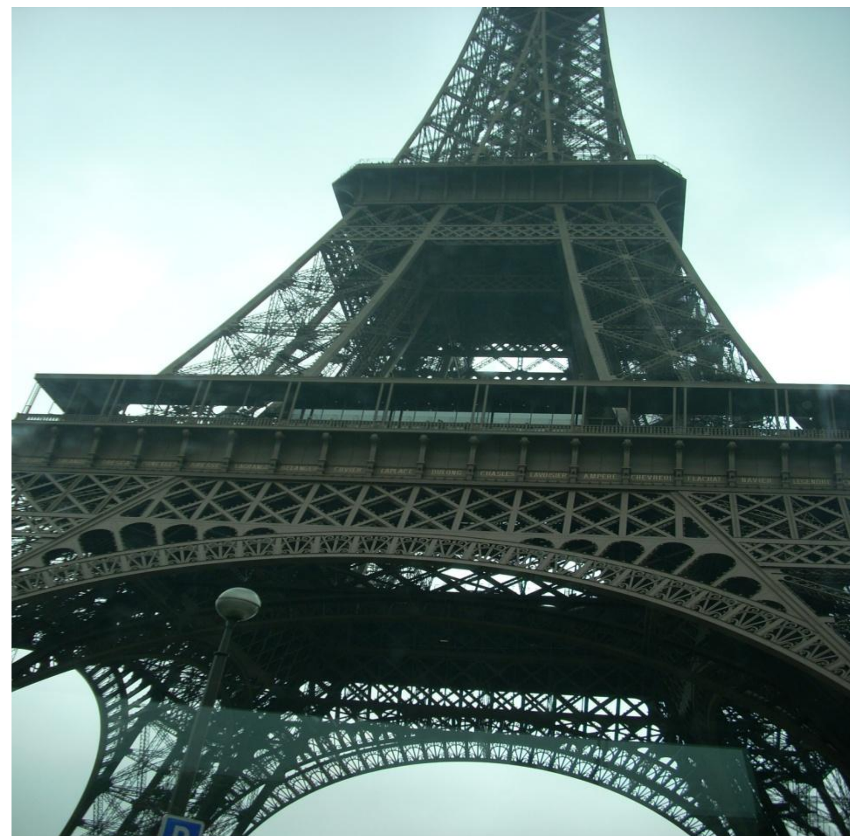
Лекция № 6

24.04.2020г.

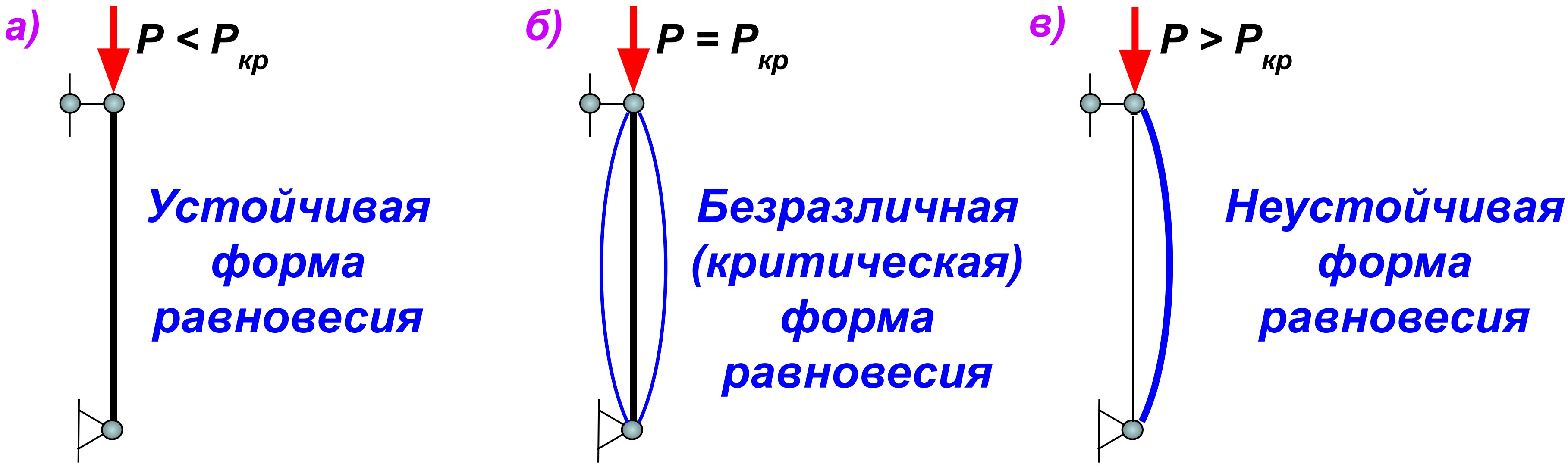
Устойчивость сжатых стержней. Формула Эйлера.

