ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ТЕОРИЯ НАДЁЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСЧЁТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Прямые задачи вероятностных расчётов

Прямая (поверочная) задача вероятностного расчёта: по известным (заданным) вероятностным характеристикам входных параметров определить стохастические характеристики выходных параметров.

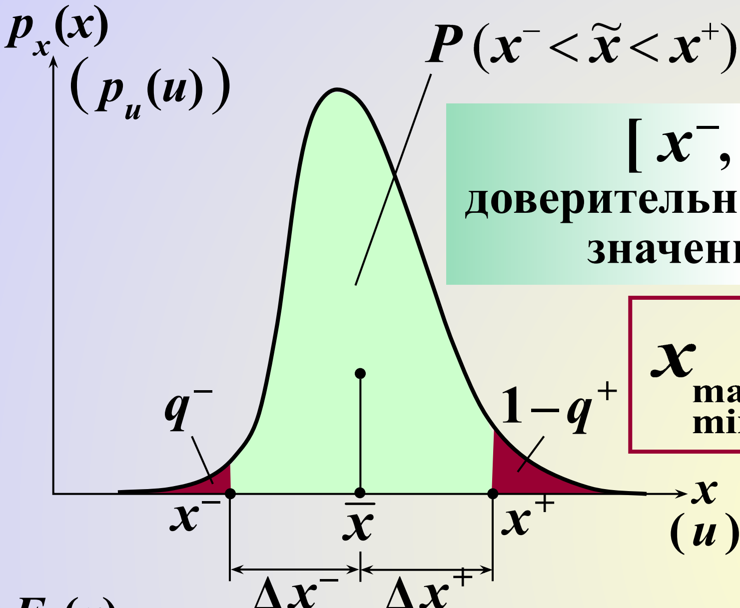
Методы решения прямых задач
- аналитический
- приближённые:
  - МСЛ
  - МСИ (ММ-К)

Алгоритм решения прямой задачи вероятностного расчёта

1. **Ввод исходных данных**
2. **Анализ исходной статистической информации** — Оценка стохастических свойств входных параметров, корреляционных связей между входными СВ, выявление квази-детерминированных и функционально связанных величин
3. **Выбор метода вероятностного расчёта**
4. **Аналитическое или численное определение характеристик случайных выходных параметров** — Решение задачи расчёта параметров НДС аналитическими и/или численными методами строительной механики, включая МКЭ
5. **Представление выходной статистической информации в требуемой форме** — Аналитические выражения плотности распределения (совместной или для отдельных выходных параметров); подбор статистических моделей распределений выходных параметров по результатам расчёта ММ-К; определение доверительных областей (интервалов)
6. **К**

Прямые задачи вероятностных расчётов

Доверительный интервал значений случайной величины



$[x^-, x^+]$ – доверительный интервал значений с.в. x

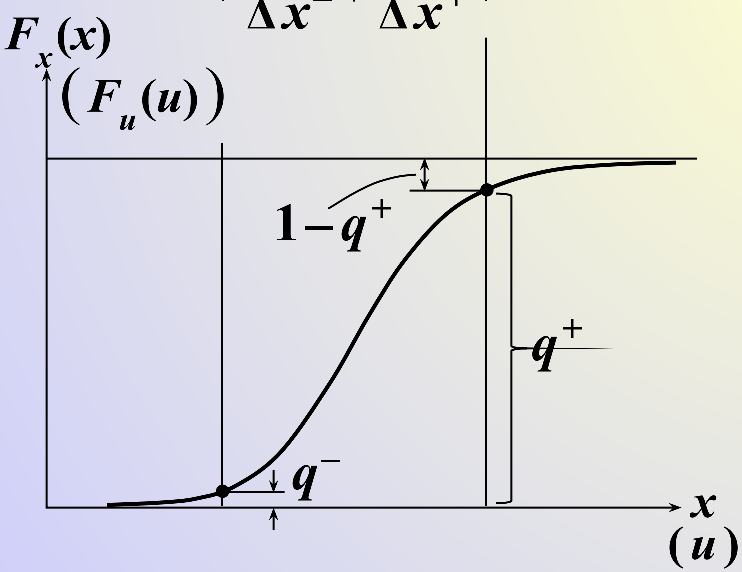
$$\boxed{x_{\substack{\max\\ \min}} = \bar{x}\,{}^{+\Delta x^+}_{-\Delta x^-}}$$

$$P(\tilde{x} < x^-) = \int_{-\infty}^{x^-} p_x(x)\,dx = q^-$$

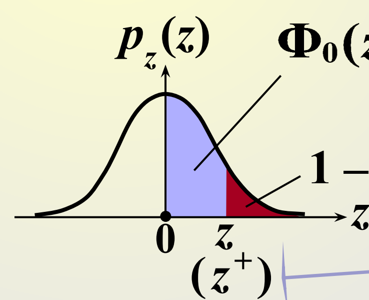
$$P(\tilde{x} > x^+) = \int_{x^+}^{+\infty} p_x(x)\,dx = 1-q^+$$

$$P(x^- < \tilde{x} < x^+) = \int_{x^-}^{x^+} p_x(x)\,dx = q^+ - q^-$$

x^-, x^+ – ***квантили*** **уровней** q^- **и** q^+



Для нормального (Гаусса) распределения можно использовать таблицы значений интеграла вероятностей (интеграла Лапласа)



$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\,dt, \text{ где } z = \frac{x-\bar{x}}{\hat{x}}$$

$$1-q^+ = 1-[0{,}5+\Phi_0(z^+)]$$

z^+ – по $\Phi_0(z^+) = q^+ - 0{,}5$

$$\boxed{x^+ = \bar{x} + z^+ \cdot \hat{x}}$$

Аналогично $\boxed{x^- = \bar{x} - |z^-| \cdot \hat{x}}$

где $|z^-| = (\bar{x} - x^-)/\hat{x}$ – по $\Phi_0(|z^-|) = q^-$

Функция распределения

$$\Phi_0(x)=\int_0^x \varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

нормированного и центрированного нормального распределения

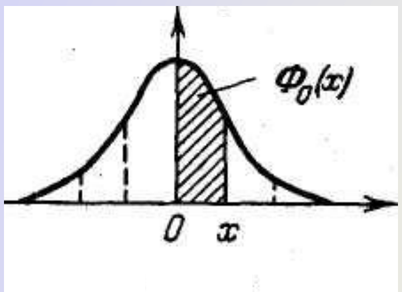
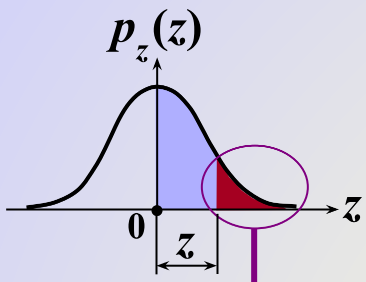


ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ (ИНТЕГРАЛА ЛАПЛАСА)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	040	080	120	160	199	239	279	319	359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	0,1026	064	103	141
0,3	0,1179	217	255	293	331	368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	0,2019	054	088	123	157	190	224
0,6	0,2257	291	324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	708	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	0,3023	051	078	106	133
0,9	0,3159	186	212	238	264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	531	554	577	599	621
1,1	643	655	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	0,4015
1,3	0,4032	049	066	082	099	115	131	147	162	177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441

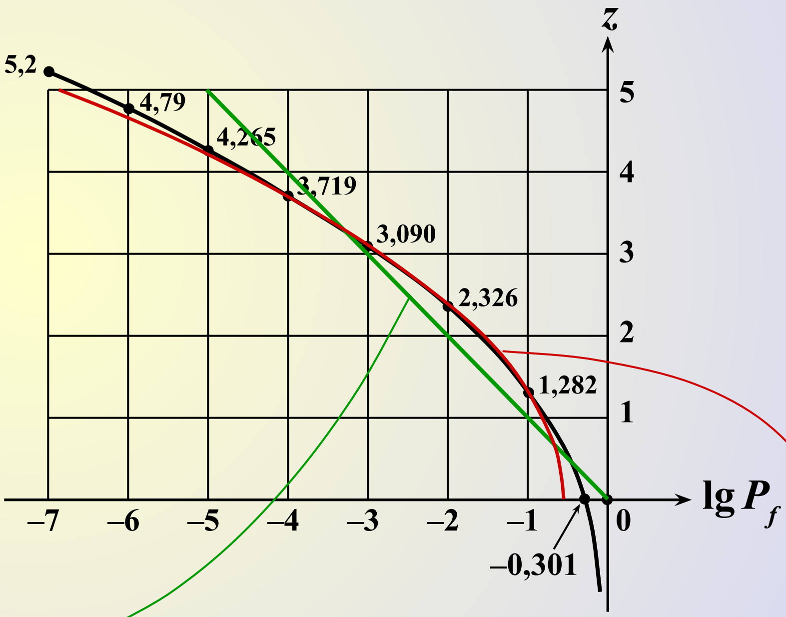


Вероятность $P_f = 0{,}5 - \Phi_0(z)$	z
10^{-7}	5,2
10^{-6}	4,79
10^{-5}	4,265
0,0001	3,719
0,0005	3,291
0,001	3,090
0,002	2,878
0,005	2,576
0,01	2,326
0,02	2,054
0,05	1,645
0,1	1,282

