



# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.

## Часть I

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
ДЕФОРМИРУЕМЫХ  
СИСТЕМ

**2**

# ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Общий случай формулы Максвелла – Мора для перемещения от силовых воздействий:

$$\Delta_{iF} = \sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^{m_S} \int_{l_j} \frac{S_i S_F}{C_S} ds_j + \sum_{j=1}^u \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{c_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m_{M_z}} \int_{l_j} \frac{M_{z,i} M_{z,F}}{EI_z} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_y}} \int_{l_j} \frac{M_{y,i} M_{y,F}}{EI_y} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_t}} \int_{l_j} \frac{M_{t,i} M_{t,F}}{GI_t} ds_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} \frac{N_i N_F}{EA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_y}} \int_{l_j} k_{\text{ты}} \frac{Q_{y,i} Q_{y,F}}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_z}} \int_{l_j} k_{\text{tz}} \frac{Q_{z,i} Q_{z,F}}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^u \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{c_j}$$

$EI_z$  Изгиб
 $EI_y$  Изгиб
 $GI_t$  Кручение

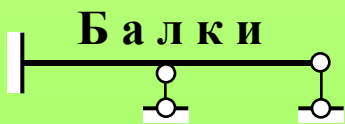
$EA$  Растяжение/сжатие
 $GA$  Сдвиг
 $GA$  Сдвиг

Частные случаи формулы Максвелла – Мора:

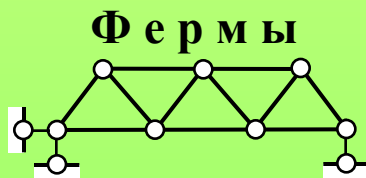
а) для плоской системы общего вида

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} \frac{M_i M_F}{EI} ds_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} \frac{N_i N_F}{EA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_Q} \int_{l_j} k_{\tau} \frac{Q_i Q_F}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^u \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{c_j}$$

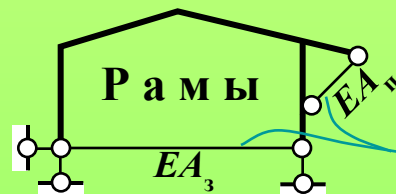
б) для стержневых систем разных типов



$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} \frac{M_i M_F}{EI} ds_j + \sum_{j=1}^{m_Q} \int_{l_j} k_{\tau} \frac{Q_i Q_F}{GA} ds_j + \Delta_{iF,c}$$



$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^{m_N} \frac{N_{j,i} N_{j,F}}{EA_j} l_j + \Delta_{iF,c}$$



$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} \frac{M_i M_F}{EI} ds_j + \sum_{j=1}^{m_Q} \int_{l_j} k_{\tau} \frac{Q_i Q_F}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_N} \frac{N_{j,i} N_{j,F}}{EA_j} l_j + \Delta_{iF,c}$$

$\Delta_{iF,c}$  – при наличии упругих связей

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА – МОРА

## Алгоритм вычисления перемещения по формуле Максвелла – Мора

1. Исходя из типа и особенностей рассматриваемой системы определяется, какие виды деформаций элементов должны быть учтены при вычислении перемещения; выбирается нужный вариант записи формулы Максвелла – Мора (общий или частный случай).
2. Рассматривается **действительное состояние** системы с определением входящих в выбранный вариант формулы М – М внутренних силовых факторов  $S_F$  и реакций  $R_{j,F}$  упругих связей (при их наличии) от заданных нагрузок.
3. Рассматривается **вспомогательное (фиктивное) состояние** системы с единичным воздействием соответствующего типа по направлению искомого перемещения; определяются внутренние силовые факторы  $S_i$  и реакции  $R_{j,i}$  упругих связей от единичного воздействия.
4. Найденные силовые факторы действительного и единичного состояний, представленные аналитически (функциональными выражениями внутренних усилий) или графически (в форме эпюр) используются в соответствующих членах формулы М – М; аналитически или численными способами выполняется вычисление интегралов.

**Примечания:** 1). Если результат вычисления по формуле М – М имеет знак «плюс», то искомое перемещение направлено в ту же сторону, что и назначенное единичное воздействие, в случае знака «минус» – в противоположную сторону.  
2). Вычисление интеграла в формуле М – М называется «*перемножением эпюр*».

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

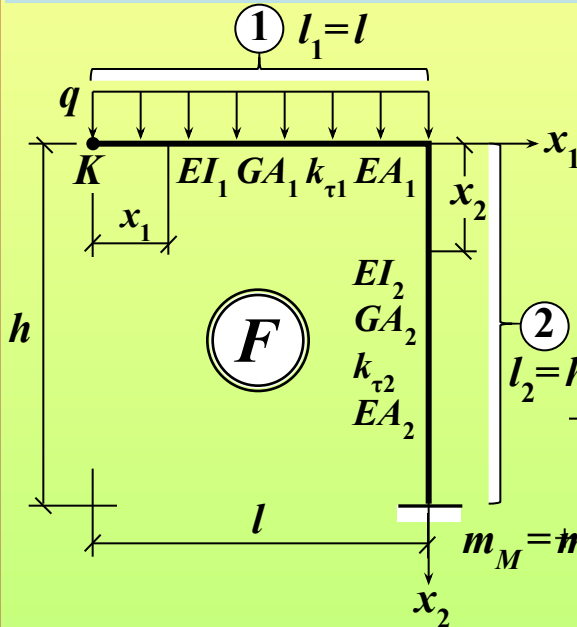
## Пример

Определить  $v_K$  (вертикальное перемещение точки  $K$ ).  
Сечения ригеля и стойки – постоянные (разные).

## Решение

1. Переобозначим искомого перемещения  $v_K = \Delta_{IF}$ .

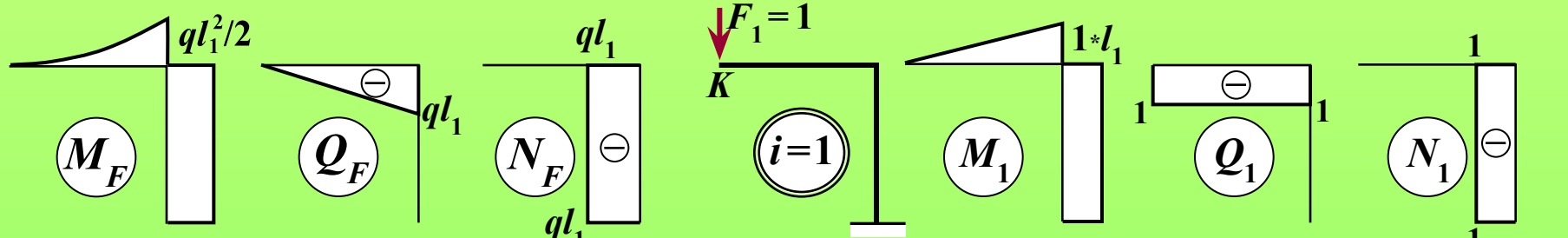
Формула Максвелла - Мора для плоской стержневой системы  $\Delta_{IF} = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_F(x_j) M(x_j)}{EI(x_j)} dx_j + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{k_\tau(x_j) Q_F(x_j) Q(x_j)}{GA(x_j)} dx_j + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{N_F(x_j) N(x_j)}{EA(x_j)} dx_j$  с учётом изгиба, сдвига и растяжения-сжатия элементов:



$$\Delta_{IF} = \int_0^l \frac{M_F(x_1) M(x_1)}{EI_1} dx_1 + \int_0^l \frac{k_{\tau 1} Q_F(x_1) Q(x_1)}{GA_1} dx_1 + \int_0^h \frac{N_F(x_2) N(x_2)}{EA_2} dx_2 + \int_0^h \frac{k_{\tau 2} Q_F(x_2) Q(x_2)}{GA_2} dx_2 + \int_0^h \frac{N_F(x_2) N(x_2)}{EA_2} dx_2$$

2. Рассматриваем действительное (грузовое) состояние системы – определяем внутренние силовые факторы  $M_F$ ,  $Q_F$  и  $N_F$ .

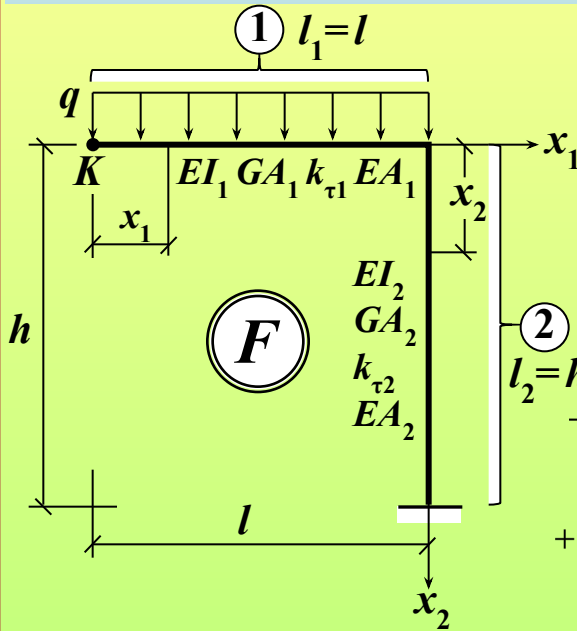
3. Рассматриваем вспомогательное (фиктивное) состояние системы « $i=1$ » с единичным воздействием по направлению искомого перемещения (силой  $F_1 = 1$ ) – определяем внутренние силовые факторы  $M_1$ ,  $Q_1$  и  $N_1$ .



$$M_F(x_j) = \begin{cases} -qx^2/2, & (0 \leq x_1 \leq l) \\ +ql^2/2; & (0 \leq x_2 \leq l_2) \end{cases}, \quad Q_F(x_j) = \begin{cases} -qx_1, & (0 \leq x_1 \leq l) \\ 0; & (0 \leq x_2 \leq l_2) \end{cases}, \quad N_F(x_j) = \begin{cases} 0, & (0 \leq x_1 \leq l), \\ -ql; & (0 \leq x_2 \leq l_2) \end{cases}$$

$$M_1(x_j) = \begin{cases} -1 \cdot x_1, & (0 \leq x_1 \leq l) \\ +1 \cdot l_1; & (0 \leq x_2 \leq l_2) \end{cases}, \quad Q_1(x_j) = \begin{cases} -1, & (0 \leq x_1 \leq l) \\ 0; & (0 \leq x_2 \leq l_2) \end{cases}, \quad N_1(x_j) = \begin{cases} 0, & (0 \leq x_1 \leq l) \\ -1, & (0 \leq x_2 \leq l_2) \end{cases}$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА



## Пример

Определить  $v_K$  (вертикальное перемещение точки  $K$ ).  
Сечения ригеля и стойки – постоянные (разные).

## Решение

4. Вычисляем перемещение по формуле Максвелла - Мора:

$$v_K = \Delta_{1F} = \sum_{j=1}^2 \int_{l_j} \frac{M_1(x_j) M_F(x_j)}{EI(x_j)} dx_j + \sum_{j=1}^2 \int_{l_j} k_\tau(x_j) \frac{Q_1(x_j) Q_F(x_j)}{GA(x_j)} dx_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \int_{l_j} \frac{N_1(x_j) N_F(x_j)}{EA(x_j)} dx_j = \frac{1}{EI_1} \int_0^{l_1} (-x_1) \cdot (-qx_1^2/2) dx_1 + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l_2} l_1 \cdot (ql_1^2/2) dx_2 +$$

$$+ \frac{k_{\tau 1}}{GA_1} \int_0^{l_1} (-1) \cdot (-qx_1) dx_1 + \frac{k_{\tau 2}}{GA_2} \int_0^{l_2} 0 \cdot 0 \cdot dx_2 + \frac{1}{EA_1} \int_0^{l_1} 0 \cdot 0 \cdot dx_1 + \frac{1}{EA_2} \int_0^{l_2} (-1) \cdot (-ql_1) dx_2 =$$

$$= \frac{ql_1^4}{8EI_1} + \frac{ql_1^3 l_2}{2EI_2} + \frac{ql_1^2 k_{\tau 1}}{2GA_1} + \frac{ql_1 l_2}{EA_2} = \frac{ql_1^4}{8EI_1} \left( 1 + 4 \frac{EI_1}{EI_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) + \frac{ql_1^2 k_{\tau 1}}{2GA_1} \left( 1 + 2 \frac{GA_1}{k_{\tau 1} EA_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) =$$

$$= \frac{ql_1^4}{8EI_1} \left[ \left( 1 + 4 \frac{EI_1}{EI_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) + 4k_{\tau 1} \frac{EI_1}{GA_1 l_1^2} \left( 1 + 2 \frac{GA_1}{k_{\tau 1} EA_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) \right].$$

Учитывая, что  $E_1/G_1 = 2(1+\nu_1)$  ( $\nu_1$  – коэффициент Пуассона),  $I_1 = r_1^2 A_1 = (\eta_1 h_1)^2 A_1$  (здесь  $r_1$  – радиус инерции сечения,  $h_1$  – высота сечения на участке 1), получаем:

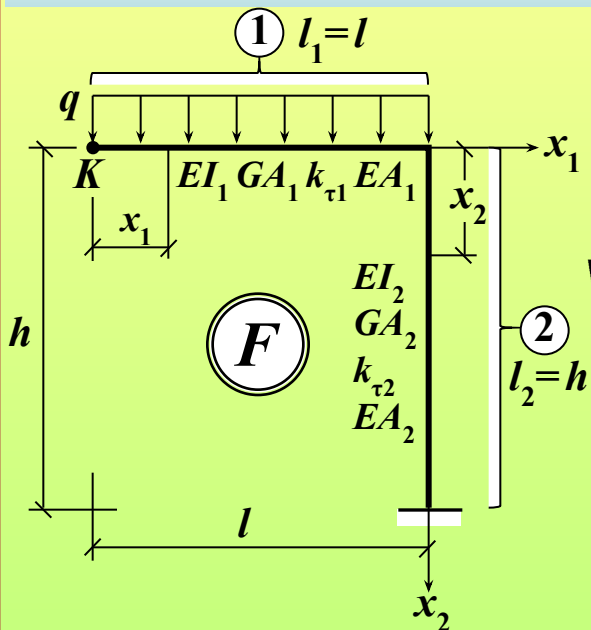
$$v_k = \frac{ql_1^4}{8EI_1} \left[ \underbrace{\left( 1 + 4 \frac{EI_1}{EI_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right)}_{\text{От изгиба}} + \underbrace{8(1 + \nu_1) k_{\tau 1} \left( \eta_1 \frac{h_1}{l_1} \right)^2}_{\text{От сдвига}} \left( 1 + 2 \frac{GA_1}{k_{\tau 1} EA_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) \right].$$

От изгиба

От сдвига

От укорочения  
стойки

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА



## Пример

Определить  $v_K$  (вертикальное перемещение точки  $K$ ).  
Сечения ригеля и стойки – постоянные (разные).