После начала использования стали при построении инженерных сооружений вопросы устойчивости гибких сжатых стержней и тонкостенных конструкций получили большое практическое значение.



В системе, находящейся в деформированном состоянии, *равновесие* между внешними нагрузками и вызываемыми ими внутренними силами упругости может быть *устойчивым*, *неустойчивым* и *безразличным*.

Центрально приложенная *сжимающая сила*, превышение которой *вызывает потерю устойчивости* первоначальной формы равновесия тела, называется *критической силой*.



Неустойчивая форма равновесия связана с неограниченным ростом деформаций и напряжений, поэтому <u>при превышении сжимающей силой ее критического значения конструкция разрушается</u>.

Для обеспечения определенного запаса устойчивости необходимо выполнение условия:

$$P \le [P]$$

где: P ***- сжимающая сила;***

$[P] = \dfrac{P_{кр}}{n_y}$ ***- допускаемая нагрузка;***

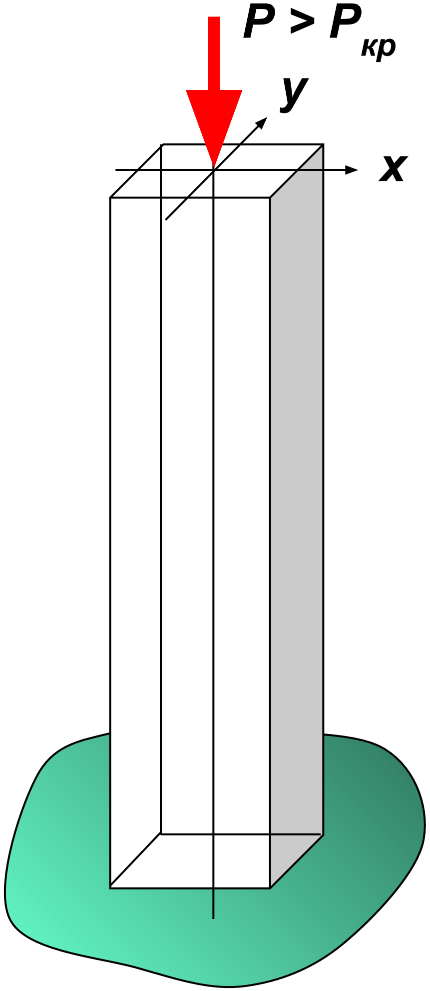
$P_{кр}$ ***- критическая сила;***

n_y ***- коэффициент запаса устойчивости.***

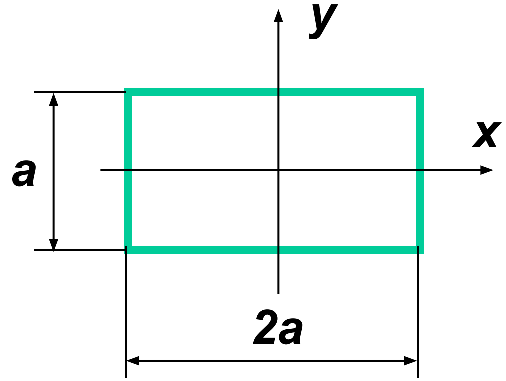
<u>Продольным изгибом</u> называется изгиб стержня, вызванный потерей устойчивости прямолинейной формы его равновесия.

При потере устойчивости прогиб произойдет перпендикулярно к оси наименьшей жесткости стержня.