В расчётах надёжности

$z \equiv \beta$

(индекс надёжности ≡ характеристика безопасности)



$\boxed{P_f \approx 10^{-\beta}}$ при $\beta = 1 \ldots 4$ (из зарубежных источников)

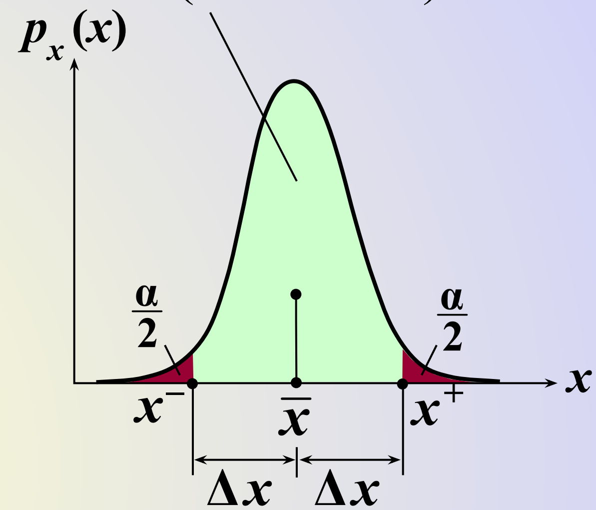
Более точно (ВГС): $\boxed{P_f \approx 10^{-(\beta^2/4 + 0{,}6)}}$ при $\beta = 1 \ldots 5$

Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha,\, n}$

$n-1$ \ α	0,10	0, 05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	**6,314**	**12,706**	**31,821**	**63,657**	**127,3**	**318,3**	**636,6**
2	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,598
3	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,214	12,941
4	2,132	2,776	3,747	4,604	5,597	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,291	4,781
10	**1,812**	**2,298**	**2,764**	**3,169**	**3,581**	**4,144**	**4,587**
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,193	3,610	3,922
20	**1,725**	**2,086**	**2,528**	**2,845**	**3,153**	**3,552**	**3,849**
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,092	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
30	**1,697**	**2,042**	**2,457**	**2,750**	**3,030**	**3,386**	**3,646**
∞	**1,645**	**1,960**	**2,326**	**2,576**	**2,807**	**3,090**	**3,291**

$$t_{\alpha,\infty} = \left|u\right|_P \equiv \left|u\right|_{1-\alpha} \left(= u_{\frac{1+P}{2}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$P\left(x^- < \tilde{x} < x^+\right) = 1-\alpha$$



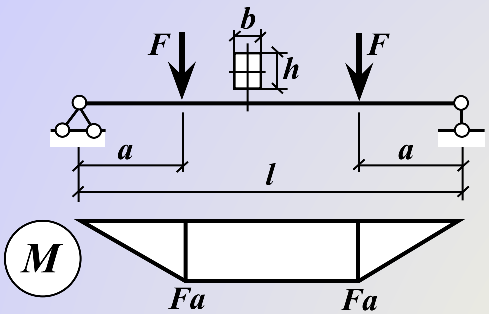
$[x^-, x^+]$ – доверительный интервал значений с.в. x

$$\bar{x} - \Delta x < \tilde{x} < \bar{x} + \Delta x$$

$$x_{\substack{\max \\ \min}} = \bar{x} \pm \Delta x$$

$$\boxed{\Delta x = \hat{x} \cdot t_{\alpha,\infty}}$$

Прямые задачи вероятностных расчётов



Пример 1

Для балки, схема которой в случае *детерминистического* расчёта показана на рисунке, определить с требуемой вероятностью P_σ доверительный интервал значений наибольшего нормального напряжения в поперечных сечениях.

Решение

1. Детерминистический расчёт

Наибольшее нормальное напряжение в балке

$$\left|\sigma\right|_{\max} = \sigma_M = \left|\frac{M}{W}\right|_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{Fa}{bh^2/6}$$

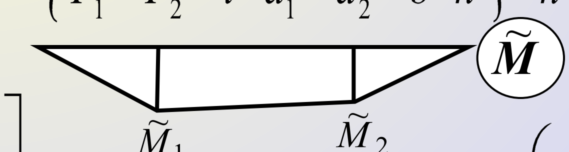
2. Вероятностный расчёт

Формирование вероятностной расчётной схемы

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_2\,,\ \hat{F}_1 = \hat{F}_2\,,$$
$$\bar{a}_1 = \bar{a}_2\,,\ \hat{a}_1 = \hat{a}_2$$

$$\left|\tilde{\sigma}\right|_{\max} = \tilde{\sigma}_M = \left|\frac{\tilde{M}}{\tilde{W}}\right|_{\max} = \frac{\tilde{M}_{\max}}{\tilde{W}}$$

$$\tilde{X} = \left\{ \tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2 \quad \tilde{l} \quad \tilde{a}_1 \quad \tilde{a}_2 \quad \tilde{b} \quad \tilde{h} \right\} \quad n = 7$$



$$\tilde{\sigma}_M = \frac{6}{\tilde{b}\tilde{h}^2}\left[\tilde{F}_1\tilde{a}_1\left(1-\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{l}}\right)+\tilde{F}_2\frac{\tilde{a}_1\tilde{a}_2}{\tilde{l}}\right]$$

$$\tilde{M}_{\max} = \tilde{M}_1 = \tilde{F}_1\tilde{a}_1\left(1-\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{l}}\right)+\tilde{F}_2\frac{\tilde{a}_1\tilde{a}_2}{\tilde{l}}$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

Математическое ожидание напряжения

$$\bar{\sigma}_M = \sigma_M(\bar{X}) = \frac{6}{\bar{b}\,\bar{h}^2}\left[\bar{F}_1\,\bar{a}_1\left(1-\frac{\bar{a}_1}{\bar{l}}\right)+\bar{F}_2\frac{\bar{a}_1\,\bar{a}_2}{\bar{l}}\right] = \frac{6F_0\,a_0}{b_0 h_0^2} = \sigma_{M,\text{теор}}\,,$$

где F_0, a_0, b_0 и h_0 **– теоретические (проектные) значения величин**

Стандарт напряжения (по МСЛ): $$\hat{\sigma}_M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial x_i}\right|_{X=\bar{X}}\hat{x}_i\right)^2}$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial F_1}\right|_{X=\bar{X}} = \left.\frac{6}{bh^2}a_1\left(1-\frac{a_1}{l}\right)\right|_{X=\bar{X}} = \frac{6a_0}{b_0h_0^2}(1-\alpha) = \frac{1-\alpha}{F_0}\cdot\bar{\sigma}_M,\ \text{где}\ \alpha = \frac{a_0}{l_0}$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial F_2}\right|_{X=\bar{X}} = \left.\frac{6a_1a_2}{bh^2l}\right|_{X=\bar{X}} = \frac{6a_0^2}{b_0h_0^2l} = \frac{\alpha}{F_0}\cdot\bar{\sigma}_M$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial a_1}\right|_{X=\bar{X}} = \left.\frac{6}{bh^2}\left[F_1\left(1-\frac{2a_1}{l}\right)+F_2\frac{a_2}{l}\right]\right|_{X=\bar{X}} = \frac{6F_0(1-\alpha)}{b_0h_0^2l} = \frac{1-\alpha}{a_0}\cdot\bar{\sigma}_M$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial a_2}\right|_{X=\bar{X}} = \left.\frac{6F_2}{bh^2}\cdot\frac{a_1}{l}\right|_{X=\bar{X}} = \frac{6F_0\alpha}{b_0h_0^2} = \frac{\alpha}{a_0}\cdot\bar{\sigma}_M$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial l}\right|_{X=\bar{X}} = \left.\frac{6}{bh^2}\left(F_1a_1\cdot\frac{a_1}{l^2}-F_2\frac{a_1a_2}{l^2}\right)\right|_{X=\bar{X}} = 0$$

(симметрия)

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial b}\right|_{X=\bar{X}} = -\frac{6}{b^2h^2}\left.\left[F_1a_1\left(1-\frac{a_1}{l}\right)+F_2\frac{a_1a_2}{l}\right]\right|_{X=\bar{X}} = -\frac{6F_0a_0}{b_0^2h_0^2} = -\frac{1}{b_0}\cdot\bar{\sigma}_M$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial h}\right|_{X=\bar{X}} = -\frac{12}{bh^3}\left.\left[F_1a_1\left(1-\frac{a_1}{l}\right)+F_2\frac{a_1a_2}{l}\right]\right|_{X=\bar{X}} = -\frac{12F_0a_0}{b_0h_0^3} = -\frac{2}{h_0}\cdot\bar{\sigma}_M$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

$$\hat{\sigma}_M = \overline{\sigma}_M \sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{F_0}\cdot\hat{F}_1\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{F_0}\cdot\hat{F}_2\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha}{a_0}\cdot\hat{a}_1\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a_0}\cdot\hat{a}_2\right)^2 + \left(\frac{1}{b_0}\cdot\hat{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{h_0}\cdot\hat{h}\right)^2}$$

$$\hat{\sigma}_M = \overline{\sigma}_M \sqrt{(1-\alpha)^2 A_{F_1}^2 + \alpha^2 A_{F_2}^2 + (1-\alpha)^2 A_{a_1}^2 + \alpha^2 A_{a_2}^2 + A_b^2 + 4A_h^2} =$$

$$= \overline{\sigma}_M \sqrt{(1-2\alpha+2\alpha^2)(A_F^2 + A_a^2) + A_b^2 + 4A_h^2},$$