## Решение

$$v_k = \frac{ql_1^4}{8EI_1} \left[ \underbrace{\left(1 + 4 \frac{EI_1}{EI_2} \cdot \frac{l_2}{l_1}\right)}_{\text{От изгиба}} + \underbrace{8(1 + \nu_1)k_{\tau 1} \left(\eta_1 \frac{h_1}{l_1}\right)^2}_{\text{От сдвига}} \underbrace{\left(1 + 2 \frac{GA_1}{k_{\tau 1}EA_2} \cdot \frac{l_2}{l_1}\right)}_{\text{От сжатия}} \right].$$

От изгиба  
укорочения

От сдвига

От

стойки

Для количественной оценки вклада каждого вида деформации в определяемое перемещение рассмотрим случай, когда ригель

и стойка изготовлены из одного материала ( $E_1 = E_2, G_1 = G_2$ ):  $v_k = \frac{ql_1^4}{8EI_1} \left[ \left(1 + 4 \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{l_2}{l_1}\right) + 8(1 + \nu_1)k_{\tau 1} \left(\eta_1 \frac{h_1}{l_1}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{k_{\tau 1}(1 + \nu_1)} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{l_2}{l_1}\right) \right]$  для сечений от

Для большинства изотропных материалов  $\nu_1 = 0,15 \dots 0,3$ ; для прямоугольных

прямоугольных до двутавровых  $\eta_1 = 0,3 \dots 0,45$ ;  $k_{\tau 1} = 1,2 \dots 3$ , тогда

$$v_k = \frac{ql_1^4}{8EI_1} \left\{ \left(1 + 4 \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{l_2}{l_1}\right) + (0,99 \dots 6,32) \left(\frac{h_1}{l_1}\right)^2 \left[ 1 + (0,256 \dots 0,725) \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right] \right\}.$$

Если ригель и рама имеют одинаковые сечения ( $A_1 = A_2, I_1 = I_2$ ) и длины ( $l_1 = l_2$ ),

$$\text{то } v_k = \frac{5}{8} \cdot \frac{ql_1^4}{EI_1} \cdot \left[ 1 + (0,25 \dots 2,2) \cdot \left(\frac{h_1}{l_1}\right)^2 \right],$$

где второе слагаемое в скобках оценивает суммарный вклад в перемещение  $v_K$  деформации сдвига (в ригеле) и сжатия стойки. При обычных пропорциях колонн и ригелей рамных строительных конструкций  $h_1/l_1 = 1/8 \dots 1/15$ , и тогда доля перемещения за счёт сдвига и сжатия в сумме составляет  $0,25 \dots 3,4\%$  от перемещения, возникающего от деформации изгиба элементов. При этом вклад сдвига в  $1,4 \dots 4$  раза превышает вклад сжатия.

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ ( СПОСОБЫ) ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В ФОРМУЛЕ МАКСВЕЛЛА - МОРА

$$Int_j = \int_{l_j} \frac{S_i(x_j) \cdot S_F(x_j)}{C_S(x_j)} dx_j = \int_{l_j} \Phi(x_j) dx_j, \text{ где } \Phi(x_j) = f_1(x_j) \cdot f_2(x_j)$$

Возможные варианты:

а)  $f_1(x_j) = \frac{S_i(x_j)}{C_S(x_j)}, f_2(x_j) = S_F(x_j);$  б)  $f_1(x_j) = S_i(x_j), f_2(x_j) = \frac{S_F(x_j)}{C_S(x_j)};$

в) при  $C_S(x_j) = \text{const} = C_S : Int_j = \frac{1}{C_S} \int_{l_j} \underbrace{S_i(x_j)}_{f_1(x_j)} \cdot \underbrace{S_F(x_j)}_{f_2(x_j)} dx_j$

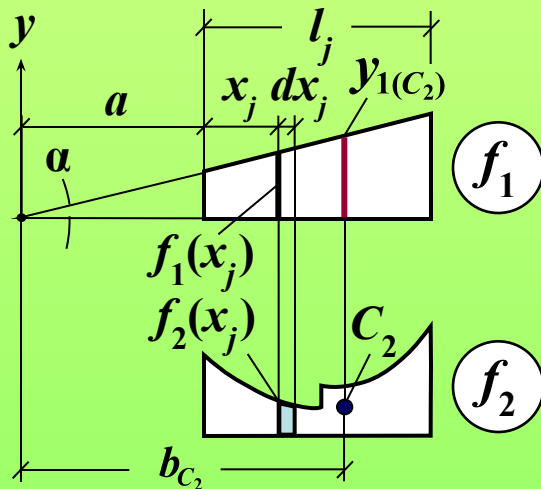
## Правило Верещагина

(А.К. Верещагин, 1925)

Условие применимости:

одна из функций ( $f_1$ ) – линейная

(при этом  $f_2$  может быть любой – сложной или линейной)



Результат «перемножения эюр»  $f_1$  и  $f_2$ , из которых одна ( $f_1$ ) линейная, равен произведению площади «сложной» эюр ( $f_2$ ) на ординату линейной эюр в месте расположения центра тяжести «сложной»:

$$\int_{l_j} f_1(x_j) \cdot f_2(x_j) dx_j = \omega_{f_2} \cdot y_{1(C_2)}$$

$$\int_{l_j} f_1(x_j) \cdot f_2(x_j) dx_j = \omega_{f_2} \cdot y_{1(C_2)}$$

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ ( СПОСОБЫ) ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В ФОРМУЛЕ МАКСВЕЛЛА - МОРА

$$Int_j = \int_{l_j} \frac{S_i(x_j) \cdot S_F(x_j)}{C_S(x_j)} dx_j = \int_{l_j} \Phi(x_j) dx_j$$

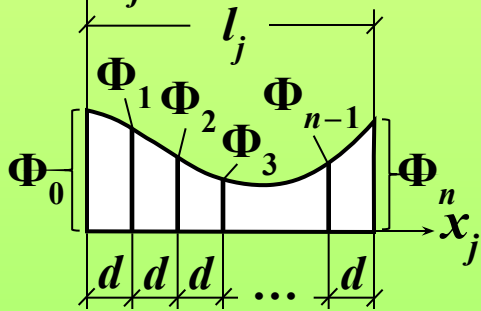
Возможные варианты:  
 а)  $\Phi(x_j) = \frac{S_i(x_j) \cdot S_F(x_j)}{C_S(x_j)}$ ; б) при  $C_S(x_j) = \text{const} = C_S : \Phi(x_j) = S_i(x_j) \cdot S_F(x_j)$

## Формула Симпсона

(T. Simpson, 1710 – 1761)

**Условие применимости:**  
 единое аналитическое выражение функции  $\Phi(x_j)$  в интервале [

$0; l_j]$



### Общий случай:

интервал интегрирования разбивается на  $n$  равных участков ( $n - \text{чётное}$ )

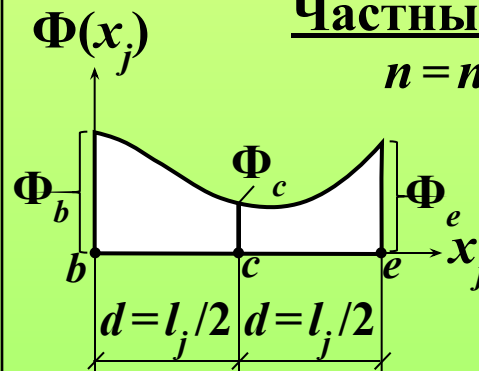
$$\int_{l_j} \Phi(x_j) dx_j \approx$$

$$\approx \frac{l_j}{3n} \left[ \Phi_0 + 4(\Phi_1 + \Phi_3 + \dots + \Phi_{n-1}) + 2(\Phi_2 + \Phi_4 + \dots + \Phi_{n-2}) + \Phi_n \right]$$

**Свойство:** если  $\Phi(x_j)$  – полином до 3-й степени включительно, то результат – **ТОЧНЫЙ**.

### Частный случай:

$$n = n_{\min} = 2$$



$$\int_{l_j} \Phi(x_j) dx_j \approx \frac{l_j}{6} (\Phi_b + 4\Phi_c + \Phi_e)$$

Так как  $\Phi(x_j) = f_1(x_j) \cdot f_2(x_j)$ , то

$$\int_{l_j} \Phi(x_j) dx_j \approx \frac{l_j}{6} (f_{1,b}f_{2,b} + 4f_{1,c}f_{2,c} + f_{1,e}f_{2,e})$$



# ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ (СПОСОБЫ) ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В ФОРМУЛЕ МАКСВЕЛЛА - МОРА

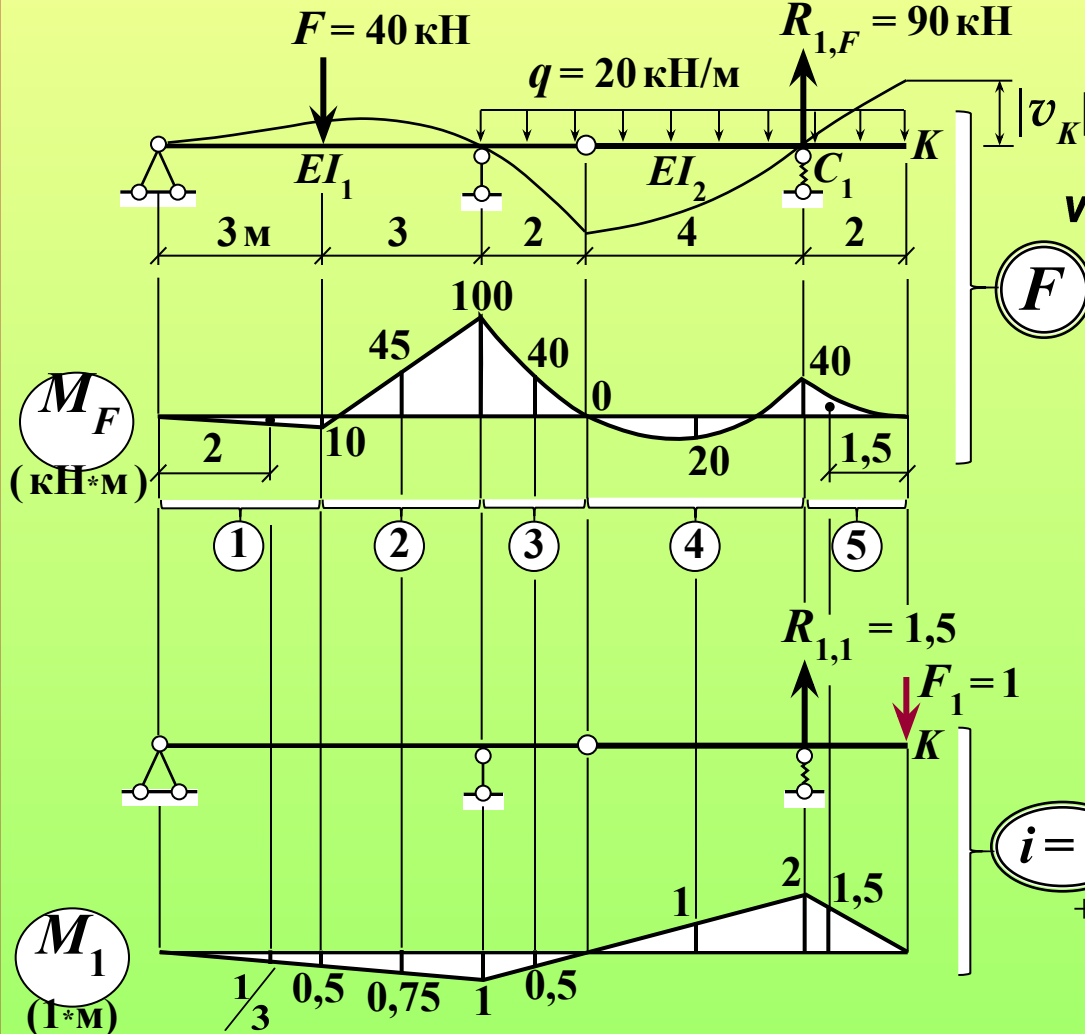
## Пример

Требуется:

определить вертикальное перемещение  $v_K$  точки  $K$ .

$$EI_2 = 2EI_1; C_1 = 5\text{м}^{-3}EI_1$$

$$v_K = \Delta_{1F} = \sum_{j=1}^5 \int_{l_j} \frac{M_1 M_F}{EI_j} dx_j + \frac{R_{1,1} R_{1,F}}{C_1}.$$