$P > P_{кр}$ - потеря устойчивости



форма поперечного сечения стержня



$$I_x = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{6}$$

$$I_y = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} = \frac{4a^4}{6}$$

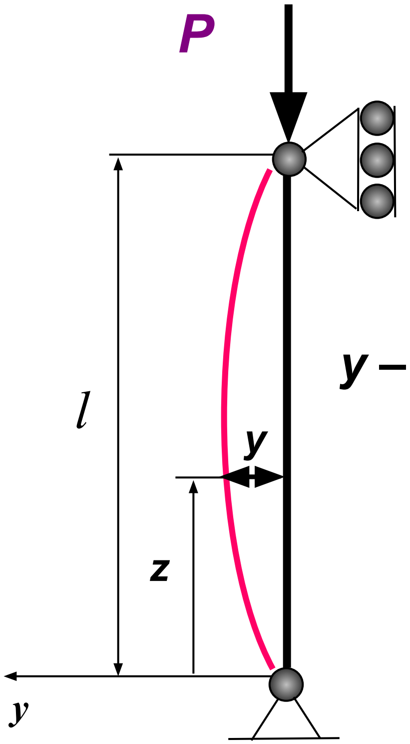
$I_x < I_y$ т.е. $I_x = min$

ось **x** - ось минимальной жесткости, $\Rightarrow$

прогиб произойдет перпендикулярно оси **x**.

Пример. Продольный изгиб линейки.

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения с шарнирно-закрепленными концами под действием продольной центрально приложенной силы P.



y – прогиб

Дифференциальное уравнение упругой линии стержня имеет вид:

$$y^{II} = \frac{M_x(z)}{EI_x}$$ или:

$$EI_{min}\, y^{II} = M_x(z) \qquad (1)$$

$$M_x(z) = -P \cdot y$$

Условимся считать момент отрицательным для удобства дальнейших рассуждений

$$EI_{min}\, y^{II} = -P \cdot y$$

$$y^{II} = -\frac{P \cdot y}{EI_{min}}$$

Введем следующее обозначение:

$$k^2 = \frac{P}{EI_{min}}$$ тогда: $y^{II} = -k^2 y$ или: $y^{II} + k^2 y = 0$ (2)

Решение уравнения (2) имеет вид:

$$y(z) = ACoskz + BSinkz \qquad (3)$$

Произвольные постоянные A и B находим из граничных условий:

1) $y(0) = 0$ **, т.е.** $0 = ACosk0 + BSink0 = A$

$$A = 0$$

2) $y(l) = 0$ **, т.е.** $0 = ACoskl + BSinkl = 0$

$$BSinkl = 0 \qquad (4) \text{ , если}$$

$$B = 0 \qquad \text{или} \qquad Sinkl = 0$$

Если подставить A=0 и B=0 в (3), то: $y(z) = 0$**, что не соответствует условию задачи, следовательно: (4) имеет корень** $Sinkl = 0$ **.**

Т.к. $k=\sqrt{\dfrac{P}{EI_{min}}}$ тогда имеем: $Sinl\sqrt{\dfrac{P}{EI_{\min}}}=0$, откуда:

$$l\sqrt{\frac{P}{EI_{\min}}}=n\pi \qquad (5)$$

, где: $n=1,2,3\ldots$

Условие (5) выполняется и при **n = 0**, но тогда из него следует, что **P = 0**,что противоречит условию задачи.

Наименьшее значение $P=P_{кр}\neq 0$ будет при **n = 1**, т.е.:

$$l\sqrt{\frac{P}{EI_{\min}}}=\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{кр}=\frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}} \qquad (6)$$

критическая сила (сила Эйлера).

Впервые была получена Л.Эйлером в 1744г.

Леонард Эйлер (1707-1787гг.), математик. С 1730г. действительный член Петербургской Академии наук. В механике занимался вопросами продольной устойчивости сжатых стержней.

Из (6) видно, что критическая сила не зависит от прочностных свойств материала.