$A_F = A_{F_1} = A_{F_2} = \hat{F}_1/F_0 = \hat{F}_2/F_0$; $A_a = A_{a_1} = A_{a_2} = \hat{a}_1/a_0 = \hat{a}_2/a_0$; $A_b = \hat{b}/b_0$; $A_h = \hat{h}/h_0$ –

коэффициенты вариации входных параметров

Коэффициент вариации напряжения

$$A_{\sigma_M} = \frac{\hat{\sigma}_M}{\overline{\sigma}_M} = \sqrt{\gamma(A_F^2 + A_a^2) + A_b^2 + 4A_h^2}, \quad \gamma = 1 - 2\alpha + 2\alpha^2$$

$$(1 \geq \gamma \geq 1/2 \text{ при } 0 \leq \alpha \leq 1/2)$$

при $A_F = 0{,}06$; $\hat{a} = 0{,}005\, l_0$ ($A_a = 0{,}005/\alpha$); $A_b = A_h = 0{,}01$:

$$A_{\sigma_M} = \sqrt{\gamma\left(0{,}06^2 + \frac{0{,}005^2}{\alpha^2}\right) + 0{,}01^2 + 4\cdot 0{,}01^2} = 10^{-2}\sqrt{(1-2\alpha+2\alpha^2)\left(36 + \frac{1}{4\alpha^2}\right) + 5}$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

α	A_{σ_M}	$A_{\sigma_{M(F)}}$
0	∞	6,000
0,1	7,418	5,433
0,2	5,808	4,948
0,25	5,477	4,743
0,3	5,243	4,569
0,4	4,953	4,327
0,5	4,848	4,243

Определение доверительного интервала значений напряжения в балке

$$\text{ДИ } \sigma_M = \bar{\sigma}_M \begin{matrix} +\Delta\sigma_M^+ \\ -\Delta\sigma_M^- \end{matrix}$$

Для симметричного распределения: $\text{ДИ } \sigma_M = \bar{\sigma}_M \pm \Delta\sigma_M$

$$\Delta\sigma_M = \hat{\sigma}_M \cdot |u|_{P_\sigma}$$

$$\text{ДИ } \sigma_M = \bar{\sigma}_M (1 \pm A_{\sigma_M} \cdot |u|_{P_\sigma}).$$

При $\alpha = 0{,}25$: $A_{\sigma_M} = 5{,}477 \cdot 10^{-2}$;

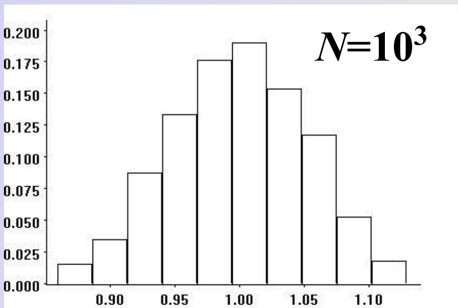
при $P_\sigma = 0{,}95$: $|u|_{0,95} = 1{,}960$; $\text{ДИ } \sigma_M = \bar{\sigma}_M (1 \pm 5{,}477 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}96) = \bar{\sigma}_M (1 \pm 0{,}107)$;

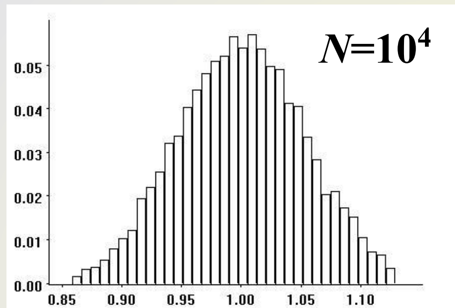
при $P_\sigma = 0{,}99$: $|u|_{0,99} = 2{,}576$; $\text{ДИ } \sigma_M = \bar{\sigma}_M (1 \pm 0{,}141)$.

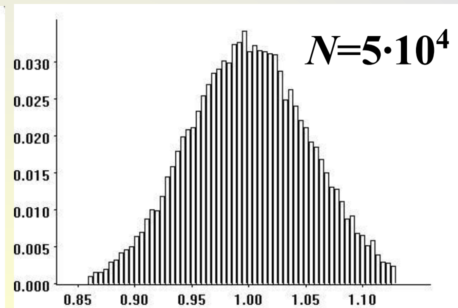
Прямые задачи вероятностных расчётов

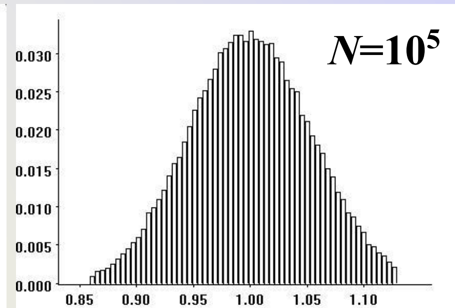
Результаты вероятностного расчёта напряжения в балке методом статистического моделирования (ММ-К, МСИ)

Вариант 1: все входные параметры – нормально распределённые



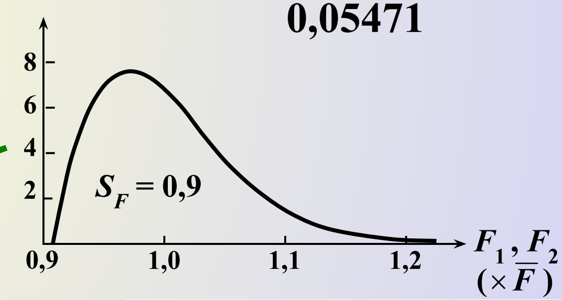


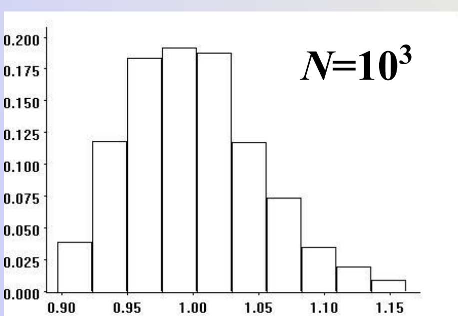


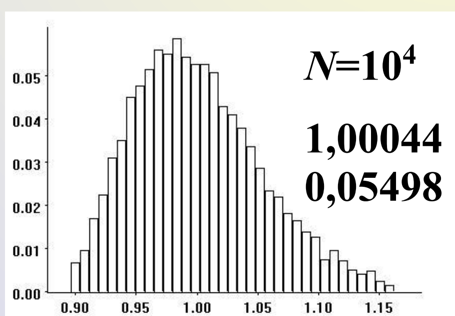


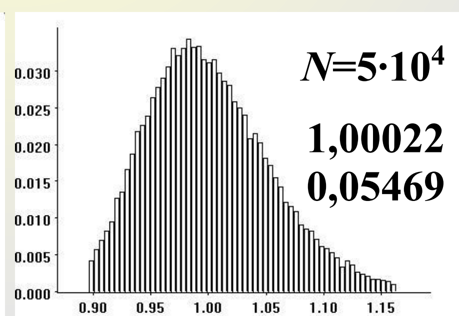
	$N=10^3$	$N=10^4$	$N=5\cdot 10^4$	$N=10^5$
$\overline{\sigma}_M/\sigma_0$	0,99989	1,00114	1,00051	1,00030
A_{σ_M}	0,05506	0,05461	0,05477	0,05471

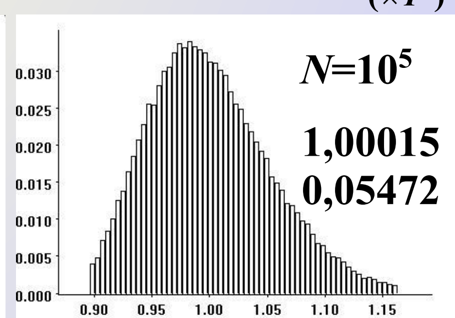
Вариант 2:
нагрузки – по закону Вейбулла (Weibull),
все остальные входные параметры – нормально распределённые











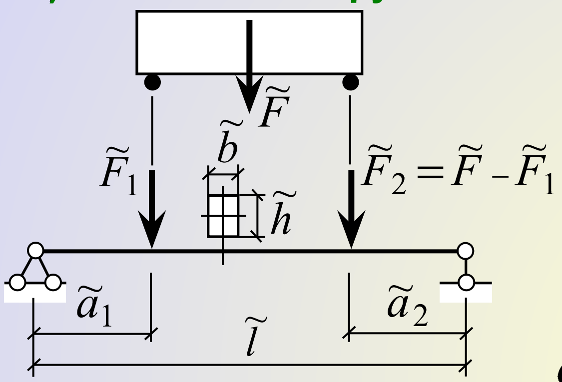
$\overline{\sigma}_M/\sigma_0 = 0{,}99897$ $A_{\sigma_M} = 0{,}05302$