Интегралы в формуле Максвелла – Мора вычисляем

на участках 1 и 5 по **правилу Верещагина**, а на участках 2, 3 и 4 – по **формуле Симпсона**:

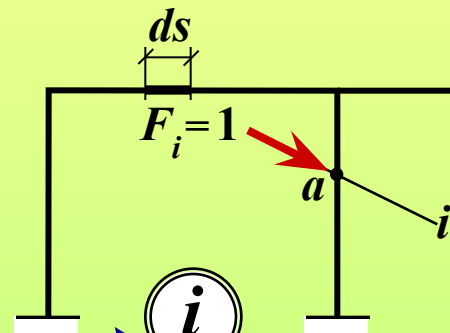
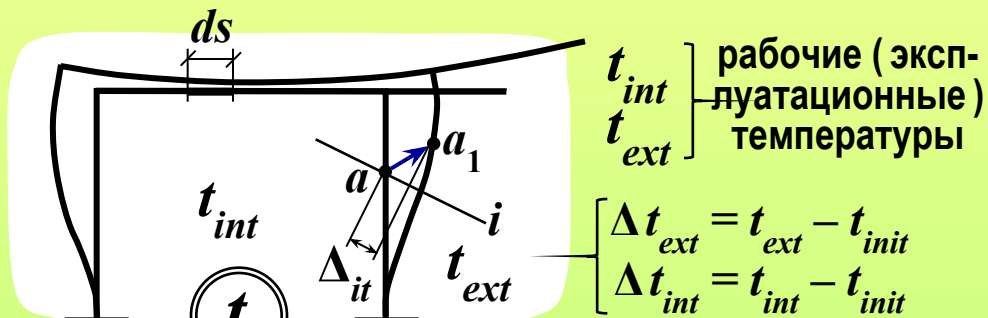
$$v_K = \Delta_{1F} = \frac{1 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EI_1} \cdot \left\{ \frac{10 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \cdot [10 \cdot 0,5 + 4 \cdot (-45) \cdot 0,75 + (-100) \cdot 1] + \frac{2}{6} \cdot [(-100) \cdot 1 + 4 \cdot (-40) \cdot 0,5 + 0 \cdot 0] \right\} + \frac{1 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EI_2} \cdot \left\{ \frac{4}{6} \cdot [0 \cdot 0 + 4 \cdot 20 \cdot (-1) + (-40) \cdot (-2)] + \frac{1}{3} \cdot (-40) \cdot 2 \cdot (-1,5) \right\} + \frac{90 \text{ кН} \cdot 1,5}{C_1} = -\frac{170 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EI_1} + \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EI_2} + \frac{135 \text{ кН}}{C_1} = \left( -170 + \frac{40}{2} + \frac{135}{5} \right) \frac{\text{кН} \cdot \text{м}^3}{EI_1} = -\frac{123 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EI_1}.$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Наиболее эффективно  
недеформированное  
после изменения температуры

$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



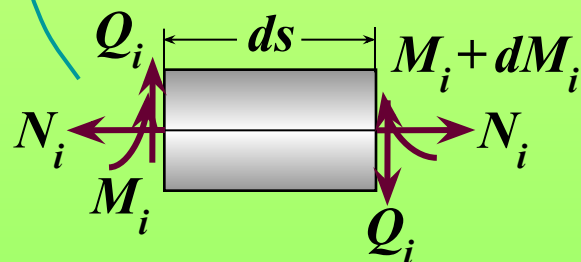
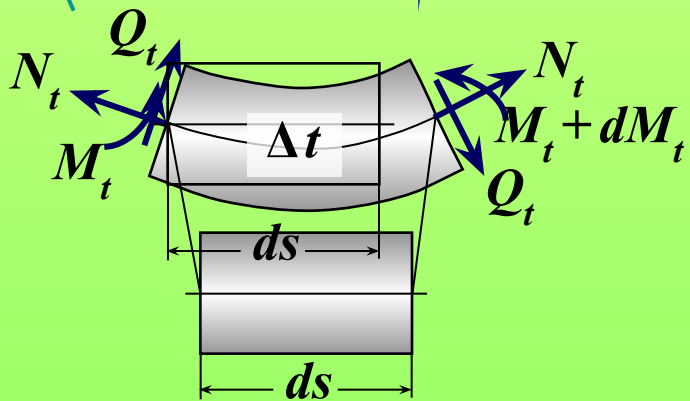
Равновесные состояния

$$W_{ext,ti} + W_{int,ti} = 0$$

$$W_{int,ti} = 0$$

$$W_{ext,it} + W_{int,it} = 0$$

$$\Delta t_{it} = -W_{int,it}$$

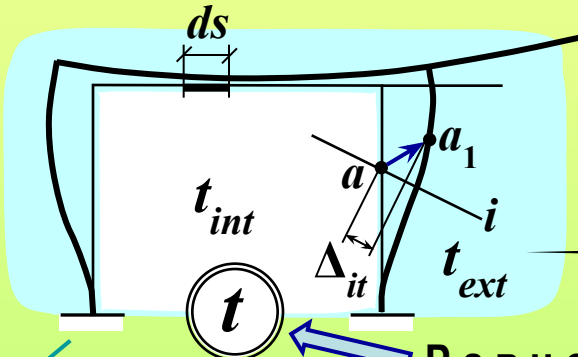


# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

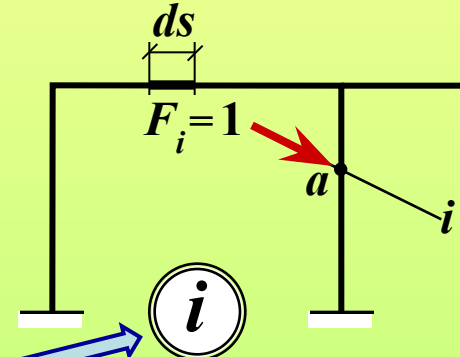
$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



$t_{int}$   
 $t_{ext}$  } рабочие (эксплуатационные) температуры

$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$



Равновесные состояния

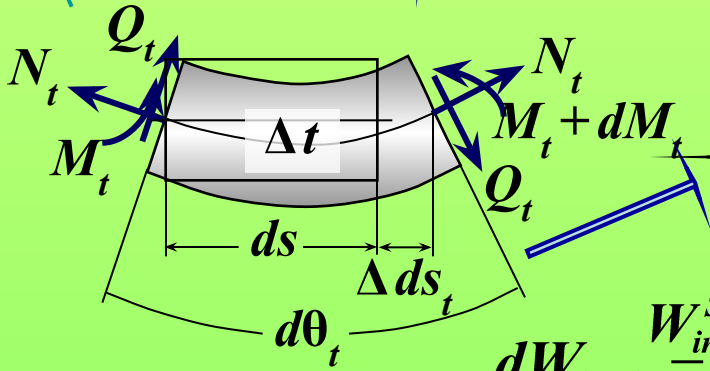
$$W_{ext,ti} + W_{int,ti} = 0$$

$$0 \Rightarrow W_{int,ti} = 0$$

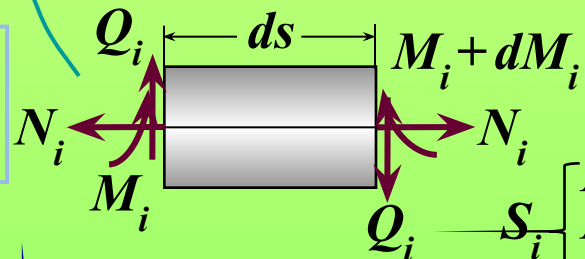
$$W_{ext,it} + W_{int,it} = 0$$

$$F_i * \Delta_{it} \Rightarrow \Delta_{it} = -W_{int,it}$$

Свободные (нестесненные) температурные деформации  
Силловые (в частном случае - упругие) деформации



$$\begin{cases} \Delta ds_t = \Delta ds_t^0 + \Delta ds_{N_t} \\ d\theta_t = d\theta_t^0 + d\theta_{M_t} \end{cases}$$



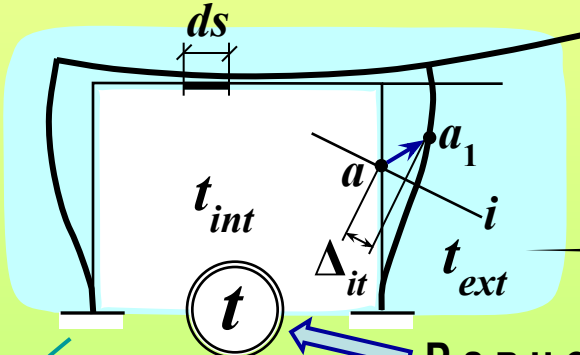
$$dW_{int,it} = dW_{int,it}^0 + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \int_{l_j, int, it} \frac{S_i S_t}{E S} ds_j \Rightarrow W_{int,it} = W_{int,it}^0 + W_{int,it}^{S_t} \begin{cases} M_i \\ N_i \\ Q_i \end{cases}$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

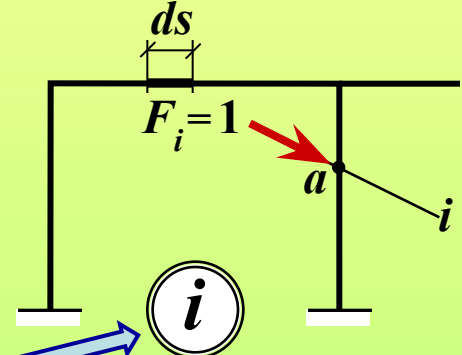
$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



$t_{int}$   
 $t_{ext}$  } рабочие (эксплуатационные) температуры

$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$



Равновесные состояния

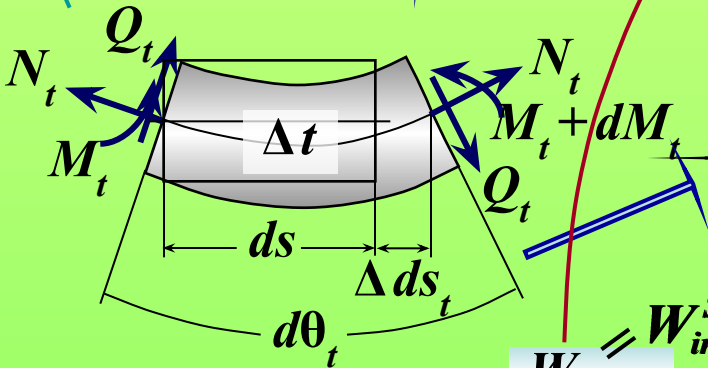
$$W_{ext,ti} + W_{int,ti} = 0$$

$$W_{int,ti} = 0$$

$$W_{ext,it} + W_{int,it} = 0$$

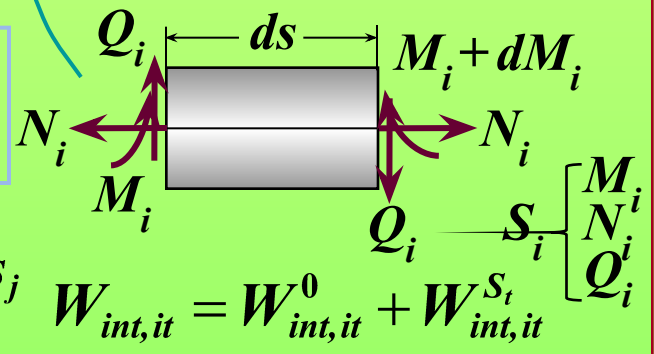
$$\Delta_{it} = -W_{int,it}$$

Свободные (нестесненные) температурные деформации  
Силовые (в частном случае - упругие) деформации



$$\begin{cases} \Delta ds_t = \Delta ds_t^0 + \Delta ds_{N_t} \\ d\theta_t = d\theta_t^0 + d\theta_{M_t} \end{cases}$$

$$W_{int,ti} = W_{int,ti}^{S_t} = \theta \sum_{по S} \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{S_i S_t}{C_S} ds_j$$



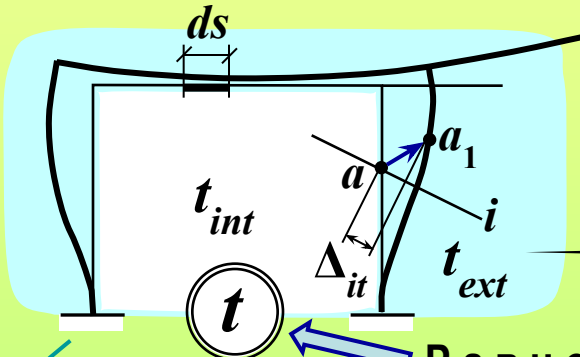
$$W_{int,it} = W_{int,it}^0 + W_{int,it}^{S_t} \begin{cases} M_i \\ N_i \\ Q_i \end{cases}$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

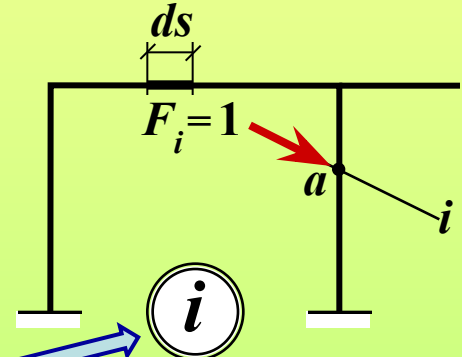
$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