Подставим (6) в $y(z) = BSinkz$ ***т.е. в (3)***

$$y(z) = BSin\sqrt{\frac{(n\pi)^2 EI_{\min}}{l^2 EI_{\min}}}z = BSin\frac{n\pi z}{l}$$

Итак: $$\boxed{y(z) = BSin\frac{n\pi z}{l}} \quad (7)$$ ***выражение прогиба от действия силы P.***

Значение* B *в (7) характеризуется величиной максимального прогиба $y_{\max} = f$ ***, т.е. стрелой, когда***

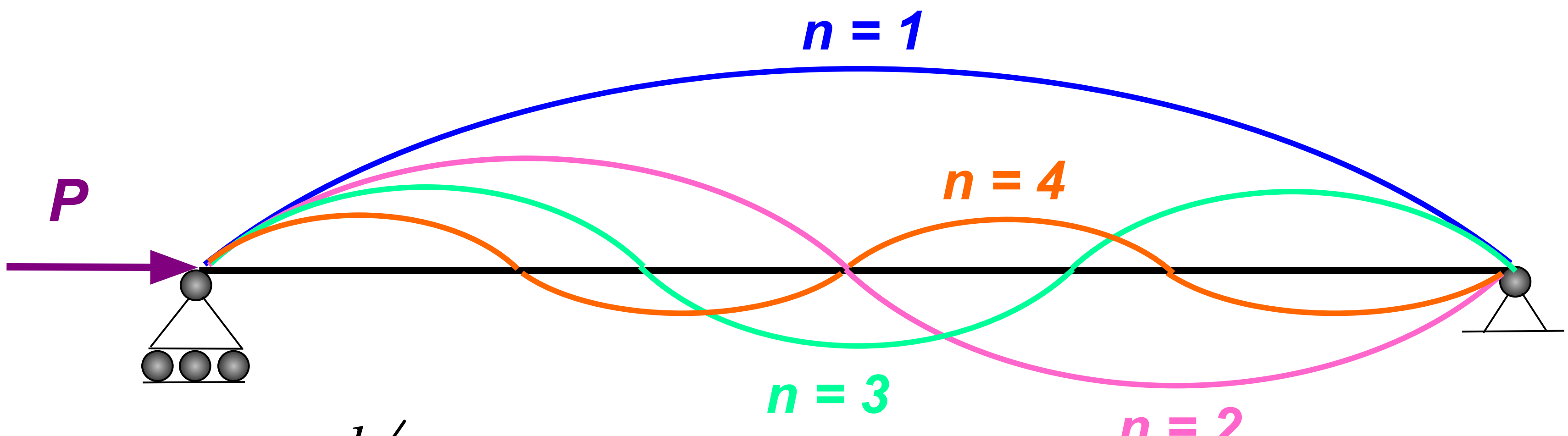
$$Sin\frac{n\pi z}{l} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = f\,Sin\frac{n\pi z}{l} \quad (8)$$

Максимум $y(z)$ **имеет место при таком** z**, для которого** $\frac{dy(z)}{dz}=0$

$$\frac{dy(z)}{dz}=f\frac{n\pi}{l}Cos\frac{n\pi}{l}z=0 \text{ , или } Cos\frac{n\pi}{l}z=0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{n\pi}{l}z=\frac{\pi}{2} \text{ , или } z=\frac{l}{2n} \qquad (9)$$

n – число длин полуволн синусоиды, умещающихся на длине стержня, испытывающего продольный изгиб.



n = 1 $\Longrightarrow z= l/2$ **- длина, на которой возникает** y_{max}.