Для сравнения – по методу статистической линеаризации $A_{\sigma_M} = 0{,}05477$

Прямые задачи вероятностных расчётов

Пример 1
(вариант с учётом функциональной зависимости между входными параметрами)

а) зависимые нагрузки



Условие: $\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = \overline{F}/2$

Решение

$$\widetilde{M}_{\max} = \widetilde{F}_1 \widetilde{a}_1 \left(1 - \frac{\widetilde{a}_1}{\widetilde{l}}\right) + (\widetilde{F} - \widetilde{F}_1)\frac{\widetilde{a}_1 \widetilde{a}_2}{\widetilde{l}}$$

$$\left.\frac{\partial \sigma_M}{\partial F_1}\right|_{X=\overline{X}} = \frac{6}{bh^2} a_1 \left.\left(1 - \frac{a_1}{l} - \frac{a_2}{l}\right)\right|_{X=\overline{X}} = \frac{6a_0}{b_0 h_0^2}(1-2\alpha) = \frac{1-2\alpha}{F_0}\cdot \overline{\sigma}_M;$$

$$\left.\frac{\partial \sigma_M}{\partial F}\right|_{X=\overline{X}} = \frac{6}{bh^2}\cdot \left.\frac{a_1 a_2}{l}\right|_{X=\overline{X}} = \frac{6a_0}{b_0 h_0^2}\alpha = \frac{\alpha}{F_0}\cdot \overline{\sigma}_M;$$

Вклад нагрузок в коэффициент вариации напряжения:

$$A_{\sigma_M(F)} = \sqrt{(1-2\alpha)^2\left(\frac{\hat{F}_1}{F_0}\right)^2 + \alpha^2\left(\frac{\hat{F}}{F_0}\right)^2} = \sqrt{(1-2\alpha)^2\left(\frac{\hat{F}_1}{F_0}\right)^2 + \alpha^2\left(\frac{2\hat{F}_1}{F_0}\right)^2} =$$

$$= A_F\sqrt{(1-2\alpha)^2 + (2\alpha)^2} = A_F\sqrt{1 - 4\alpha + 8\alpha^2}$$

В исходном решении:

$$A_{\hat{\sigma}_M(F)} = A_F\sqrt{1 - 2\alpha + 2\alpha^2}$$

Коэффициент вариации напряжения:

$$A_{\sigma_M} = \sqrt{(1 - 4\alpha + 8\alpha^2)A_F^2 + \gamma A_a^2 + A_b^2 + 4A_h^2} = 10^{-2}\sqrt{41\frac{1}{2} + (1-2\alpha)\left(\frac{1}{4\alpha^2} - 144\alpha\right)}.$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

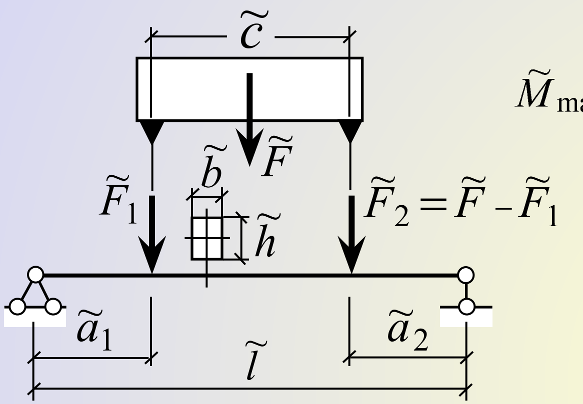
Пример 1
(вариант с учётом функциональной зависимости между входными параметрами)

α	A_{σ_M}	$A_{\sigma_{M(F)}}$
0	∞	6,000
0,1	7,070	4,948
0,2	5,289	4,327
0,25	5,050	4,243
0,3	5,033	4,327
0,4	5,504	4,948
0,5	6,442	6,000

Прямые задачи вероятностных расчётов

Пример 1
(вариант с учётом функциональной зависимости между входными параметрами)

б) зависимые нагрузки и размеры



Условие: $\overline{F}_1=\overline{F}_2=\overline{F}/2$

Дополнительно: $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\tilde{c}=\tilde{l}$

Решение

$$\tilde{M}_{\max}=\tilde{F}_1\,\tilde{a}_1\left(1-\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{l}}\right)+(\tilde{F}-\tilde{F}_1)\,\frac{\tilde{a}_1(\tilde{l}-\tilde{a}_1-\tilde{c})}{\tilde{l}};$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial F_1}\right|_{X=\overline{X}}=\left.\frac{6}{bh^2}\cdot\frac{a_1c}{l}\right|_{X=\overline{X}}=\frac{6a_0}{b_0h_0^2}(1-2\alpha)=\frac{1-2\alpha}{F_0}\cdot\overline{\sigma}_M;$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial F}\right|_{X=\overline{X}}=\left.\frac{6a_1}{bh^2}\cdot\left(1-\frac{a_1}{l}-\frac{c}{l}\right)\right|_{X=\overline{X}}=\frac{6a_0}{b_0h_0^2}\alpha=\frac{\alpha}{F_0}\cdot\overline{\sigma}_M;$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial a_1}\right|_{X=\overline{X}}=\left.\frac{6}{bh^2}\cdot\left[F_1\left(1-\frac{2a_1}{l}\right)+(F-F_1)\left(1-\frac{2a_1}{l}-\frac{c}{l}\right)\right]\right|_{X=\overline{X}}=\frac{(1-2\alpha)}{a_0}\cdot\overline{\sigma}_M;$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial c}\right|_{X=\overline{X}}=\left.-\frac{6(F-F_1)a_1}{bh^2}\cdot\frac{1}{l}\right|_{X=\overline{X}}=-\frac{1}{l}\cdot\overline{\sigma}_M;$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_M}{\partial l}\right|_{X=\overline{X}}=\left.\frac{6a_1}{bh^2}\cdot\left[F_1\frac{a_1}{l^2}+(F-F_1)\left(\frac{a_1+c}{l^2}\right)\right]\right|_{X=\overline{X}}=\frac{1}{l}\cdot\overline{\sigma}_M;$$

Коэффициент вариации напряжения:

$$A_{\sigma_M}=\sqrt{\left(\frac{1-2\alpha}{F_0}\cdot\hat{F}_1\right)^2+\left(\frac{\alpha}{F_0}\cdot\hat{F}\right)^2+\left(\frac{1-2\alpha}{a_0}\cdot\hat{a}_1\right)^2+\left(-\frac{1}{l}\cdot\hat{c}\right)^2+\left(\frac{1}{l}\cdot\hat{l}\right)^2+\left(\frac{1}{b_0}\cdot\hat{b}\right)^2+\left(\frac{2}{h_0}\cdot\hat{h}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(1-4\alpha+8\alpha^2)A_F^2+(1-2\alpha)^2(A_a^2+A_c^2)+A_l^2+A_b^2+4A_h^2}\,.$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

Пример 1
(вариант с учётом функциональной зависимости между входными параметрами)

При $A_c = A_l = 0{,}001$:

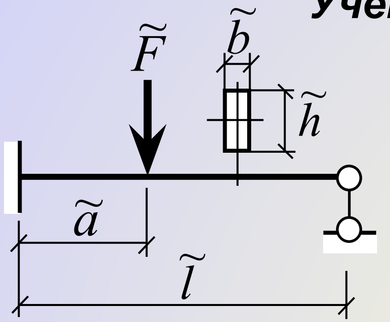
$$A_{\sigma_M} = 10^{-2}\sqrt{36(1-4\alpha+8\alpha^2)+(1-2\alpha)^2\left(\frac{1}{4\alpha^2}+0{,}01\right)+5{,}01}\,.$$

α	A_{σ_M}	$A_{\sigma_{M(F,a)}}$
0	∞	∞
0,1	6,745	6,362
0,2	5,097	4,579
0,25	4,900	4,359
0,3	4,917	4,378
0,4	5,436	4,954
0,5	6,404	6,000

Прямые задачи вероятностных расчётов

Пример 2

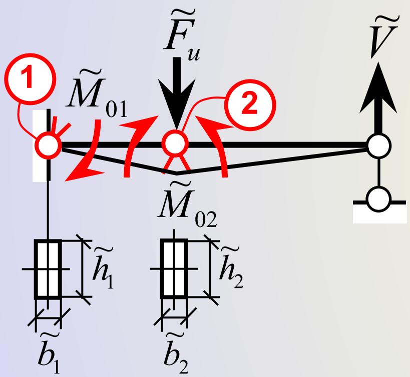
Учёт стохастической зависимости (корреляции) между входными параметрами



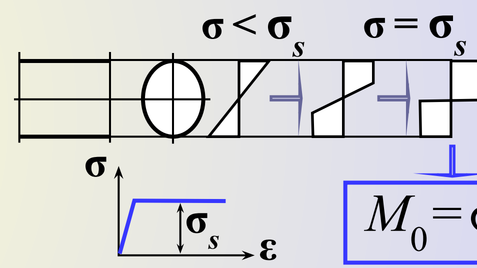
Требуется: **определить предельную (разрушающую) нагрузку *), учитывая корреляцию пределов текучести материала и пластических моментов сопротивления сечений с пластическими шарнирами**