$t_{int}$   
 $t_{ext}$  } рабочие (эксплуатационные) температуры

$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$



Равновесные состояния

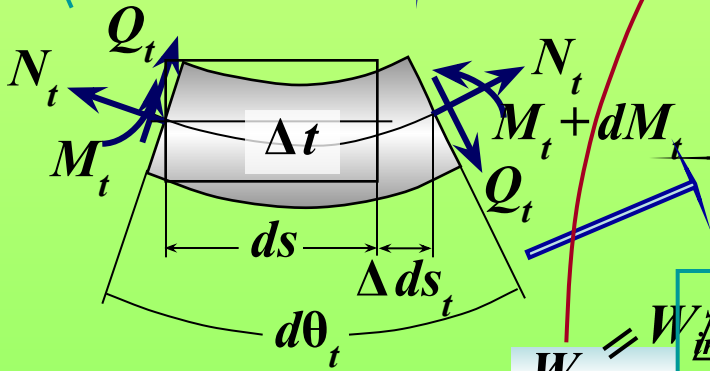
$$W_{ext,ti} + W_{int,ti} = 0$$

$$W_{int,ti} = 0$$

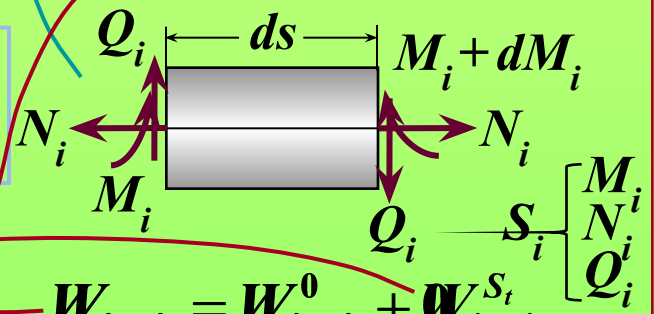
$$W_{ext,it} + W_{int,it} = 0$$

$$\Delta_{it} = -W_{int,it}$$

Свободные (нестесненные) температурные деформации  
Силовые (в частном случае - упругие) деформации



$$\begin{cases} \Delta ds_t = \Delta ds_t^0 + \Delta ds_{N_t} \\ d\theta_t = d\theta_t^0 + d\theta_{M_t} \end{cases}$$



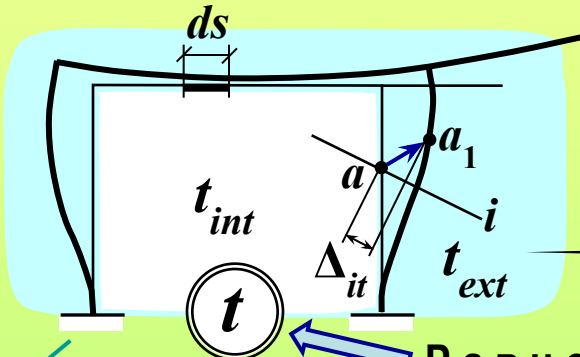
$$W_{int,ti} = W_{int,it}^0 = W_{int,it}^0 + W_{int,it}^{S_t}$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

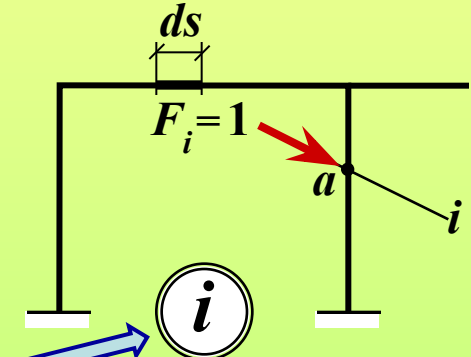
$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



$t_{int}$   
 $t_{ext}$  } рабочие (эксплуатационные) температуры

$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$



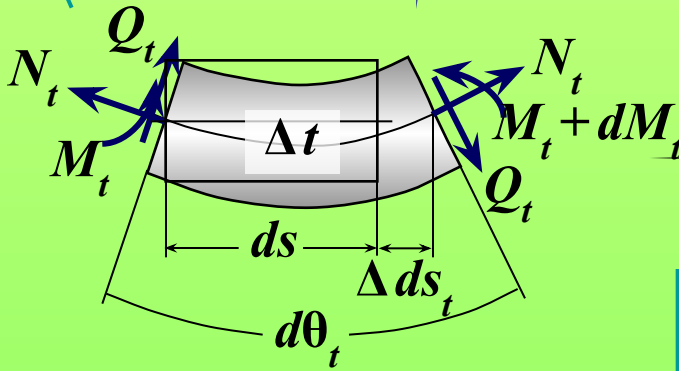
Равновесные состояния

$$W_{ext,ti} + W_{int,ti} = 0$$

$$0 \Rightarrow W_{int,ti} = 0$$

$$W_{ext,it} + W_{int,it} = 0$$

$$F_i * \Delta_{it} \Rightarrow \Delta_{it} = -W_{int,it}$$



$$\begin{cases} \Delta ds_t = \Delta ds_t^0 + \Delta ds_{N_t} \\ d\theta_t = d\theta_t^0 + d\theta_{M_t} \end{cases}$$

Свободные (нестеснённые) температурные деформации  
Силловые (в частном случае - упругие) деформации

$$\Delta_{it} = -W_{int,it}^0$$

возможная работа внутренних сил i-го состояния на нестеснённых температурных деформациях

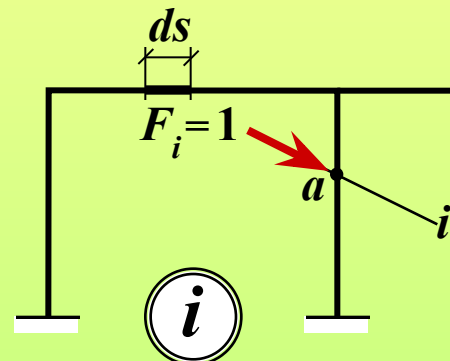
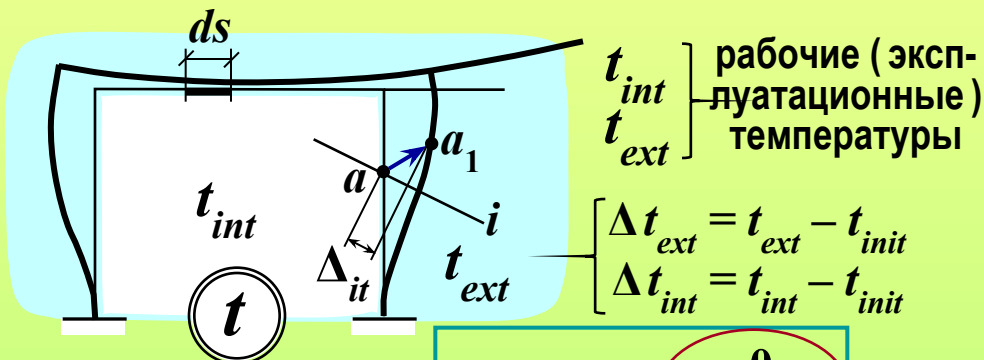
$\begin{cases} M_i \\ N_i \\ Q_i \end{cases}$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

$t_{init}$  – начальное поле температур

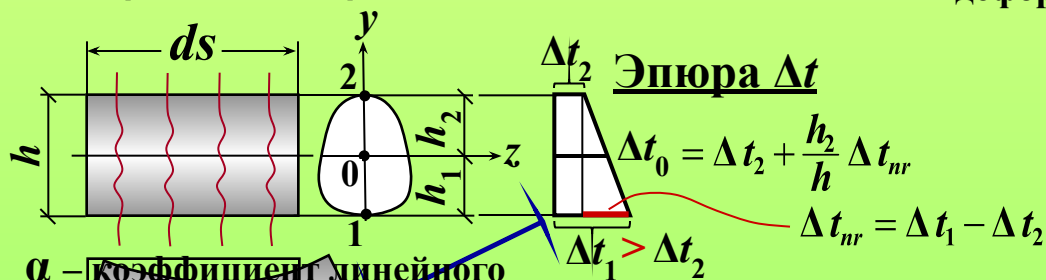
Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

$$\Delta_{it} = -W_{int, it}^0$$

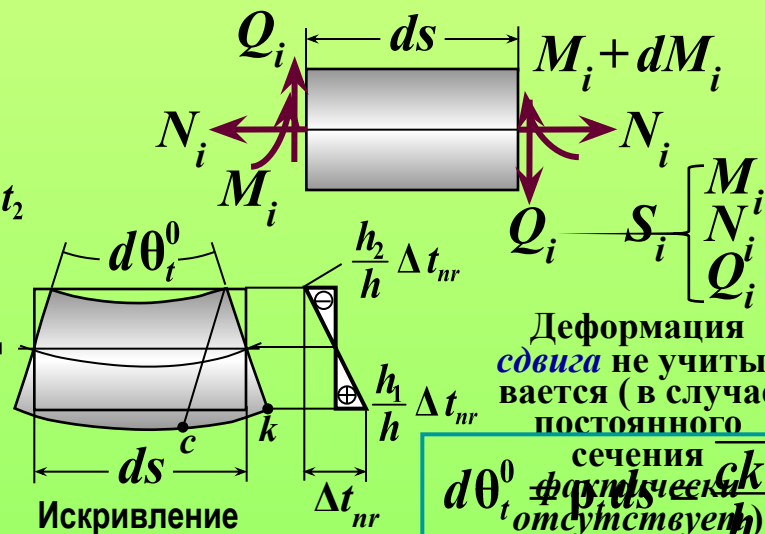
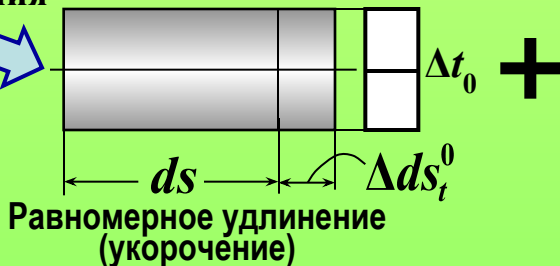
возможная работа внутренних сил  $i$ -го состояния на свободных (нестеснённых) температурных деформациях  $\Delta ds_t^0$  и  $d\theta_t^0$



$\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала

$$\Delta ds_t^0 = \epsilon_{0,t} \cdot ds = \alpha \cdot \Delta t_0 \cdot ds$$

$$d\theta_t^0 = \alpha \cdot \Delta t_0 \cdot ds$$

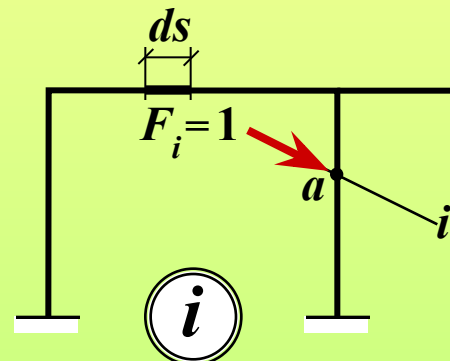
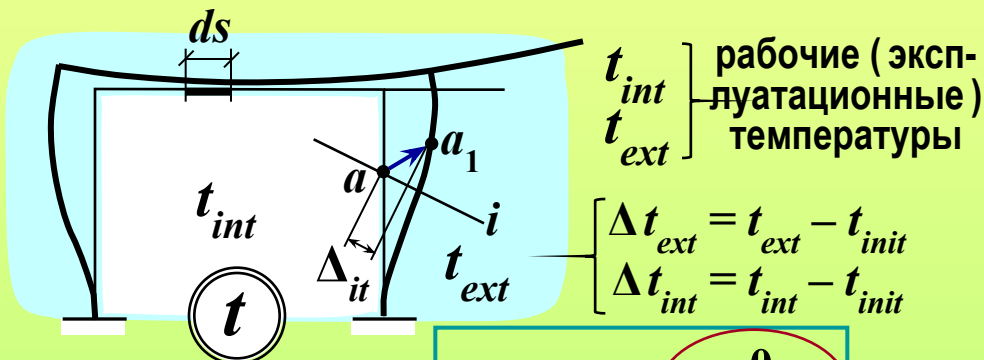


# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

$t_{init}$  – начальное поле температур

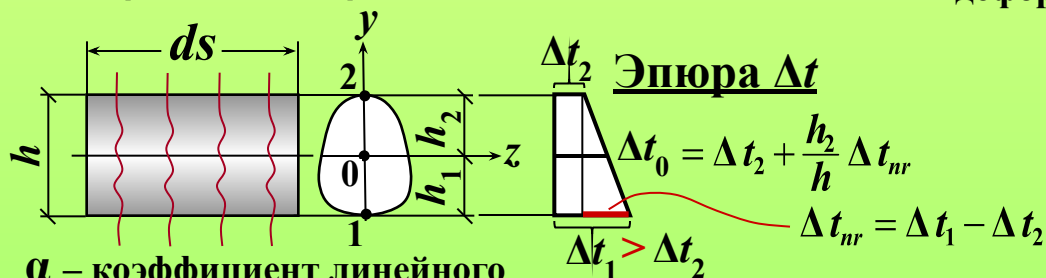
Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

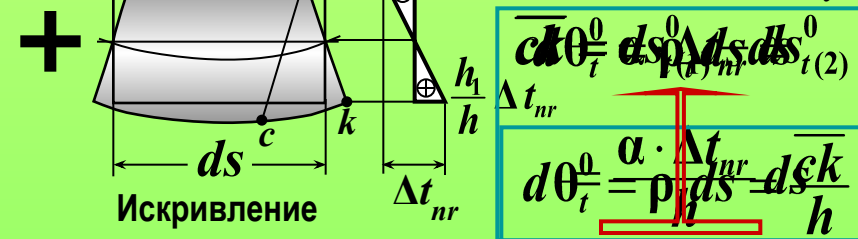
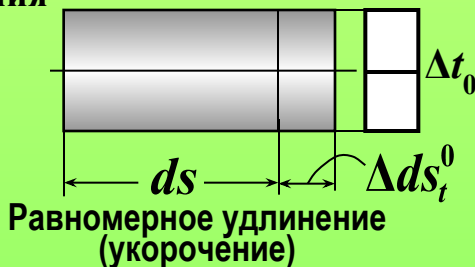
$$\Delta_{it} = -W_{int, it}^0$$