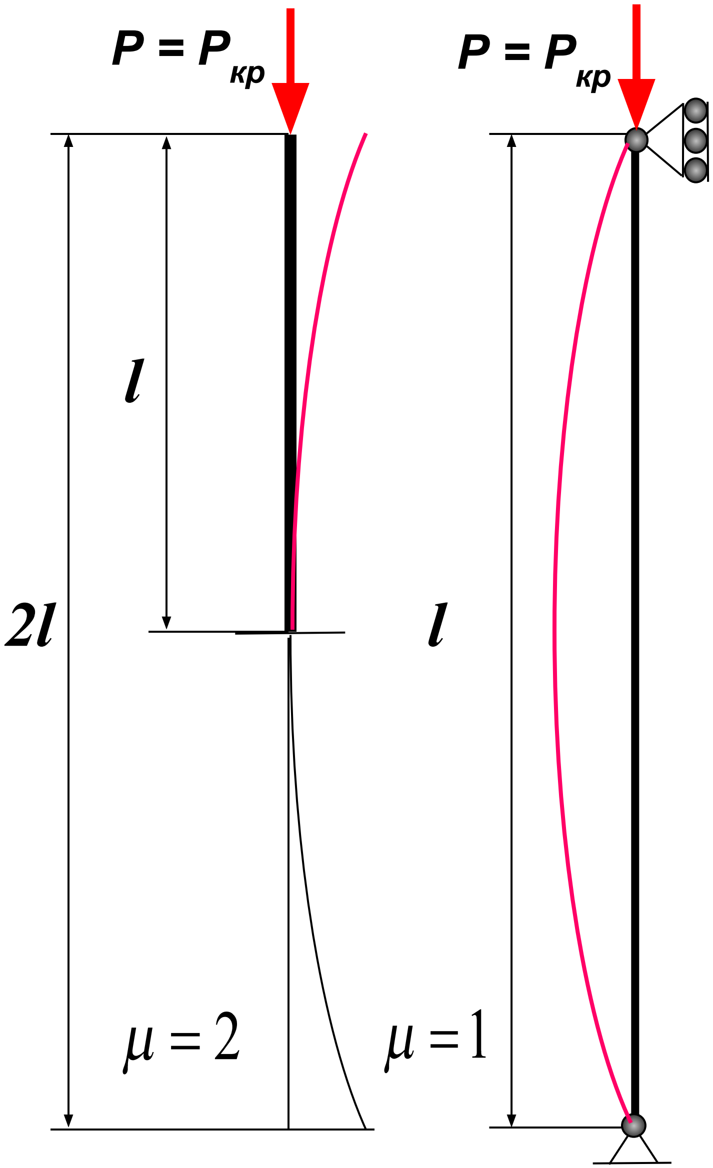
n = 2 $\Longrightarrow z= l/4$ **n = 3** $\Longrightarrow z= l/6$ **n = 4** $\Longrightarrow z= l/8$

Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы.

Рассмотрим несколько вариантов закрепления стержня длиной l и определим, сколько полуволн умещается на его длине.

а) стержень консольного типа.

б) стержень шарнирно закрепленный по концам.



Изогнутая ось стержня а) представляет собой половину полуволны синусоиды.

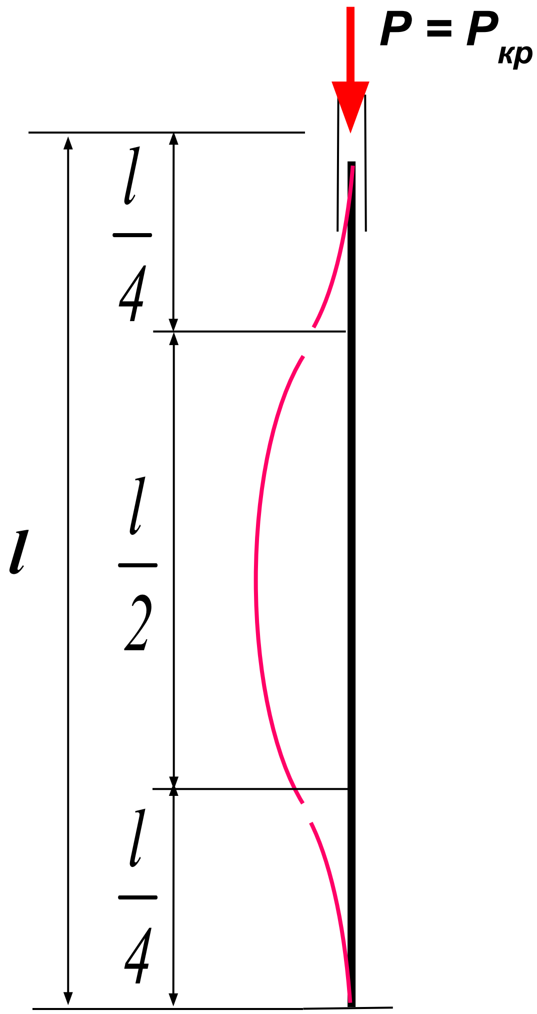
При сравнении его со стойкой Эйлера - стержнем шарнирно закрепленным по концам б), видно, что их оси будут вести себя одинаково, если длина первого будет равна

$L=2l$.