Решение

Из условий равновесия балки в предельном состоянии



$$\begin{cases} \sum m_1 = \tilde V \cdot \tilde l - \tilde F_u \cdot \tilde a + \tilde M_{01} = 0, \\ \sum m_2^{\text{прав}} = \tilde V \cdot (\tilde l - \tilde a) - \tilde M_{02} = 0 \end{cases}$$

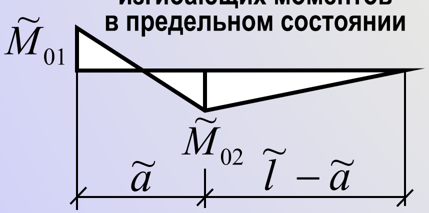


$$\boxed{M_0 = \sigma_s W_p}$$

после исключения $\tilde V$ **получается**

$$\tilde F_u = \frac{1}{\tilde a}\left(\tilde M_{01} + \frac{\tilde M_{02}}{1 - \tilde a / \tilde l}\right),$$ **где** $$\tilde M_{01} = \tilde\sigma_{s1} \tilde W_{p1} = \tilde\sigma_{s1} \tilde b_1 \tilde h_1^2 / 4; \quad \tilde M_{02} = \tilde\sigma_{s2} \tilde W_{p2} = \tilde\sigma_{s2} \tilde b_2 \tilde h_2^2 / 4$$

Эпюра
изгибающих моментов
в предельном состоянии



$$\tilde F_u = u(\{\tilde X\}) \quad \{\tilde X\} = \{\tilde l \;\tilde a \;\tilde b_1 \;\tilde h_1 \;\tilde b_2 \;\tilde h_2 \;\tilde\sigma_{s1} \;\tilde\sigma_{s2}\} \quad (n = 8)$$

Математическое ожидание предельной нагрузки:

$$\overline F_u = \frac{\overline M_0}{\overline l} \cdot \frac{2-\alpha}{\alpha \cdot (1-\alpha)},$$ **где** $$\overline M_0 = \overline\sigma_s \overline b \,\overline h^2 / 4; \quad \alpha = \frac{\overline a}{\overline l}$$

*) **Условно прямая задача**

Прямые задачи вероятностных расчётов

Дисперсия предельной нагрузки (по МСЛ):

$$\overset{\frown}{F}_u = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{8}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{X=\bar{X}}\cdot\widehat{x_i x_j}$$

Учитываемые ковариации:

$$\widehat{h_1h_2} = \widehat{h_2h_1} = k_h\hat{h}_1\hat{h}_2 = k_h\overset{\frown}{h};\quad \widehat{b_1b_2} = \widehat{b_2b_1} = k_b\hat{b}_1\hat{b}_2 = k_b\overset{\frown}{b};\quad \widehat{\sigma_{s1}\sigma_{s2}} = \widehat{\sigma_{s2}\sigma_{s1}} = k_{\sigma s}\hat{\sigma}_{s1}\hat{\sigma}_{s2} = k_{\sigma s}\overset{\frown}{\sigma}_s$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial l}\Bigg|_{X=\bar{X}} = -\frac{\bar{M}_0}{\bar{l}^{\,2}}\cdot\frac{1}{(1-\alpha)^2};\quad \frac{\partial F_u}{\partial a}\Bigg|_{X=\bar{X}} = -\frac{\bar{M}_0}{\bar{l}^{\,2}}\cdot\frac{(2-\alpha)^2-2}{\alpha^2(1-\alpha)^2};$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial b_1}\Bigg|_{X=\bar{X}} = \frac{\bar{M}_0}{\bar{l}}\cdot\frac{1}{\alpha\bar{b}};\quad \frac{\partial F_u}{\partial h_1}\Bigg|_{X=\bar{X}} = \frac{\bar{M}_0}{\bar{l}}\cdot\frac{2}{\alpha\bar{h}};\quad \frac{\partial F_u}{\partial \sigma_{s1}}\Bigg|_{X=\bar{X}} = \frac{\bar{M}_0}{\bar{l}}\cdot\frac{1}{\alpha\bar{\sigma}_s};$$

$$\frac{\partial F_u}{\partial b_2}\Bigg|_{X=\bar{X}} = \frac{\bar{M}_0}{\bar{l}}\cdot\frac{1}{\alpha(1-\alpha)\bar{b}};\quad \frac{\partial F_u}{\partial h_2}\Bigg|_{X=\bar{X}} = \frac{\bar{M}_0}{\bar{l}}\cdot\frac{2}{\alpha(1-\alpha)\bar{h}};\quad \frac{\partial F_u}{\partial \sigma_{s2}}\Bigg|_{X=\bar{X}} = \frac{\bar{M}_0}{\bar{l}}\cdot\frac{1}{\alpha(1-\alpha)\bar{\sigma}_s}.$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overset{\frown}{F}_u = \left(\frac{\bar{M}_0}{\bar{l}}\right)^2\cdot\Bigg\{&\left(\frac{A_l}{1-\alpha}\right)^2 + \left[\frac{(2-\alpha)^2-2}{\alpha(1-\alpha)^2}\right]^2 A_a^2 + \left(\frac{A_b}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{2A_h}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{A_{\sigma_s}}{\alpha}\right)^2 + \\ &+\left[\frac{A_b}{\alpha(1-\alpha)}\right]^2 + \left[\frac{2A_h}{\alpha(1-\alpha)}\right]^2 + \left[\frac{A_{\sigma_s}}{\alpha(1-\alpha)}\right]^2 + \underline{\frac{2}{\alpha^2(1-\alpha)}\left(k_bA_b^2 + 4k_hA_h^2 + k_{\sigma_s}A_{\sigma_s}^2\right)}\Bigg\}.\end{aligned}}$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

После преобразований:

$$\tilde{F}_u=\left(\overline{F}_u\right)^2\cdot\left\{\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\cdot A_l\right)^2+\left[\frac{(2-\alpha)^2-2}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\cdot A_a\right]^2+A_b^2+4A_h^2+A_{\sigma_s}^2+\right.$$

менее 1 : 2

$$\left.+\underline{\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)^2}\left(k_b A_b^2+4k_h A_h^2+k_{\sigma_s}A_{\sigma_s}^2\right)}\right\}.$$

Учет смешанных дисперсий (парной корреляции) величин $\tilde{b},\tilde{h},\tilde{\sigma}_s$ для сечений 1 и 2.

Исходные данные: $\bar{l}=4$ м; $A_l=0{,}001$; $\bar{a}=2$ м; $A_a=0{,}003$; $\bar{h}=20$ см; $A_h=0{,}005$; $\bar{b}=10$ см; $A_b=0{,}005$; $\bar{\sigma}_s=300$ МПа; $A_{\sigma s}=0{,}08$; $k_b=k_h=0{,}5$; $k_{\sigma s}=0{,}7$.

Математическое ожидание:

$$\overline{F}_u=\frac{\overline{M}_0}{\bar{l}}\cdot\frac{2-\alpha}{\alpha(1-\alpha)}=\frac{6\overline{M}_0}{\bar{l}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\bar{\sigma}_s\bar{b}\bar{h}^2}{\bar{l}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{300\text{ МПа}\cdot 0{,}1\text{ м}\cdot(0{,}2\text{ м})^2}{4\text{ м}}=0{,}45\text{ МН}$$

Дисперсия:

$$\tilde{F}_u=\left(\overline{F}_u\right)^2\left[\frac{1}{9}\left(A_l^2+A_a^2\right)+\left(1+\frac{4}{9}k_b\right)A_b^2+4\left(1+\frac{4}{9}k_h\right)A_h^2+\left(1+\frac{4}{9}k_{\sigma_s}\right)A_{\sigma_s}^2\right]=$$

$$=\left(\overline{F}_u\right)^2\left[0{,}1111\cdot\left(A_l^2+A_a^2\right)+1{,}2222\cdot\left(A_b^2+4A_h^2\right)+1{,}3111\cdot A_{\sigma_s}^2\right]=$$

$$=(0{,}45\text{ МН})^2*10^{-4}*[\underbrace{0{,}1111*(0{,}12+0{,}32)}_{0{,}0111}+\underbrace{1{,}2222*(0{,}52+4*0{,}52)}_{1{,}5278}+\underbrace{1{,}3111*82}_{83{,}9104}]=$$

$$=\underline{0{,}17303*10^{-2}\text{ МН}^2}$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

Пример 3

Требуется:

Получить статистические оценки наибольшего по абсолютной величине напряжения в жёсткой (короткой) стойке, в детерминистическом представлении испытывающей в упругой стадии осевое сжатие с напряжением $\sigma_0 = |\sigma|_{max} = F/A = F/(bh)$.