возможная работа внутренних сил  $i$ -го состояния на свободных (нестеснённых) температурных деформациях  $\Delta ds_t^0$  и  $d\theta_t^0$



$\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала

$$\Delta ds_t^0 = \varepsilon_{0,t} \cdot ds = \alpha \cdot \Delta t_0 \cdot ds$$



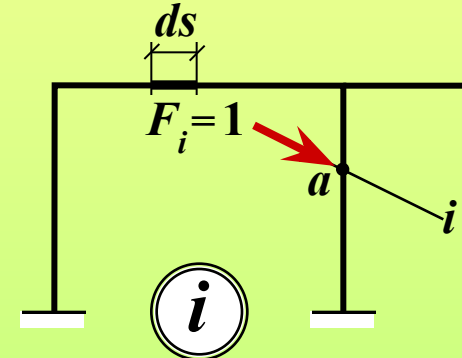
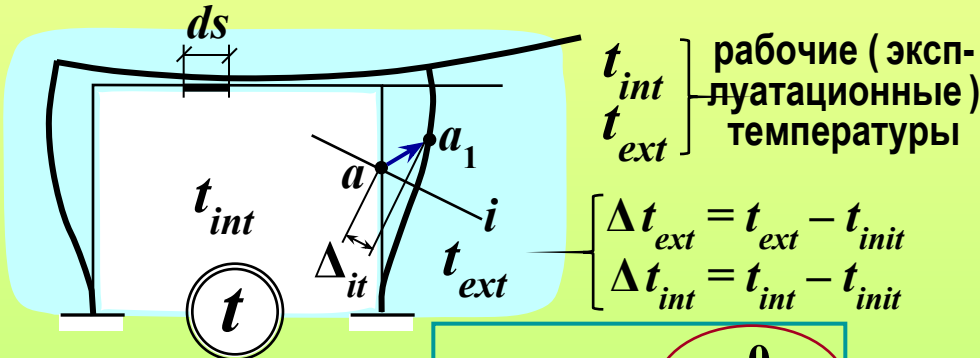


# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

$t_{init}$  – начальное поле температур

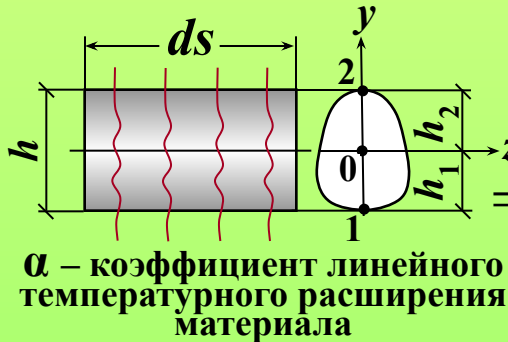
Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

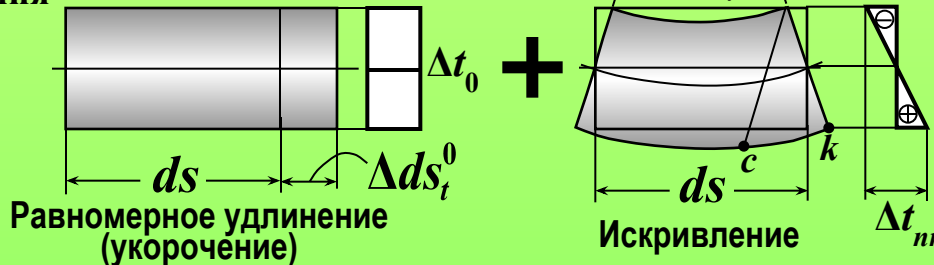
$$\Delta_{it} = -W_{int,it}^0$$

возможная работа внутренних сил  $i$ -го состояния на свободных (нестеснённых) температурных деформациях  $\Delta ds_t^0$  и  $d\theta_t^0$



$$dW_{int,it}^0 = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} (N_{j,t} \cdot \Delta ds_{j,t}^0 + M_{j,t} \cdot d\theta_{j,t}^0) ds_j$$

$$\Delta ds_t^0 = \varepsilon_{0,t} \cdot ds = \alpha \cdot \Delta t_0 \cdot ds$$



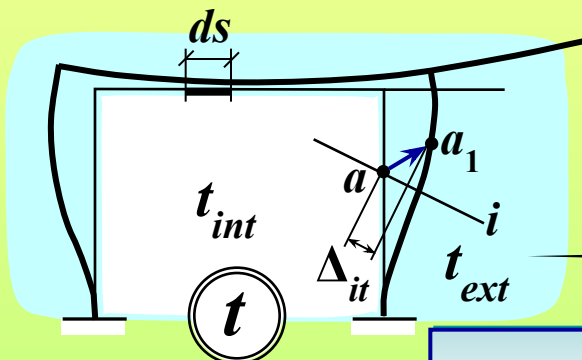
$$d\theta_t^0 = \rho_t ds = \frac{\alpha \cdot \Delta t_{nr}}{h} ds$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

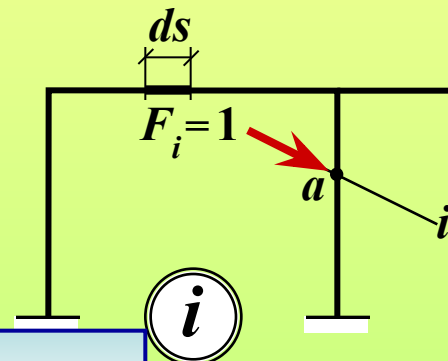
$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



$t_{int}$   
 $t_{ext}$  } рабочие (эксплуатационные) температуры

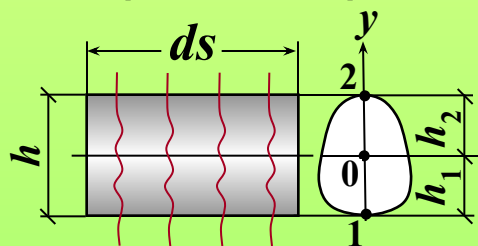
$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$



В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

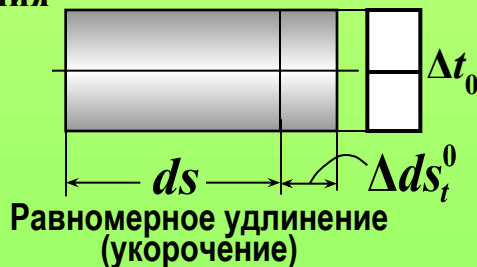
$$\Delta_{it} = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} (N_i \cdot \epsilon_{0,t} + M_i \cdot \rho_t) ds_j$$

внешних сил  $i$ -го состояния (фиктивных) температурных  $\theta_t^0$

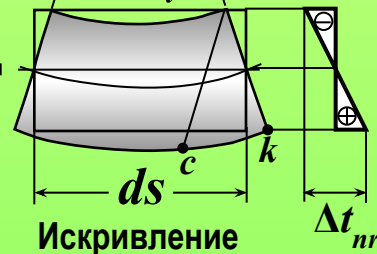


$\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала

$$\Delta ds_t^0 = \epsilon_{0,t} \cdot ds = \alpha \cdot \Delta t_0 \cdot ds$$



Равномерное удлинение (укорочение)

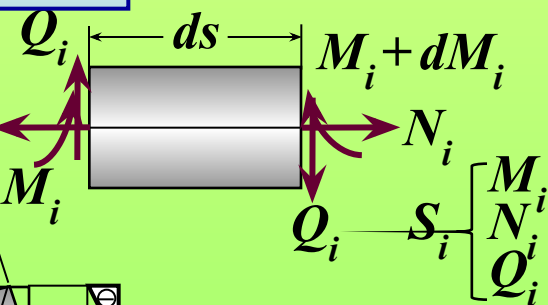


Искривление

$$\begin{aligned} d\theta_t^0 &= \rho_t ds = \\ &= \frac{\alpha \cdot \Delta t_{nr}}{h} ds \end{aligned}$$

$$W_{int,it}^0 =$$

$$= - \sum_{j=1}^m \int_{l_j} (N_i \cdot \epsilon_{0,t} + M_i \cdot \rho_t) ds_j$$

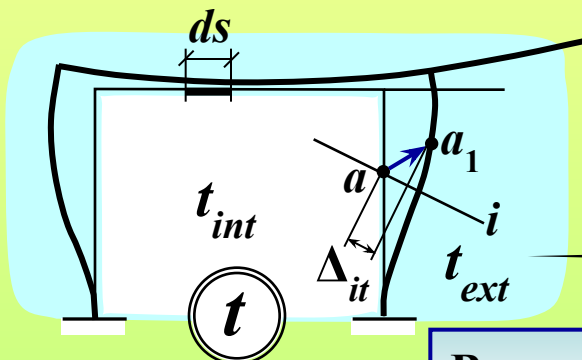


# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

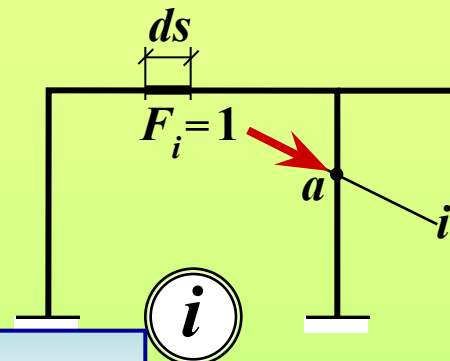
$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



$t_{int}$   
 $t_{ext}$  } рабочие (эксплуатационные) температуры

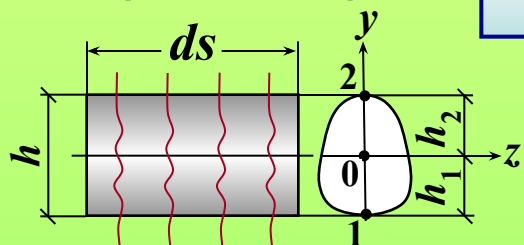
$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$



В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

Вариант записи формулы М-М:

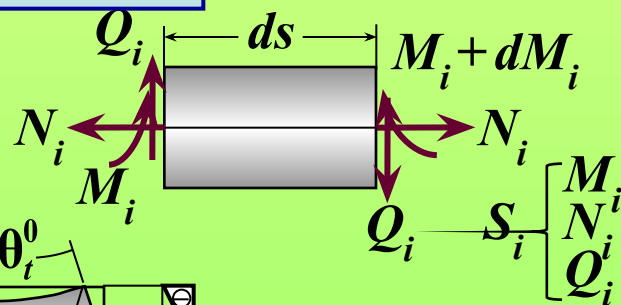
$$\Delta_{it} = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} (N_i \cdot \epsilon_{0,t} + M_i \cdot \rho_t) ds_j$$



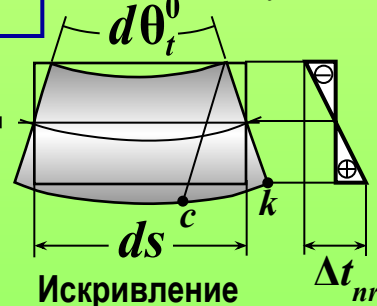
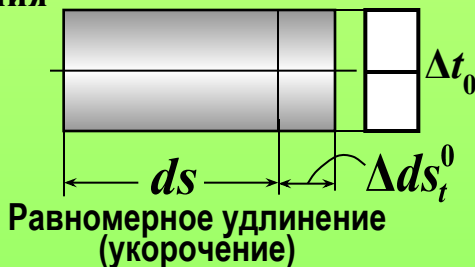
$\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала

$$\epsilon_{0,t} = \alpha \cdot \Delta t_0$$

$$\rho_t = \frac{\alpha}{h} \cdot \Delta t_{nr}$$



$$\Delta ds_t^0 = \epsilon_{0,t} \cdot ds = \alpha \cdot \Delta t_0 \cdot ds$$



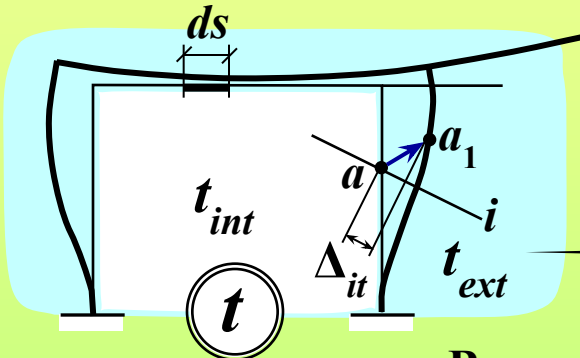
$$d\theta_t^0 = \rho_t ds = \frac{\alpha \cdot \Delta t_{nr}}{h} ds$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

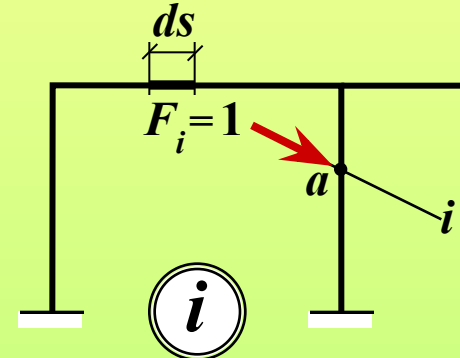
$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы

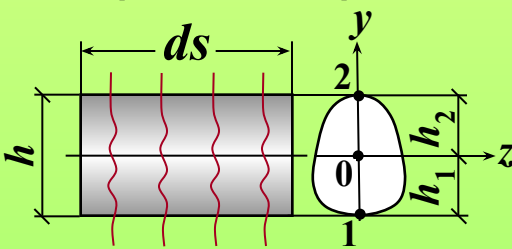


$t_{int}$  } рабочие (эксплуатационные) температуры  
 $t_{ext}$  }

$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$



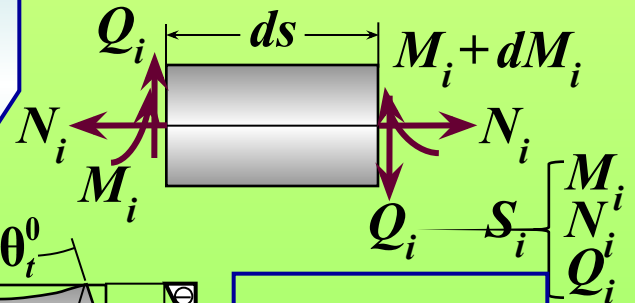
В случае стационарного теплового режима однородного стержня:



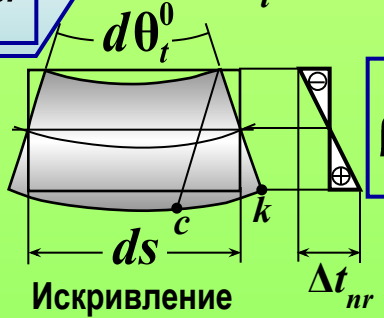
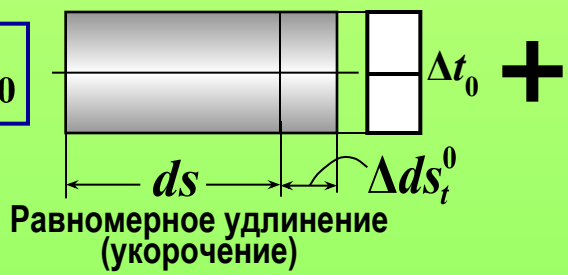
Вариант записи формулы М – М:

$$\Delta_{it} = \sum_{j=1}^{m_0} \int N_i \cdot \epsilon_{0,t} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{искр}} \int \rho_t \frac{M_i \alpha \rho \Delta t_{nr}}{h} ds_j$$

$$\epsilon_{0,t} = \alpha \cdot \Delta t_0$$



$$\Delta ds_t = \epsilon_{0,t} \cdot ds = \alpha \cdot \Delta t_0 \cdot ds$$



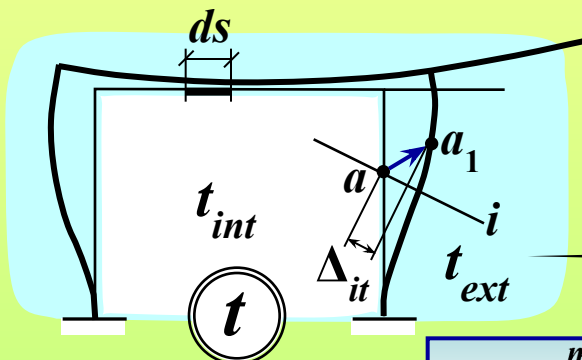
$$\rho_t d\theta_t^0 = \frac{\alpha \Delta t_{nr}}{h} ds = \frac{\alpha \cdot \Delta t_{nr}}{h} ds$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

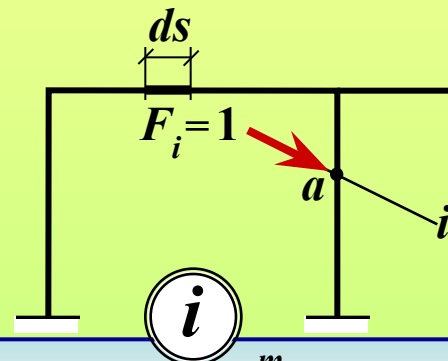
$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



$t_{int}$   
 $t_{ext}$  } рабочие (эксплуатационные) температуры

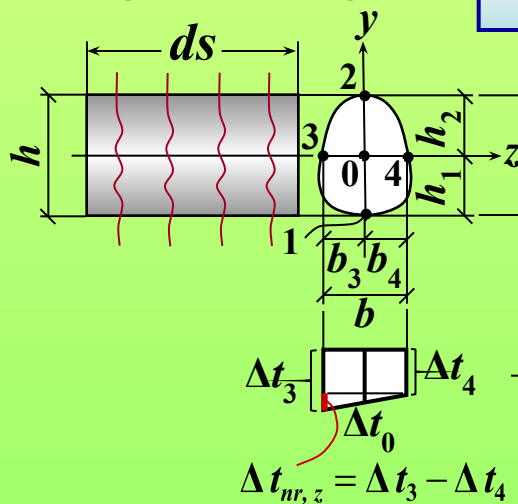
$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$



В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

Обобщение на случай произвольной температурной деформации:

$$\Delta t_{it} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_{y,i} \cdot \rho_{y,t} ds_j + \sum_{j=1}^{m_0} \int_{l_j} N_i \cdot \varepsilon_{0,t} ds_j$$

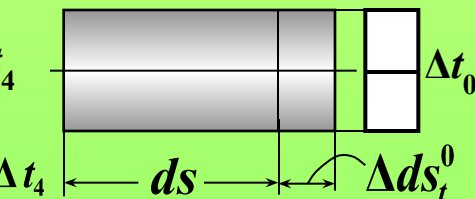


**Эпюра  $\Delta t$**

$$\Delta t_0 = \Delta t_2 + \frac{h_2}{h} \Delta t_{nr,y}$$

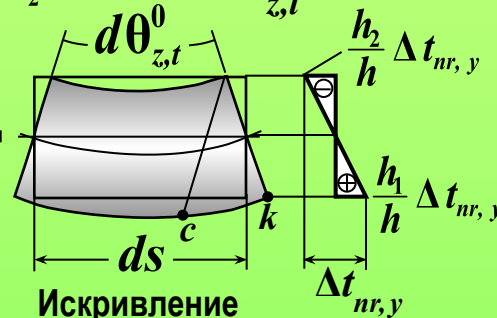
$$\Delta t_{nr,y} = \Delta t_1 - \Delta t_2$$

$$\Delta t_{nr,z} = \Delta t_3 - \Delta t_4$$

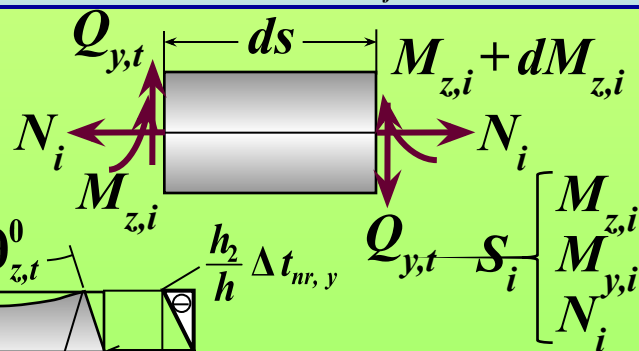


Равномерное удлинение (укорочение)

+



Искривление



$$\rho_{z,t} = \frac{\alpha}{h} \cdot \Delta t_{nr,y}$$

$$\rho_{y,t} = \frac{\alpha}{b} \cdot \Delta t_{nr,z}$$

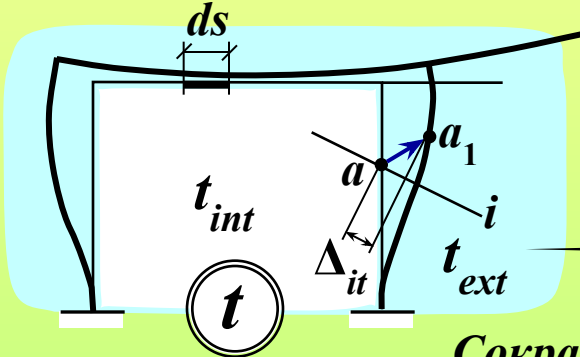
$$\varepsilon_{0,t} = \alpha \cdot \Delta t_0$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы после изменения температуры

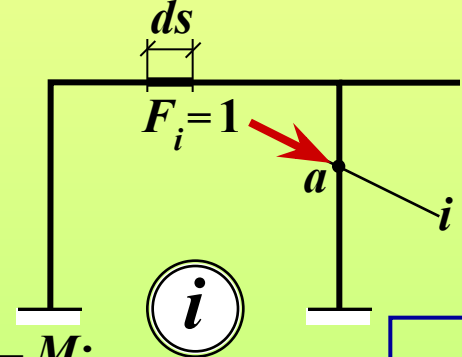
$t_{init}$  – начальное поле температур

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



$t_{int}$   
 $t_{ext}$  } рабочие (эксплуатационные) температуры

$$\begin{cases} \Delta t_{ext} = t_{ext} - t_{init} \\ \Delta t_{int} = t_{int} - t_{init} \end{cases}$$

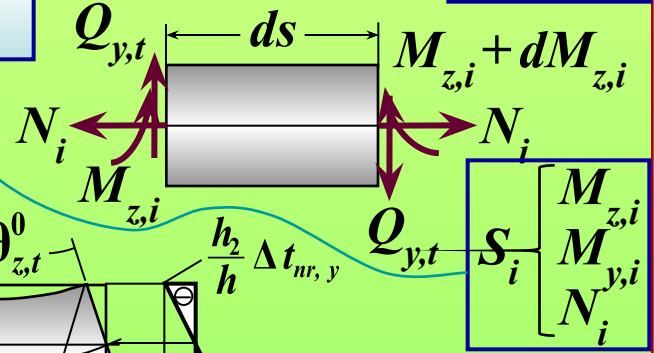
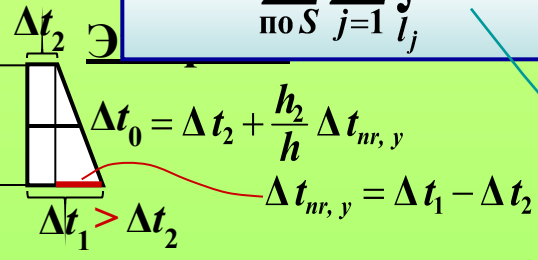
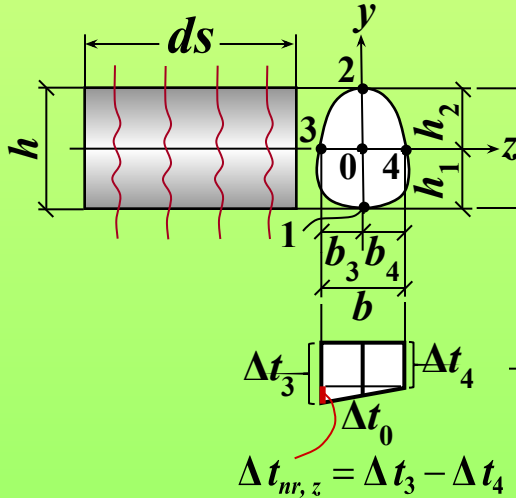


В случае стационарного теплового режима однородного стержня:

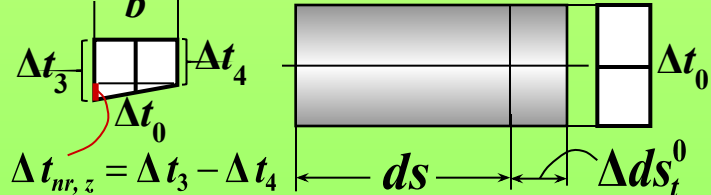
Сокращённая запись формулы М – М:

$$\Delta_{it} = \sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^{m_S} \int_{l_j} S_i \cdot \epsilon_{S,t}^0 ds_j$$

$$\epsilon_{S,t}^0 \begin{cases} \rho_{z,t} \\ \rho_{y,t} \\ \epsilon_{0,t} \end{cases}$$



$$S_i \begin{cases} M_{z,i} \\ M_{y,i} \\ N_i \end{cases}$$



$$\epsilon_{0,t} = \alpha \cdot \Delta t_0$$

Равномерное удлинение (укорочение)

Искривление

$$\begin{cases} \rho_{z,t} = \frac{\alpha}{h} \cdot \Delta t_{nr,y} \\ \rho_{y,t} = \frac{\alpha}{b} \cdot \Delta t_{nr,z} \end{cases}$$

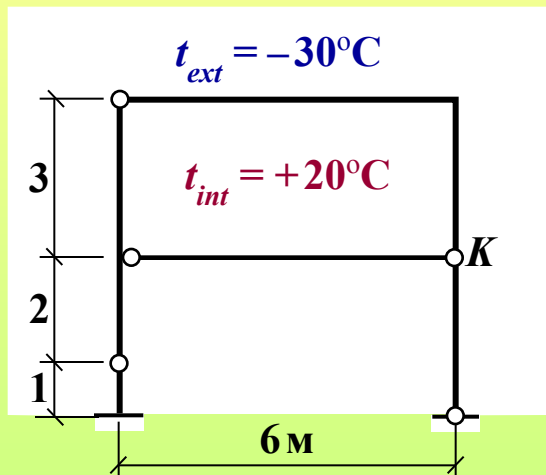
# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

## Пример

**Требуется:** определить горизонтальное перемещение  $u_K$  узла  $K$  от изменения температуры при переходе от начального состояния конструкции с общей температурой  $t_{init} = +15^\circ\text{C}$  к эксплуатационному тепловому режиму с наружной температурой  $t_{ext} = -30^\circ\text{C}$  и внутренней (в объёме, ограниченном элементами рамы)  $t_{int} = +20^\circ\text{C}$ .