Определим $P_{кр}$ из условия $L=2l$:

$$P_{кр}=\frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}=\frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2},\Rightarrow n=\frac{1}{2}$$

в) **стержень с одним жестко закрепленным концом и другим продольно-подвижным.**



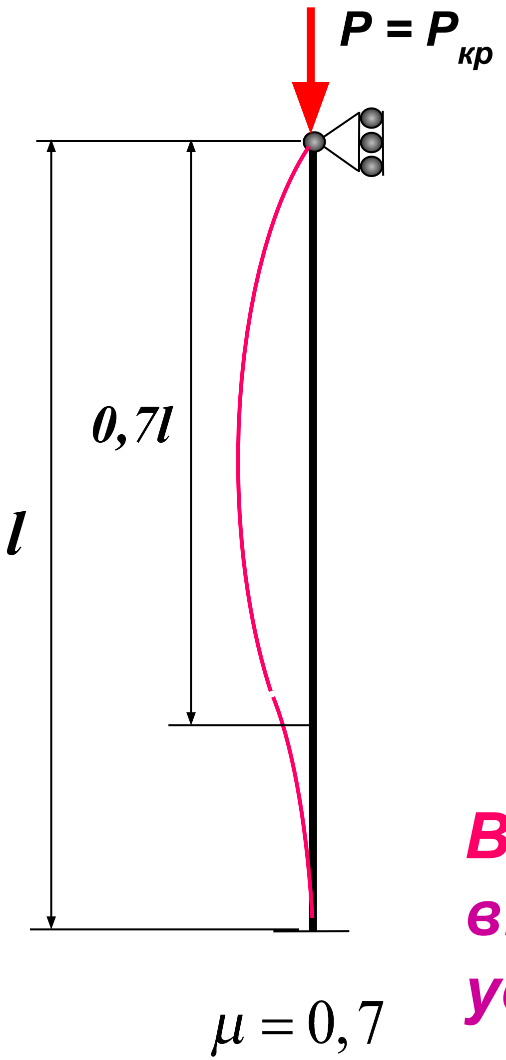
$$\mu = 0,5$$

При потере устойчивости средняя часть стержня длиной l изогнется по синусоиде, как и стержень длиной $L=l/2$, с шарнирно закрепленными концами.

Определим $P_{кр}$ из условия $L= l/2$:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,5l)^2} = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2}, \Rightarrow n = 2$$

г) стержень с одним жестко закрепленным концом и другим шарнирно-опертым.



При потере устойчивости верхняя часть стержня на длине **0,7*l*** изогнется на полуволну синусоиды.

Определим **P$_{кр}$** из условия $L = 0,7l$:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,7l)^2} = \frac{2,041\pi^2 EI_{\min}}{l^2}, \Rightarrow n \approx 1,423$$

Вывод: чем меньше μ, тем сложнее вывести стержень из состояния устойчивого равновесия.

Итак, сопоставив формулы для определения критической силы $P_{кр}$*, получаем:*

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}$$

или:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{\left(l_{пр}\right)^2}$$

Формула Эйлера

где: μ **- коэффициент приведения длины;**

l **- фактическая длина стержня;**

$l_{пр}$ **- приведенная длина стержня.**

$$\boxed{l_{пр} = \mu l}$$

Коэффициент приведения длины μ ***показывает, чему равна длина одной полуволны синусоиды при заданной длине стержня.***

Критическое напряжение.
Пределы применимости формулы Эйлера.

По значению критической силы $P_{кр}$ можно определить вызываемое ею критическое сжимающее напряжение $\sigma_{кр}$, т.е. то напряжение, при котором стержень теряет устойчивость:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2 F}$$

Т.к. минимальный радиус инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{I_{\min}}{F}}$,

то: $\sigma_{кр} = \dfrac{\pi^2 E i_{\min}{}^2}{(\mu l)^2}$. ***Введем обозначение:*** $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}}$,

λ ***- гибкость стержня***

(безразмерная величина).