Решение

Формирование стохастической расчётной модели

Стержень испытывает сжатие с изгибом в двух главных плоскостях. Для плоскости $x0y$:

$$\tilde{\sigma}_0 = |\,\tilde{\sigma}_N\,| + |\,\tilde{\sigma}_M\,|_{max} = \frac{\tilde{F}}{\tilde{b}\tilde{h}} + \frac{|\,\tilde{M}\,|_{max}}{\tilde{b}\tilde{h}^2/6},$$

$$|\,\tilde{M}\,|_{max} = \tilde{F}\cdot|\,\tilde{e}_0 + \tilde{v}_0 + \tilde{v}_*(x)\,|_{max} =$$

$$= \tilde{F}\cdot|\,\tilde{e}_0 + \tilde{v}_0 + \tilde{f}\,| = \tilde{F}\cdot|\,\tilde{\Delta}\,| = \tilde{F}\cdot\tilde{e}\,;\ \tilde{e} = |\tilde{\Delta}|;$$

$$\tilde{\Delta} = \tilde{e}_0 + \tilde{v}_0 + \tilde{f}\,.$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\tilde{F}}{\tilde{b}\tilde{h}} + \frac{\tilde{F}\cdot\tilde{e}}{\tilde{b}\tilde{h}^2/6} = \frac{\tilde{F}}{\tilde{b}\tilde{h}}\left(1 + \frac{6\tilde{e}}{\tilde{h}}\right).$$

Замечание: $\tilde{v}_*(x)$ – начальное несовершенство (погибь), **не прогиб!**

$$\tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma}_0(\tilde{X}),\ \text{где}\ \tilde{X} = \{\tilde{F}\ \ \tilde{e}\ \ \tilde{b}\ \ \tilde{h}\}\ \ (n = 4).$$

Математическое ожидание напряжения:

$$\boxed{\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{F}}{\bar{b}\bar{h}}\left(1 + \frac{6\bar{e}}{\bar{h}}\right) = |\bar{\sigma}_N|\left(1 + \frac{6\bar{e}}{\bar{h}}\right),}\quad |\bar{\sigma}_N| = \bar{F}/(\bar{b}\bar{h}).$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

Стандарт (по методу статистической линеаризации):

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}\left(\left.\frac{\partial\sigma_0}{\partial x_i}\right|_{X=\overline{X}}\hat{x}_i\right)^2},$$

где $\left.\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial F}\right|_{X=\overline{X}} = \dfrac{1}{\overline{b}\,\overline{h}}\left(1+\dfrac{6\overline{e}}{\overline{h}}\right) = |\overline{\sigma}_N|\cdot\dfrac{1}{\overline{F}}\left(1+\dfrac{6\overline{e}}{\overline{h}}\right);$ $\quad \left.\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial e}\right|_{X=\overline{X}} = \dfrac{\overline{F}}{\overline{b}\,\overline{h}}\cdot\dfrac{6}{\overline{h}} = |\overline{\sigma}_N|\cdot\dfrac{6}{\overline{h}};$

$$\left.\frac{\partial\sigma_0}{\partial b}\right|_{X=\overline{X}} = -\frac{\overline{F}}{\overline{b}^2\overline{h}}\left(1+\frac{6\overline{e}}{\overline{h}}\right) = -|\overline{\sigma}_N|\cdot\frac{1}{\overline{b}}\left(1+\frac{6\overline{e}}{\overline{h}}\right);$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_0}{\partial h}\right|_{X=\overline{X}} = -\frac{\overline{F}}{\overline{b}\,\overline{h}^2}\left(1+\frac{12\overline{e}}{\overline{h}}\right) = -|\overline{\sigma}_N|\cdot\frac{1}{\overline{h}}\left(1+\frac{12\overline{e}}{\overline{h}}\right);$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\sigma}_0 &= |\overline{\sigma}_N|\sqrt{\left(1+\frac{6\overline{e}}{\overline{h}}\right)^2 A_F^2 + 36\left(\frac{\hat{e}}{\overline{h}}\right)^2 + \left(1+\frac{6\overline{e}}{\overline{h}}\right)^2 A_b^2 + \left(1+\frac{12\overline{e}}{\overline{h}}\right)^2 A_h^2} = \\ &= |\overline{\sigma}_N|\sqrt{\left(1+\frac{6\overline{e}}{\overline{h}}\right)^2 (A_F^2 + A_b^2) + 36\left(\frac{\hat{e}}{\overline{h}}\right)^2 + \left(1+\frac{12\overline{e}}{\overline{h}}\right)^2 A_h^2}.\end{aligned}}$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

Коэффициент вариации напряжения:

$$A_{\sigma_0}=\frac{\hat{\sigma}_0}{\overline{\sigma}_0}=\sqrt{A_F^2+A_b^2+\left(1+\frac{6\overline{e}}{\overline{h}}\right)^{-2}\left[36\left(\frac{\hat{e}}{\overline{h}}\right)^2+\left(1+\frac{12\overline{e}}{\overline{h}}\right)^2 A_h^2\right]}.$$

Исходные данные

$A_b=A_h=0{,}007$; A_F – в двух вариантах: 0 и $0{,}08$; $\overline{e}_0=\overline{v}_0=\overline{f}=0$; $\hat{v}_0=\hat{f}=\overline{l}/400$
(по СНиП, допустимое отклонение кирпичной стены от вертикали – 3 см на этаж);
$\hat{e}_0=\overline{\rho}/10$ ($\widetilde{\rho}=\widetilde{W}/\widetilde{A}$ – ядровое расстояние; для прямоугольного сечения $\widetilde{\rho}=\widetilde{h}/6$,
тогда $\hat{e}_0=\overline{h}/60$).

Математическое ожидание и дисперсия эксцентриситета $\widetilde{e}=|\widetilde{\Delta}|=\sqrt{\widetilde{\Delta}^2}$ определяются через вероятностные характеристики случайной величины $\widetilde{\Delta}=\widetilde{e}_0+\widetilde{v}_0+\widetilde{f}$ (см. *Приложение*):

$$\overline{e}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\Delta^2}\,p_\Delta(\Delta)\,d\Delta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\hat{\Delta}\approx\underline{0{,}8\hat{\Delta}};\quad\left(\hat{\Delta}=\sqrt{\hat{e}_0^2+\hat{v}_0^2+\hat{f}^2}\right)$$

$$\hat{e}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{\Delta^2}\right)^2 p_\Delta(\Delta)\,d\Delta-\overline{e}^2=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\hat{\Delta}^2\approx 0{,}3634\hat{\Delta}^2\ \Rightarrow\ \underline{\hat{e}\approx 0{,}6\,\hat{\Delta}}$$

Вычислив $\hat{\Delta}=\frac{5}{3}\cdot 10^{-2}\,\overline{h}\sqrt{1+0{,}045\,\beta^2}$, где $\beta=\overline{l}/\overline{h}$, находим

$$\overline{\sigma}_0=\alpha_1\overline{\sigma}_N;\quad \hat{\sigma}_0=\overline{\sigma}_N\sqrt{\alpha_1^2(A_F^2+0{,}007^2)+(0{,}0603\,k)^2+(0{,}007\,\alpha_2)^2}$$

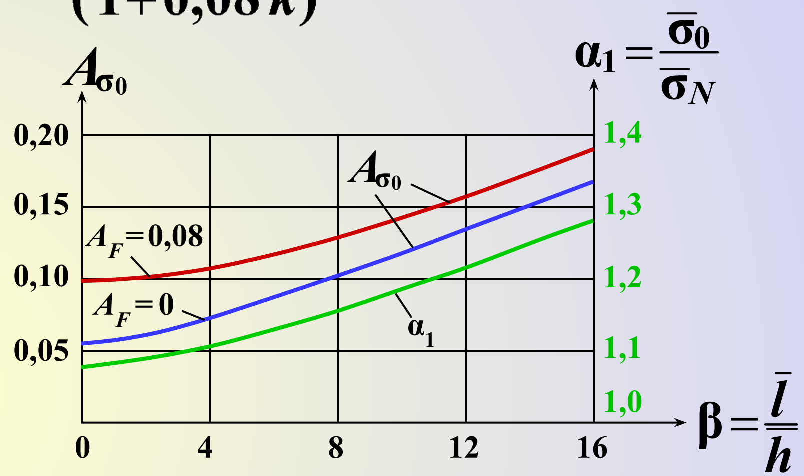
(здесь $k=\sqrt{1+0{,}045\,\beta^2}$; $\alpha_1=1+0{,}08\,k$; $\alpha_2=1+0{,}16\,k$)

Прямые задачи вероятностных расчётов

Коэффициент вариации напряжения:

$$A_{\sigma 0} = 10^{-2}\sqrt{(100\,A_F)^2 + 0{,}49 + \frac{36{,}0125\,k^2 + 0{,}1568\,k + 0{,}49}{(1+0{,}08\,k)^2}}$$

A_F	β				
	0	4	8	12	16
0,08	0,0979	0,1076	0,1301	0,1570	0,1841
0	0,0565	0,0720	0,1026	0,1351	0,1658
α_1	1,080	1,105	1,158	1,219	1,283



В ы в о д ы:

1. Основное влияние на вариативность напряжений в стойке имеют начальные несовершенства геометрии оси стержня и эксцентричность приложения нагрузки.
2. Для очень массивных колонн ($0 \le \beta \le 4$) в бóльшей степени сказывается влияние случайного эксцентриситета нагрузки, а с увеличением гибкости преобладающим становится влияние начальных искривлений стержня.

