \neq 1$ ), то вероятность того, что в  $n$  испытаниях событие  $A$  появится от  $a$  до  $b$  раз

приблизительно равна:

$$P(a \leq m \leq b) \approx \frac{1}{2} (\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)),$$

где

$$\alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad \beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}},$$

Функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Этот интеграл – неберущийся, значения функции

$\Phi(x)$  приведены в таблице **Приложения 2.**

## **Свойства функции Лапласа $\Phi(x)$ .**

1).  $\Phi(x)$  – нечетна:  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ;

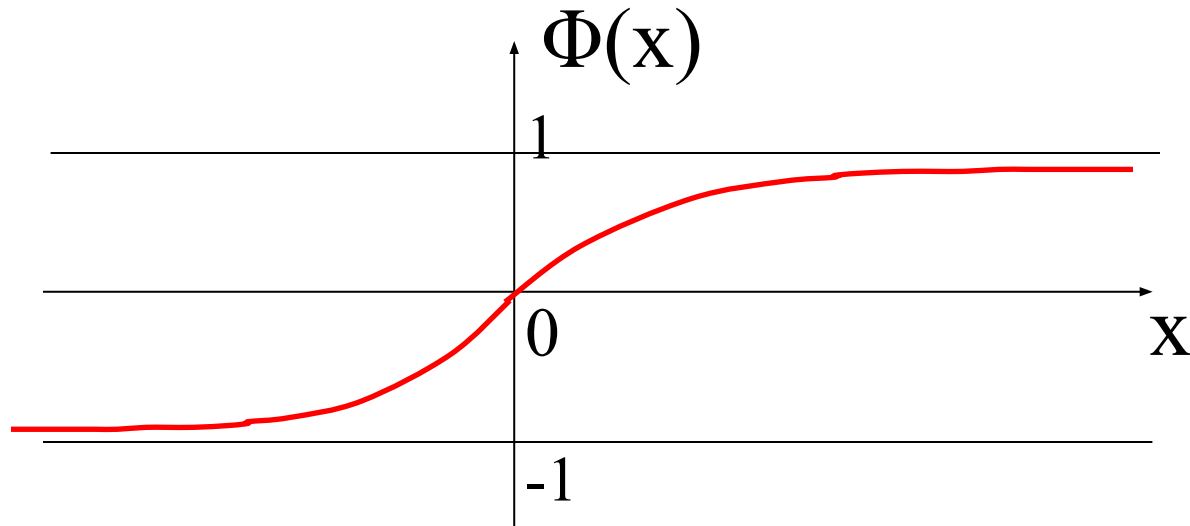
2).  $\Phi(x)$  – возрастает;

3).  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1$ ;

4). При  $x > 4.5$   $\Phi(x) = 1$ .

5).  $\Phi(2) = 0.9545$ ,  $\Phi(3) = 0.9973$ .





**Задача.** По данным длительной проверки качества продукции брак составляет 8%. Определить вероятность того, что в непроверенной партии из 300 изделий число бракованных изделий будет от 14 до 22 штук.

Дано:

$$p = 0.08$$

$$n = 300$$

$$a = 14, b = 22$$

$$P(a \leq m \leq b) = ?$$

$$q = 1 - p = 0.92$$

$$\beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} =$$

$$= \frac{22 - 300 * 0.08}{\sqrt{300 * 0.08 * 0.92}} = -\frac{2}{4.699} = -0.43$$

$$\alpha = \frac{14 - 300 * 0.08}{\sqrt{300 * 0.08 * 0.92}} = -\frac{10}{4.699} = -2.13$$

$$P(a \leq m \leq b) = \frac{1}{2} (\Phi(-0.43) - \Phi(-2.13)) =$$

$$= \frac{1}{2} (-0.3328 + 0.9668) = 0.317.$$

## Следствие из интегральной теоремы Лапласа

**Теорема.** С вероятностью, близкой к  $\Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq})$  можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний  $n$  абсолютная величина отклонения относительной частоты  $\frac{m}{n}$  наступления события  $A$  от его вероятности  $p$  не превышает сколь угодно малого, положительного числа  $\varepsilon$ :

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx \Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq}) \approx \Phi(\beta)$$

Здесь  $\beta = \varepsilon\sqrt{n/pq}$

**Задача.** Вероятность того, что покупателю необходима мужская обувь 41-го размера, равна 0.2. Какова вероятность того, что среди 10000 покупателей доля тех, кому необходима обувь 41-го размера, отклонится от вероятности  $p = 0.2$  (по абсолютной величине) не более, чем на 0.005.

Дано:

$$p = 0.2$$

$$q = 0.8$$

$$n = 10000$$

$$\varepsilon = 0.005$$

---

$$P(A) = ?$$

$$A = \left\{ \left| \frac{m}{n} - 0.2 \right| \leq 0.005 \right\}$$

$$P\left( \left| \frac{m}{n} - 0.2 \right| \leq 0.005 \right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(0.005 \sqrt{\frac{10000}{0.2 * 0.8}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(1.25) \approx 0.7887$$