Тогда: $\boxed{\sigma_{кр} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$ ***- критическое напряжение.***

Формула Эйлера была получена в предположении, что стержень деформируется в пределах действия закона Гука, т.е.: $\sigma_{кр} \le \sigma_{пц}$ ***или:***

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц}$$

Определим отсюда предельную гибкость: $\lambda_{пр} \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$

или: $\boxed{\lambda_{пр} \ge \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}}$ ***- предельная гибкость, при которой применима ф. Эйлера.***

Вывод: ***Формула Эйлера применима для сжатого стержня лишь при условии, что его расчетная гибкость не менее (больше или равна) предельной гибкости*** $\lambda_{расч} \ge \lambda_{пр}$ ***.***

Определим $\lambda_{пр}$ для различных материалов:

сталь: $\lambda_{пр} = 3{,}14\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} \approx 100$

дерево: $\lambda_{пр} \approx 110$ ***чугун:*** $\lambda_{пр} \approx 80$

Предельная гибкость стержня не зависит от формы его сечения, а только от механических прочностных $\sigma_{пц}$ *и деформационных* **E** *свойств материала.*

Если: $\lambda < \lambda_{пр}$, *то критическое напряжение* $\sigma_{кр}$, *определяемое по ф. Эйлера, оказывается выше* $\sigma_{пц}$ *и даже выше* σ_T *и* σ_B, *что противоречит логике.*

Пример: *Расчетная гибкость стального стержня* $\lambda_{расч} = \dfrac{\mu l}{i_{\min}} = 50,$

т.е. $\lambda_{расч} \le \lambda_{пр}$, *но критическое напряжение*

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{50^2} = 788{,}8 МПа$$, *т.е.* $\sigma_{кр} > \sigma_{пц}$.

Значит формула Эйлера в этом случае не применима.

Если: $\lambda_{расч} < \lambda_{пр}$, *критическое напряжение определяют по* *<u>формуле Ясинского</u>*: $\boxed{\sigma_{кр} = a - b\lambda}$

где: a, b *- коэффициенты, зависящие от свойств материала и определяемые экспериментально.*

Ф.С.Ясинский в 1892-1894гг. исследовал вопросы устойчивости сжатый стержней и получил эту формулу (Россия).