Доверительный интервал значений наибольшего напряжения в стойке

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_0\,(1 \pm A_{\sigma 0}\cdot|u|_{P_{\sigma 0}})$$

При $\beta = 8$, $A_F = 0{,}08$ и доверительной вероятности $P_{\sigma 0} = 0{,}99$: ($|u|_{P_{\sigma 0}} = 2{,}576$)

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_0(1 \pm 0{,}335) = |\bar{\sigma}_N|\left(1\begin{matrix}+0{,}546\\-0{,}230\end{matrix}\right)$$

При $\beta = 12$:

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_0(1 \pm 0{,}404) = |\bar{\sigma}_N|\left(1\begin{matrix}+0{,}711\\-0{,}273\end{matrix}\right)$$

П р и л о ж е н и е к примеру 3

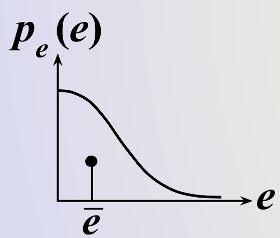
Вероятностные характеристики абсолютной величины функции случайного аргумента

Рассматривая $\tilde{e}$ как функцию от $\tilde{\Delta}$ ($\tilde{e} = |\tilde{\Delta}| = \sqrt{\tilde{\Delta}^2}$, $\tilde{\Delta} = \tilde{e}_0 + \tilde{v}_0 + \tilde{f}$), используем формулы для определения математического ожидания и дисперсии функции одного аргумента:

$$\bar{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\Delta^2}\, p_\Delta(\Delta)\, d\Delta\ ; \quad \overset{\boxtimes}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\Delta^2}\right)^2 p_\Delta(\Delta)\, d\Delta - \bar{e}^2$$

Если распределения $\tilde{e}_0$, $\tilde{v}_0$ и $\tilde{f}$ – нормальные, то и распределение их суммы получается также нормальным:

$$p_\Delta(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}\boxtimes}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\Delta\boxtimes}}, \text{ тогда } \bar{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\Delta^2}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}\boxtimes}\, \mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\Delta\boxtimes}} d\Delta = \frac{2}{\sqrt{2\pi\Delta}\boxtimes} \int_0^{+\infty} \Delta e^{-\frac{\Delta^2}{2\Delta\boxtimes}} d\Delta =$$



$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta\boxtimes}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\Delta\boxtimes}} dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta\boxtimes}} \cdot \overset{\boxtimes}{\Delta} \cdot e^{-\frac{t^2}{\Delta\boxtimes}} \Bigg|_0^{+\infty} = -\sqrt{\frac{2\overset{\boxtimes}{\Delta}}{\pi}} \cdot (0-1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \hat{\Delta} \approx$$

$$t = \Delta^2/2$$

$$\approx \underline{0{,}798\, \hat{\Delta} \approx 0{,}8\, \hat{\Delta}}\ ;$$

$$\overset{\boxtimes}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\Delta^2}\right)^2 p_\Delta(\Delta)\, d\Delta - \bar{e}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 p_\Delta(\Delta)\, d\Delta - \bar{e}^2 = \overset{\boxtimes}{\Delta} - \bar{\mathrm{e}}^2 = \overset{\boxtimes}{\Delta}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \approx 0{,}3634\, \overset{\boxtimes}{\Delta}$$

$$\underline{\hat{\mathrm{e}} = 0{,}603\, \hat{\Delta} \approx 0{,}6\, \hat{\Delta}}$$

Коэффициент вариации величины $\tilde{e}$: $A_e = \hat{e}/\bar{e} = \dfrac{0{,}603}{0{,}798} = \underline{0{,}756.}$

Прямые задачи вероятностных расчётов

П р и м е р 3
(дополнения)

1. Учёт пространственного изгиба

$$\tilde\sigma_0 = |\tilde\sigma_N| + \left(|\tilde\sigma_{M_z}| + |\tilde\sigma_{M_y}|\right)_{\max} = \frac{\tilde F}{\tilde b\tilde h} + \left(\frac{|\tilde M_z|}{\tilde b\tilde h^2/6} + \frac{|\tilde M_y|}{\tilde b^2\tilde h/6}\right)_{\max} =$$

$$= \frac{\tilde F}{\tilde b\tilde h} + \frac{1}{\tilde b\tilde h}\left(\frac{6\tilde F|\tilde\Delta_y|}{\tilde h} + \frac{6\tilde F|\tilde\Delta_z|}{\tilde b}\right)_{\max} = |\tilde\sigma_N|\left[1+6\left(\frac{\tilde e_y}{\tilde h} + \frac{\tilde e_z}{\tilde b}\right)_{\max}\right];$$

$$|\tilde\sigma_N| = \frac{\tilde F}{\tilde b\tilde h}; \quad \tilde e_y = |\tilde\Delta_y| = |\tilde e_{0y} + \tilde v_0 + \tilde v_*(x)|; \quad \tilde e_z = |\tilde\Delta_z| = |\tilde e_{0z} + \tilde w_0 + \tilde w_*(x)|$$

Математическое ожидание напряжения:

$$\bar\sigma_0 = |\bar\sigma_N|\left[1+6\left(\frac{\bar e_y}{\bar h} + \frac{\bar e_z}{\bar b}\right)_{\max}\right]; \quad |\bar\sigma_N| = \frac{\bar F}{\bar b\bar h};$$

Стандарт:

$$\hat\sigma_0 = |\bar\sigma_N|\sqrt{\left[1+6\left(\frac{\bar e_y}{\bar h} + \frac{\bar e_z}{\bar b}\right)\right]^2 A_F^2 + 36\left[\left(\frac{\hat e_y}{\bar h}\right)^2 + \left(\frac{\hat e_z}{\bar b}\right)^2\right] + \left(1+\frac{6\bar e_y}{\bar h} + \frac{12\bar e_z}{\bar b}\right)^2 A_b^2 + \left(1+\frac{12\bar e_y}{\bar h} + \frac{6\bar e_z}{\bar b}\right)^2 A_h^2}$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

Пример 3
(дополнения)

1. Учёт пространственного изгиба

Коэффициент вариации напряжения:

$$A_{\sigma_0} = 10^{-2}\sqrt{(100\,A_F)^2 + \frac{72 + 1{,}62\,\alpha_c\,\beta^2 + \{2{,}064 + 14{,}4\cdot 10^{-4}\alpha_c\,\beta^2 + 0{,}48\,(k_y + k_z) + 0{,}0512\,k_y k_z\}\cdot(100\,A_b)^2}{[1 + 0{,}08\,(k_y + k_z)]^2}}$$

$$\alpha_c = 1 + \left(\frac{\bar{h}}{\bar{b}}\right)^2; \quad \beta = \frac{l}{h}; \quad k_y = \sqrt{1 + 0{,}045\,\beta^2}\;; \quad k_z = \sqrt{1 + 0{,}045\left(\frac{\bar{h}}{\bar{b}}\,\beta\right)^2}$$

Значения A_{σ_0} при $\frac{\bar{h}}{\bar{b}} = 2$

A_F \ β	8	12
0	0,1690	0,2157
0,08	0,1870	0,2301

Значения A_{σ_0} при $\frac{\bar{h}}{\bar{b}} = 0{,}5$

A_F \ β	8	12
0	0,1130	0,1418
0,08	0,1389	0,1629

Доверительный интервал при $A_F = 0{,}08$ и $P_{\sigma o} = 0{,}99$ для $\beta = 8$:

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_0(1 \pm 0{,}482) = |\bar{\sigma}_N|\left(1\,{}^{+1{,}135}_{-0{,}254}\right)$$

Для сравнения – при учёте изгиба только в плоскости $x0y$

A_F \ β	8	12
0	0,1026	0, 1351
0,08	0,1301	0,1570

Доверительный интервал:

$$\sigma_0 = \bar{\sigma}_0(1 \pm 0{,}335) = |\bar{\sigma}_N|\left(1\,{}^{+0{,}546}_{-0{,}230}\right)$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

Пример 3
(дополнения)

2. Учёт эффекта продольно-поперечного изгиба

Приближённо: $\tilde{\sigma}_0 = \dfrac{\tilde{F}}{\tilde{b}\,\tilde{h}}\left(1 + \dfrac{6\,\tilde{e}}{\tilde{h}} \cdot \dfrac{1}{1 - \tilde{F}/\tilde{F}_{eil}}\right)$, где $\tilde{F}_{eil} = \dfrac{\pi^2 \tilde{E}\tilde{I}}{(2\tilde{l}\,)^2} = \dfrac{\pi^2 \tilde{E}\tilde{b}\tilde{h}^3}{48\tilde{l}^{\,2}}$ –