**Исходные данные:**

материал всех стержней рамы – сталь с коэффициентом температурного линейного расширения  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-1}$ ;  
 высоты сечений – ригеля  $h_p = 50$  см, стоек  $h_c = 30$  см (сечения симметричные).



**Решение:**

1. Перемещение  $u_K = \Delta_{1t}$  определяется по формуле:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_1(x_j) \cdot \rho_t(x_j) dx_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} N_1(x_j) \cdot \varepsilon_{0,t}(x_j) dx_j,$$

$$\rho_t(x_j) = \frac{\alpha}{h(x_j)} \cdot \Delta t_{nr}(x_j); \quad \varepsilon_{0,t}(x_j) = \alpha \cdot \Delta t_0(x_j).$$

### 2б. Температурные деформации стержней:

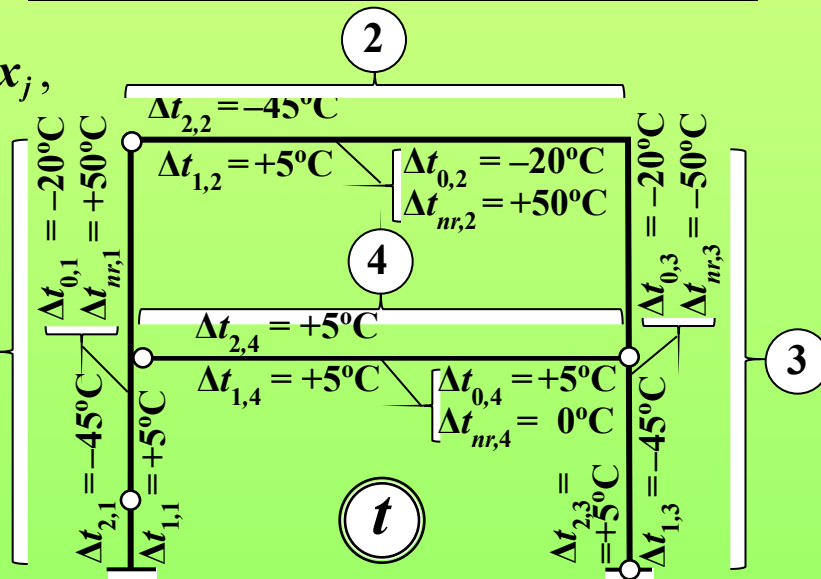
$$\rho_{t,1} = -\rho_{t,3} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (+50) / 0,3 = 20 \cdot 10^{-4} (\text{M}^{-1})$$

$$\rho_{t,2} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (+50) / 0,5 = 12 \cdot 10^{-4} (\text{M}^{-1}); \quad \rho_{t,4} = 0$$

$$\varepsilon_{0,t,1} = \varepsilon_{0,t,2} = \varepsilon_{0,t,3} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (-20) = -2,4 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{0,t,4} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (+5) = 0,6 \cdot 10^{-4}$$

### 2а. Приращения температур элементов в действительном состоянии системы



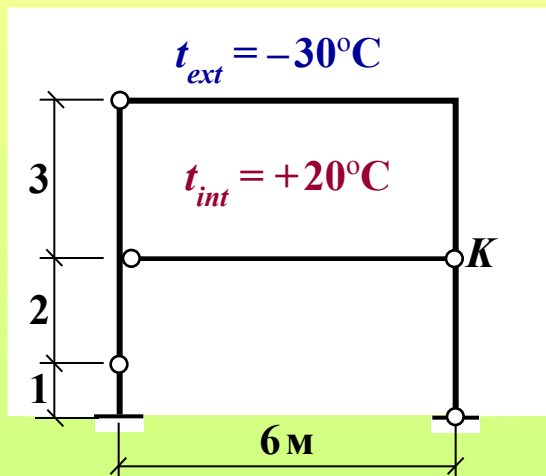
# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

## Пример

**Требуется:** определить горизонтальное перемещение  $u_K$  узла  $K$  от изменения температуры при переходе от начального состояния конструкции с общей температурой  $t_{init} = +15^\circ\text{C}$  к эксплуатационному тепловому режиму с наружной температурой  $t_{ext} = -30^\circ\text{C}$  и внутренней (в объёме, ограниченном элементами рамы)  $t_{int} = +20^\circ\text{C}$ .

**Исходные данные:**

материал всех стержней рамы – сталь с коэффициентом температурного линейного расширения  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-1}$ ; высоты сечений – ригеля  $h_p = 50$  см, стоек  $h_c = 30$  см (сечения симметричные).



**Решение:**

1. Перемещение  $u_K = \Delta_{1t}$  определяется по формуле:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_1(x_j) \cdot \rho_t(x_j) dx_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} N_1(x_j) \cdot \varepsilon_{0,t}(x_j) dx_j,$$

$$\rho_t(x_j) = \frac{\alpha}{h(x_j)} \cdot \Delta t_{nr}(x_j); \quad \varepsilon_{0,t}(x_j) = \alpha \cdot \Delta t_0(x_j).$$

**2б. Температурные деформации стержней:**

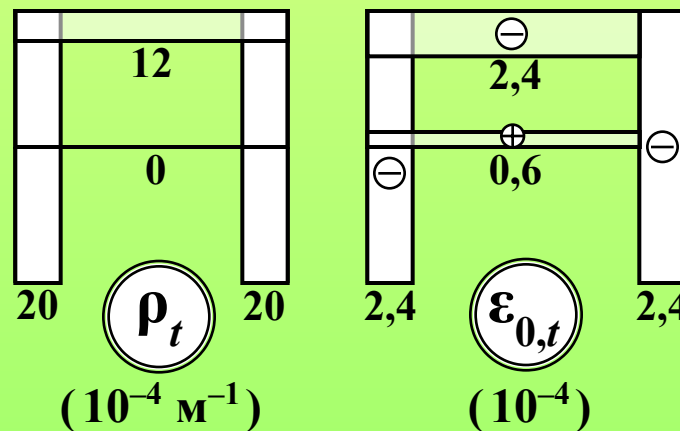
$$\rho_{t,1} = -\rho_{t,3} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (+50) / 0,3 = 20 \cdot 10^{-4} (\text{M}^{-1})$$

$$\rho_{t,2} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (+50) / 0,5 = 12 \cdot 10^{-4} (\text{M}^{-1}); \quad \rho_{t,4} = 0$$

$$\varepsilon_{0,t,1} = \varepsilon_{0,t,2} = \varepsilon_{0,t,3} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (-20) = -2,4 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{0,t,4} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (+5) = 0,6 \cdot 10^{-4}$$

**2в. Эпюры температурных деформаций в действительном состоянии системы**



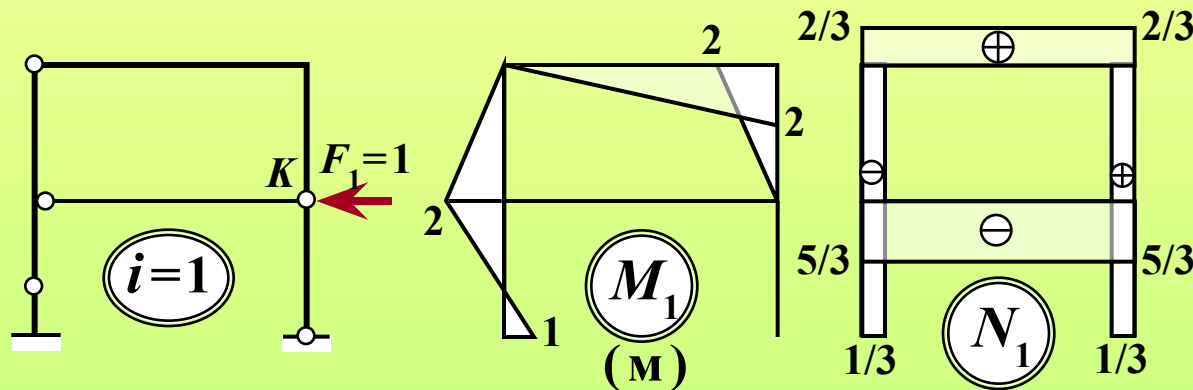
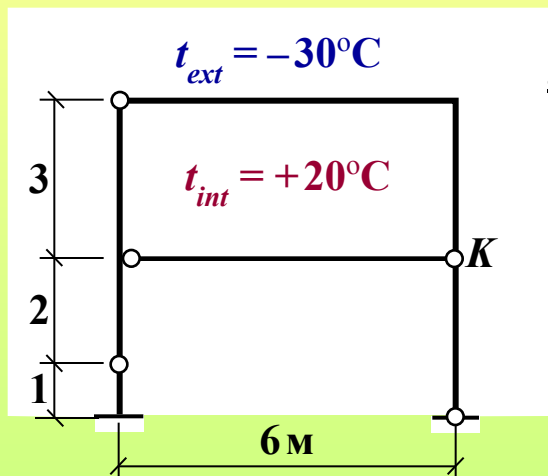
**Правило:** эпюра  $\rho_t$  строится на «**более ТЕПЛЫХ**» волокнах



# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Пример

## 3. Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



Решение:

1. Перемещение  $u_K = \Delta_{1t}$  определяется по формуле:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_1(x_j) \cdot \rho_t(x_j) dx_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} N_1(x_j) \cdot \varepsilon_{0,t}(x_j) dx_j,$$

$$\rho_t(x_j) = \frac{\alpha}{h(x_j)} \cdot \Delta t_{nr}(x_j); \quad \varepsilon_{0,t}(x_j) = \alpha \cdot \Delta t_0(x_j).$$

4. Вычисление перемещения по формуле М – М:

2б. Температурные деформации стержней:

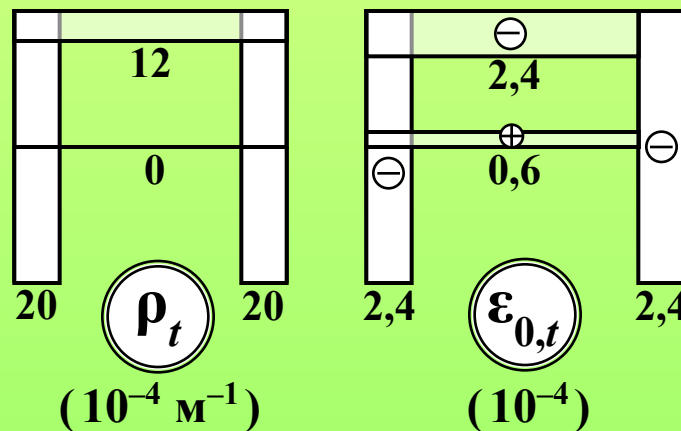
$$\rho_{t,1} = -\rho_{t,2} = \rho_{t,3} = \rho_{t,4} = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{h} = \frac{10^{-6} \cdot (-50)}{0,5} = -12 \cdot 10^{-6} \text{ (M}^{-1}\text{)}; \quad \rho_{t,4} = 0$$

$$\rho_{t,2} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (+50) / 0,5 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ (M}^{-1}\text{)}; \quad \rho_{t,4} = 0$$

$$\varepsilon_{0,t,1} = \varepsilon_{0,t,2} = \varepsilon_{0,t,3} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (-20) = -2,4 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{0,t,4} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot (+5) = 0,6 \cdot 10^{-4}$$

## 2в. Эпюры температурных деформаций в действительном состоянии системы

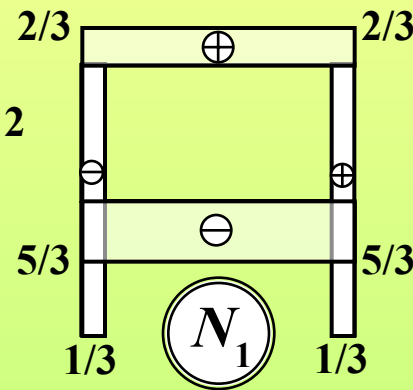
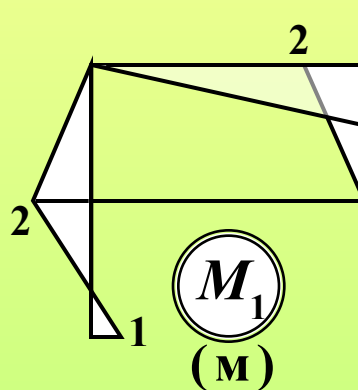
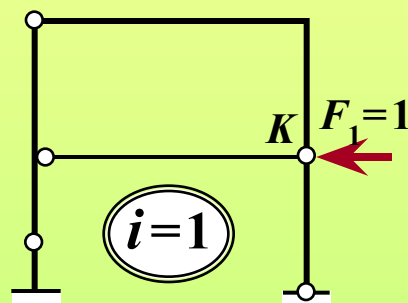
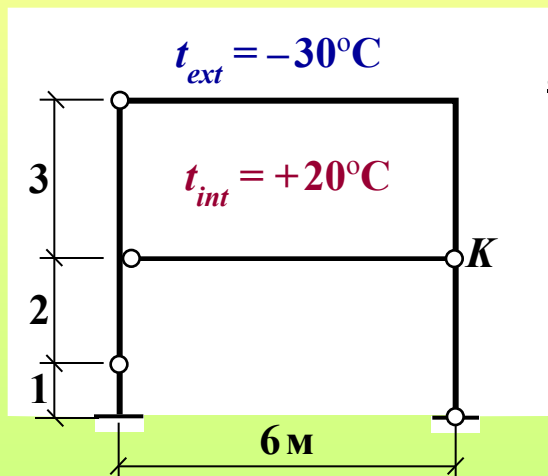