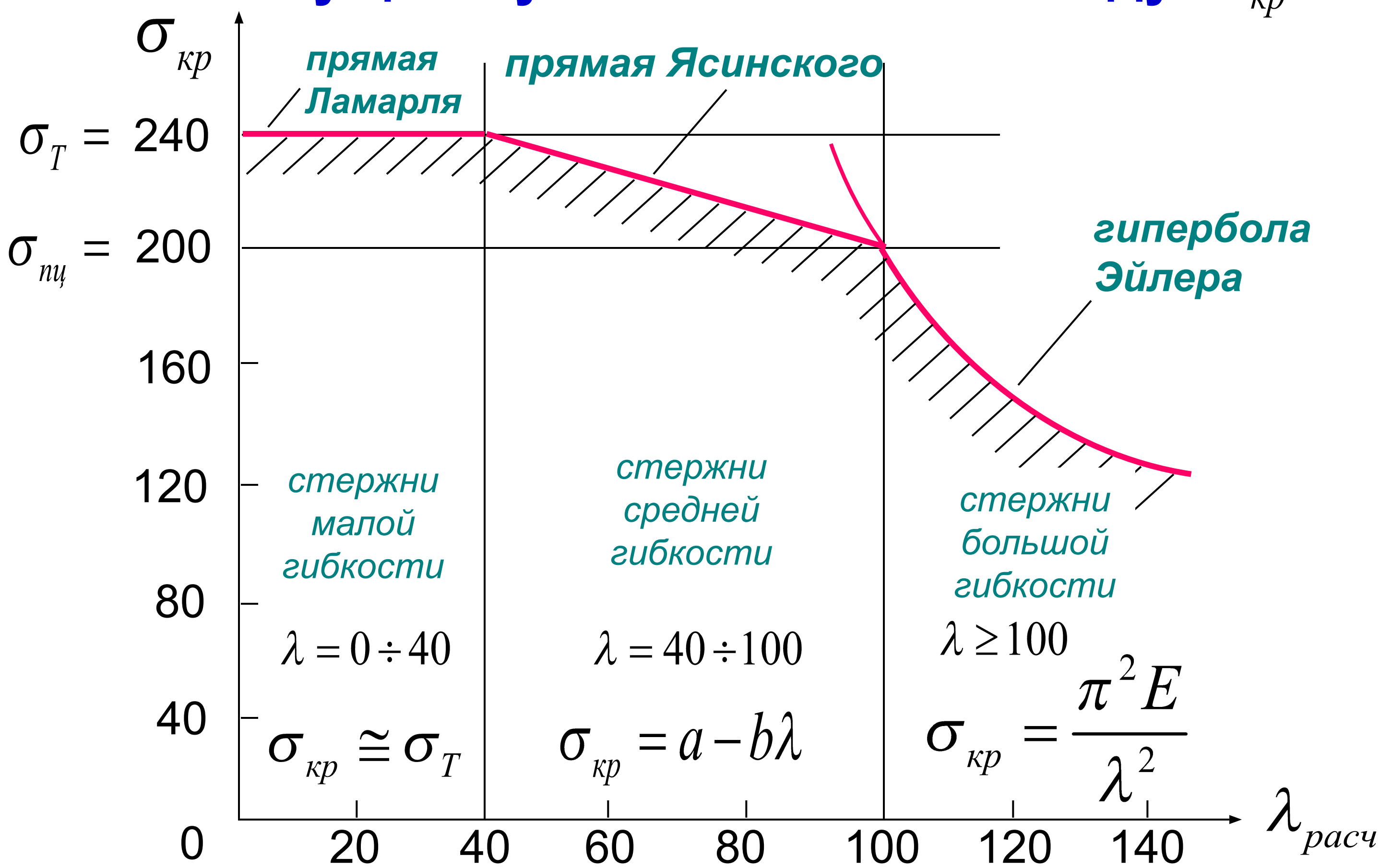
Пример: **Сталь Ст3:** $a = 310\,МПа, \quad b = 1{,}14\,МПа$.

Формула Ясинского применима для стержней из малоуглеродистых сталей , у которых $\lambda_{расч} = 40 \div 100.$

При $\lambda_{расч} = 0 \div 40$ ***напряжение*** $\sigma_{кр} \cong \sigma_T = const.$

Установлено Е. Ламарлем в 1845г. (Бельгия).

Существует зависимость между $\sigma_{кр}$ **и** $\lambda_{пр}$.



Стержни малой гибкости рассчитывают на прочность.

Стержни большой и средней гибкости рассчитывают на прочность и устойчивость.

Расчет сжатых стержней на устойчивость.

Для продольно сжатых стержней кроме условия прочности должно выполняться условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} \le \left[\sigma_y\right]$$

где: $\left[\sigma_y\right]$ - допускаемое напряжение при расчете на устойчивость.

$$\left[\sigma_y\right] = \frac{\sigma_{кр}}{\left[n_y\right]}$$

$\left[n_y\right]$ - коэффициент запаса устойчивости.

$\left[n_y\right]$ **различен для различных материалов, зависит от гибкости стержня.**

$$\left[n_y\right] \geq n_T \,(или \quad n_B)$$

$$\left[\sigma_y\right] = \varphi\left[\sigma\right]$$

где: φ **- коэффициент продольного изгиба (коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения).**

φ **- справочная величина, зависящая от материала стержня и его гибкости.**

Условие устойчивости:

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi\left[\sigma\right]}$$

и

Условие прочности:

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{F} \leq \left[\sigma\right]}$$

Для стали Ст3:

$\lambda = 120$	$\varphi = 0,45$
$\lambda = 100$	$\varphi = 0,6$
$\lambda = 80$	$\varphi = 0,75$
$\lambda = 60$	$\varphi = 0,86$
$\lambda \to 0$	$\varphi \to 1$