эйлерова сила с математическим ожиданием $\bar{F}_{eil} = \dfrac{\pi^2 \bar{E}\bar{b}\bar{h}^3}{48\bar{l}^{\,2}}$ и стандартом

$$\hat{F}_{eil} = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 \bar{b}\bar{h}^3}{48\bar{l}^{\,2}}\cdot\hat{E}\right)^2 + \left(\frac{\pi^2 \bar{E}\bar{h}^3}{48\bar{l}^{\,2}}\cdot\hat{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi^2 \bar{E}\bar{b}\bar{h}^2}{16\bar{l}^{\,2}}\cdot\hat{h}\right)^2 + \left(-\frac{2\pi^2 \bar{E}\bar{h}^3}{48\bar{l}^{\,3}}\cdot\hat{l}\right)^2} =$$

$$= \frac{\pi^2 \bar{E}\bar{b}\bar{h}^3}{48\bar{l}^{\,2}}\sqrt{\left(\frac{\hat{E}}{\bar{E}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{b}}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{3\hat{h}}{\bar{h}}\right)^2 + \left(-\frac{2\hat{l}}{\bar{l}}\right)^2}\,; \quad A_{F_{eil}} = \sqrt{A_E^2 + A_b^2 + 9A_h^2 + 4A_l^2}\,.$$

Математическое ожидание напряжения

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{F}}{\bar{b}\,\bar{h}}\left(1 + \frac{6\,\bar{e}}{\bar{h}}\cdot\frac{1}{1 - \bar{F}/\bar{F}_{eil}}\right) = |\bar{\sigma}_N|\left(1 + \frac{6\,\bar{e}}{\bar{h}}\cdot\frac{1}{1-\xi}\right) = \alpha_1^* |\bar{\sigma}_N|,$$

$$\text{где} \quad \alpha_1^* = 1 + \frac{6\,\bar{e}}{\bar{h}}\cdot\frac{1}{1-\xi}\,; \quad \xi = \frac{\bar{F}}{\bar{F}_{eil}}\,.$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

П р и м е р 3

(дополнения)

2. Учёт эффекта продольно-поперечного изгиба

Рассматривая эйлерову силу как дополнительный входной параметр, имеем

$$\left.\frac{\partial\sigma_0}{\partial F}\right|_{X=\bar{X}}=\frac{1}{\bar{b}\,\bar{h}}\left[1+\frac{6\bar{e}}{\bar{h}}\cdot\frac{1}{(1-\xi)^2}\right]=\left|\bar{\sigma}_N\right|\cdot\frac{1}{\bar{F}}\cdot\frac{\alpha_1^*-\xi}{1-\xi};\qquad \left|\bar{\sigma}_N\right|=\frac{\bar{F}}{\bar{b}\,\bar{h}};$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_0}{\partial e}\right|_{X=\bar{X}}=\frac{\bar{F}}{\bar{b}\,\bar{h}}\cdot\frac{6}{\bar{h}}\cdot\frac{1}{1-\xi}=\left|\bar{\sigma}_N\right|\cdot\frac{\alpha_1^*-1}{\bar{e}};$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_0}{\partial b}\right|_{X=\bar{X}}=-\frac{\bar{F}}{\bar{b}^2\bar{h}}\left(1+\frac{6\bar{e}}{\bar{h}}\cdot\frac{1}{1-\xi}\right)=-\left|\bar{\sigma}_N\right|\cdot\frac{\alpha_1^*}{\bar{b}};$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_0}{\partial h}\right|_{X=\bar{X}}=-\frac{\bar{F}}{\bar{b}\,\bar{h}^2}\left(1+\frac{12\bar{e}}{\bar{h}}\cdot\frac{1}{1-\xi}\right)=-\left|\bar{\sigma}_N\right|\cdot\frac{2\alpha_1^*-1}{\bar{h}};$$

$$\left.\frac{\partial\sigma_0}{\partial F_{eil}}\right|_{X=\bar{X}}=-\frac{6\bar{e}}{\bar{b}\,\bar{h}^2}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2=-\left|\bar{\sigma}_N\right|\cdot\frac{\xi^2}{\bar{F}}\cdot\frac{\alpha_1^*-1}{1-\xi}=-\left|\bar{\sigma}_N\right|\cdot\frac{\xi}{\bar{F}_{eil}}\cdot\frac{\alpha_1^*-1}{1-\xi}.$$

Прямые задачи вероятностных расчётов

Пример 3

(дополнения)

2. Учёт эффекта продольно-поперечного изгиба

Стандарт и коэффициент вариации напряжения

$$\hat{\sigma}_0 = |\overline{\sigma}_N| \sqrt{\left(\frac{\alpha_1^* - \xi}{1-\xi}\right)^2 A_F^2 + \left(\alpha_1^* - 1\right)^2 A_e^2 + (\alpha_1^*)^2 A_b^2 + \left(2\alpha_1^* - 1\right)^2 A_h^2 + \left(\xi \cdot \frac{\alpha_1^* - 1}{1-\xi}\right)^2 A_{F_{eil}}^2};$$

$$A_{\sigma_0} = \frac{1}{\alpha_1^*} \sqrt{\left(\frac{\alpha_1^* - \xi}{1-\xi}\right)^2 A_F^2 + \left(\alpha_1^* - 1\right)^2 A_e^2 + (\alpha_1^*)^2 A_b^2 + \left(2\alpha_1^* - 1\right)^2 A_h^2 + \left(\xi \cdot \frac{\alpha_1^* - 1}{1-\xi}\right)^2 A_{F_{eil}}^2}.$$

Для вычисления значений A_{σ_0} используем те же исходные данные, что и в расчёте жёсткой стойки: $A_b = A_h = 0{,}007$; $A_e = 0{,}756$; A_F – в двух вариантах: 0 и 0,08. Дополнительно вводим коэффициенты вариации модуля упругости $A_E = 0{,}015$, длины $A_l = 0{,}001$ и находим

$$A_{F_{eil}} = \sqrt{A_E^2 + A_b^2 + 9A_h^2 + 4A_l^2} = 10^{-2}\sqrt{1{,}5^2 + 0{,}7^2 + 9\cdot 0{,}7^2 + 4\cdot 0{,}1^2} = 0{,}0268.$$

Задан $k_F = \overline{F} / \overline{F}_{eil}^0 = 0{,}25;\quad \overline{F}_{eil}^0$ **– эйлерова сила для стойки с $l/h = 6$**

$$\xi = \overline{F} / \overline{F}_{eil} = \beta^2/144\ ;\quad \alpha_1^* = 1 + \frac{11{,}52\,k}{144 - \beta^2} \qquad k = \sqrt{1 + 0{,}045\,\beta^2}$$

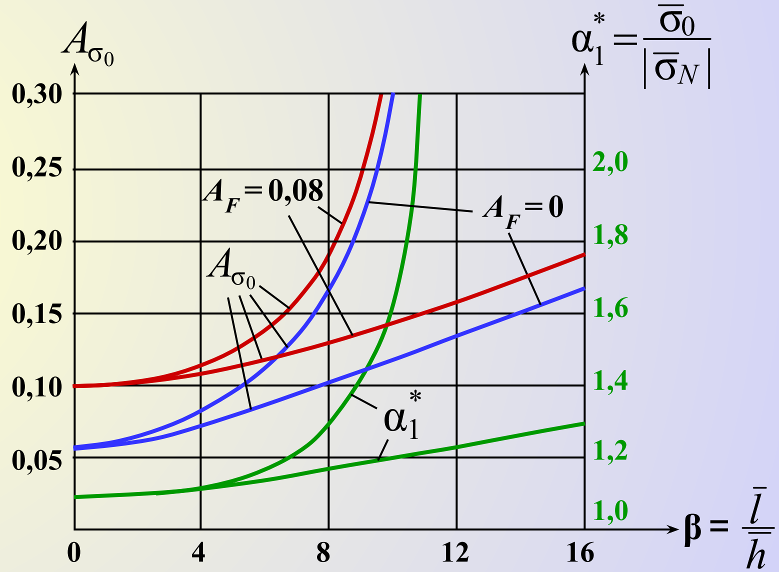
Прямые задачи вероятностных расчётов

П р и м е р 3
(дополнения)

2. Учёт эффекта продольно-поперечного изгиба

$$A_{\sigma_0} = \frac{1}{\alpha_1^*}\sqrt{\left(\frac{\alpha_1^* - \xi}{1-\xi}\right)^2 A_F^2 + 0{,}57178(\alpha_1^*)^2 - 1{,}14327\alpha_1^* + 0{,}57158 + 0{,}000718\left(\xi\cdot\frac{\alpha_1^*-1}{1-\xi}\right)^2}\,.$$

A_F	β					
	0	**4**	**8**	**10**	**12**	**16**
0,08	0,0982	0,1142	0,1921	0,3401	∞	Не определяется
0	0,0569	0,0804	0,1675	0,3038	∞	
α_1^*	1,080	1,118	1,284	1,668	∞	



При $A_F = 0{,}08$ и $P_{\sigma_0} = 0{,}99$:

для $\beta = 8$

$$\begin{cases} \sigma_0 = \overline{\sigma}_0(1 \pm 0{,}495) \\ \sigma_0 = |\overline{\sigma}_N|\left(1\begin{smallmatrix}+0{,}919\\-0{,}352\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$$

для $\beta = 10$

$$\begin{cases} \sigma_0 = \overline{\sigma}_0(1 \pm 0{,}876) \\ \sigma_0 = |\overline{\sigma}_N|\left(1\begin{smallmatrix}+2{,}128\\-0{,}793\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$$

К о н т р о л ь н ы е   в о п р о с ы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы;
для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*) ;
для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши
и выбрать «Перейти к слайду 18»)