Правило: эпюра  $\rho_t$  строится на «более ТЕПЛЫХ» волокнах

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ) МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Пример

## 3. Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



Решение:

1. Перемещение  $u_K = \Delta_{1t}$  определяется по формуле:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \int_{l_j} M_1(x_j) \cdot \rho_t(x_j) dx_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} N_1(x_j) \cdot \varepsilon_{0,t}(x_j) dx_j,$$

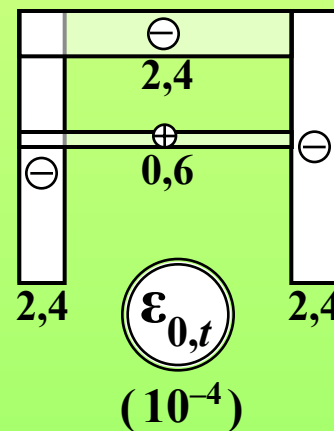
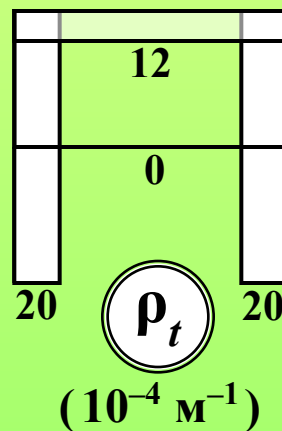
$$\rho_t(x_j) = \frac{\alpha}{h(x_j)} \cdot \Delta t_{nr}(x_j); \quad \varepsilon_{0,t}(x_j) = \alpha \cdot \Delta t_0(x_j).$$

4. Вычисление перемещения по формуле М – М:

$$\Delta_{1t} = \sum_{j=1}^{m_M} \Omega_{M_i} \cdot \rho_t + \sum_{j=1}^{m_N} \Omega_{N_i} \cdot \varepsilon_{0,t} \quad (m_M = 4; m_N = 4)$$

$$\Delta_{1t} = u_K = 10^{-4} \cdot \left[ \frac{1-2}{2} \cdot 3 \cdot (+20) + \frac{(-2) \cdot 3}{2} \cdot (+20) + \frac{2 \cdot 6}{2} \cdot (+12) + \frac{(-2) \cdot 3}{2} \cdot (-20) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 6 \cdot (-2,4) + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot (-2,4) + \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (-2,4) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 6 \cdot (+0,6) \right] = 26,4 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}$$

## 2в. Эпюры температурных деформаций в действительном состоянии системы

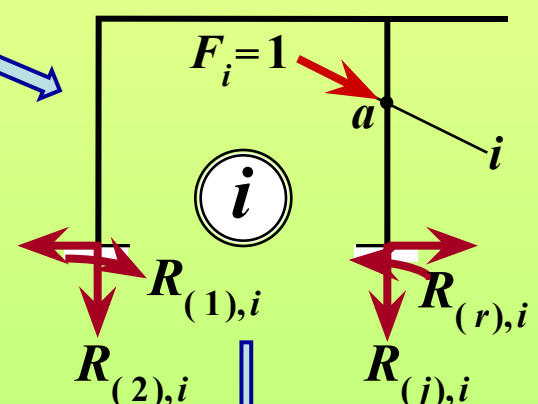
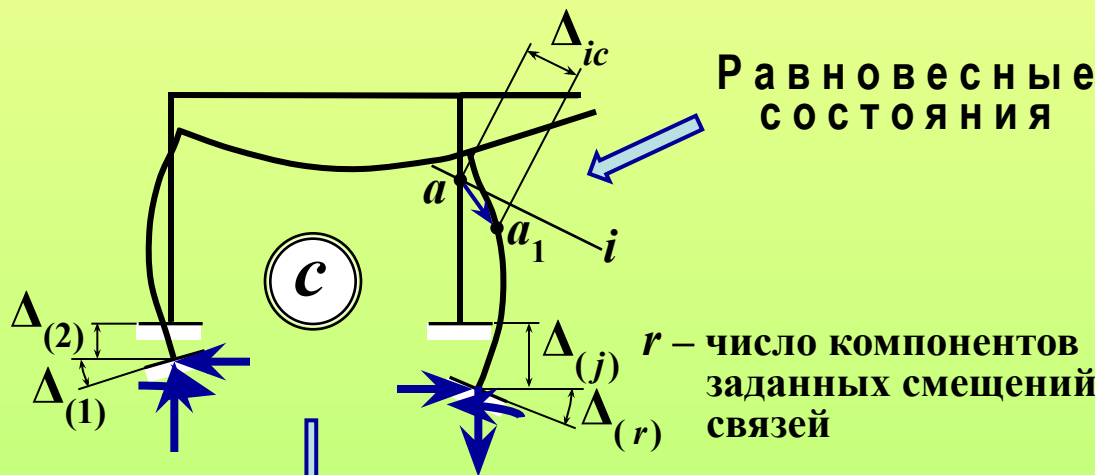


Правило: эпюра  $\rho_t$  строится на «более теплых» волокнах

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СМЕЩЕНИЙ СВЯЗЕЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Действительное состояние системы с кинематическими возмущениями (смещениями связей)

Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



$$W_{ext,ci} + W_{int,ci} = 0$$

$$W_{int,ci} = 0$$

$$W_{int,ic} = - \sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{S_i S_c}{C_S} ds_j = -W_{int,ci}$$

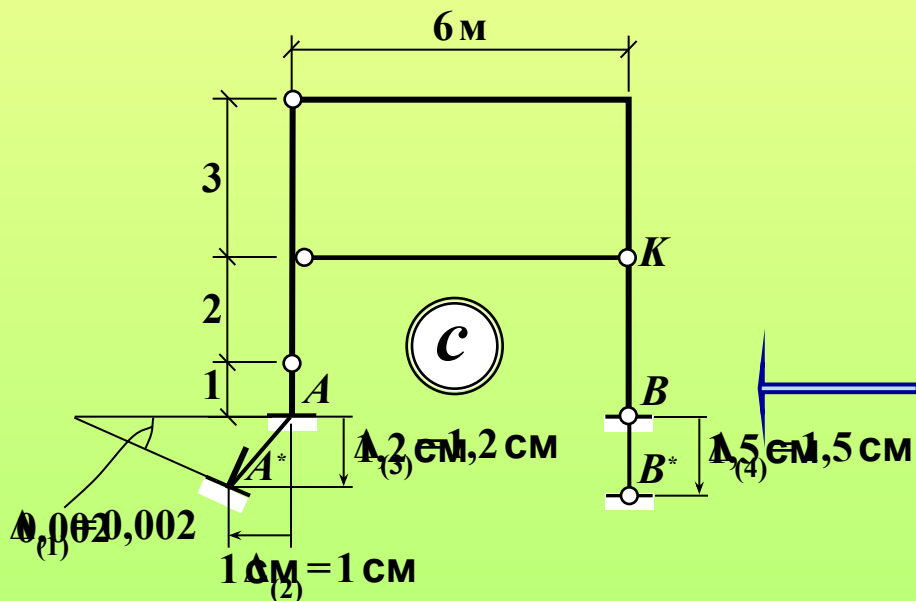
**Правило знаков для единичных реакций смещаемых связей:**  
 реакция  $R_{(j),i}$  положительная, если её возможная работа на перемещении  $\Delta_{(j)}$  положительная (иначе векторы  $R_{(j),i}$  и  $\Delta_{(j)}$  направлены в одну и ту же сторону)

$$\Delta_{ic} = - \sum_{j=1}^r R_{(j),i} \Delta_{(j)} W_{int,ic}$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СМЕЩЕНИЙ СВЯЗЕЙ МЕТОДОМ МАКСВЕЛЛА - МОРА

Пример

## 2. Действительное состояние системы с заданными смещениями связей



Требуется:  
определить горизонтальное перемещение  $u_K$  узла  $K$  от углового и линейных смещений опор  $A$  и  $B$ .

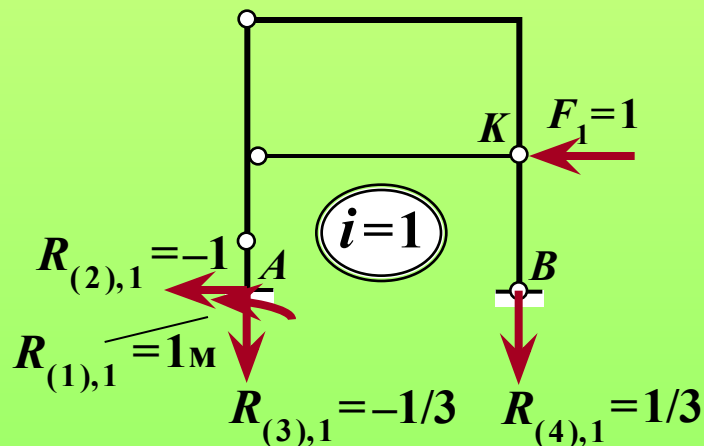
Решение:

1. Перемещение  $u_K = \Delta_{1c}$  определяется по формуле:

$$\Delta_{1c} = -\sum_{j=1}^r R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}, \text{ где } r = 4$$

Нумерация компонентов смещений связей

## 3. Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние системы



## 4. Вычисление перемещения по формуле М – М:

$$u_K = \Delta_{1c} = -\sum_{j=1}^4 R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)} =$$

$$= -\left[ (+1M) \cdot 0,002 + (-1) \cdot 0,01M + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 0,012M + \right.$$

$$\left. + \left(+\frac{1}{3}\right) \cdot 0,015M \right] = 0,007M$$

# УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА МАКСВЕЛЛА - МОРА ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

$$\begin{aligned}
 \Delta_{i\Sigma} &= \Delta_{iF} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} = \\
 &= \sum_{j=1}^{m_{M_z}} \int_{l_j} \frac{M_{z,i} M_{z,F}}{EI_z} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_y}} \int_{l_j} \frac{M_{y,i} M_{y,F}}{EI_y} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_t}} \int_{l_j} \frac{M_{t,i} M_{t,F}}{GI_t} ds_j + \\
 &+ \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} \frac{N_i N_F}{EA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_y}} \int_{l_j} k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} Q_{y,F}}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_z}} \int_{l_j} k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} Q_{z,F}}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^u \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{c_j} + \\
 &+ \sum_{j=1}^{m_{M_z}} \int_{l_j} M_{z,i} \cdot \rho_{z,t} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_y}} \int_{l_j} M_{y,i} \cdot \rho_{y,t} ds_j + \sum_{j=1}^{m_0} \int_{l_j} N_i \cdot \varepsilon_{0,t} ds_j - \\
 &- \sum_{j=1}^r R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}
 \end{aligned}$$

**Изгиб**
**Изгиб**
**Кручение**
**Растяжение/сжатие**
**Сдвиг**
**Сдвиг**
**Деформации упругих связей**

**Температурные искривления**
**Температурные искривления**
**Продольные температурные деформации**

**Смещения связей**

*Сокращённая форма записи:*

$$\begin{aligned}
 \Delta_{i\Sigma} &= \Delta_{iF} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} = \\
 &= \sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^{m_S} \int_{l_j} \frac{S_i S_F}{C_S} ds_j + \sum_{j=1}^u \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{c_j} + \sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^{m_S} \int_{l_j} S_i \cdot \varepsilon_{S,t}^0 ds_j - \sum_{j=1}^r R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}
 \end{aligned}$$

**От силовых воздействий (нагрузок)**
**От изменения температуры**
**От смещений связей**

# Контрольные вопросы

*(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках\*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 30»)*

1. Частные случаи формулы Максвелла–Мора (ФМ–М) для перемещений от силовых воздействий: а) в случае плоской стержневой системы; (2)  
б) для стержневых систем разных типов. (2)
2. Алгоритм вычисления перемещения по ФМ–М. (3)
3. Как истолковываются знаки «+» или «-» в результате вычисления перемещения по ФМ–М? (3)
4. Что означает термин «перемножение эпюр»? (3)
5. Формулировка правила Верещагина для «перемножения эпюр». Каково необходимое условие применимости правила Верещагина? (7)
6. Как используется правило Верещагина для «перемножения эпюр» в случае, когда «грузовая» эпюра – параболическая общего вида? (разложение на простые составляющие – *самостоятельно*)
7. Формула Симпсона, условие её применимости для «перемножения эпюр». (8)
8. В каких случаях вычисление интегралов в ФМ–М по формуле Симпсона даёт точный результат? (8)
9. Формула Максвелла–Мора для перемещения от изменения температуры, варианты её записи. (18–22)
10. От каких характеристик температурного режима и параметров системы зависит температурное перемещение? (15)
11. Как вычисляются нестеснённые температурные деформации (кривизна и относительная продольная деформация) в ФМ–М для перемещения от изменения температуры? (19)

\*) Только в режиме «Показ слайдов»

# Контрольные вопросы

*(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках\*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 31»)*

12. Почему в ФМ–М для температурного перемещения отсутствуют характеристики жёсткости элементов системы? [\(12\)](#)
13. Правила знаков для температурных деформаций. Как строится эпюра кривизн? [\(24\)](#)
14. Формула Максвелла – Мора для перемещения от кинематических воздействий (смещений связей). [\(27\)](#)
15. Правило знаков для единичных реакций смещаемых связей. [\(27\)](#)
16. Универсальная формула Максвелла–Мора для перемещений линейно деформируемых пространственных стержневых систем (полная развернутая запись). [\(29\)](#)
17. Сокращённая запись универсальной формулы Максвелла–Мора, смысл её составляющих. [\(29\)](#)

---

\*) Только в режиме «Показ слайдов»