АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЛЕКЦИЯ 3:

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА 2-ГО РОДА

1. Случай консервативных сил. Функция Лагранжа

Уравнения Лагранжа $$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad j=1,2,\dots\ ,s}$$

$$T=T\left(\dot{q},q,t\right)$$
$$Q_j=Q_j\left(\dot{q},q,t\right)$$

Консервативность сил $$Q_j=-\frac{\partial \Pi(q,t)}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \qquad j=1,2,\dots\ ,s$$

Функция Лагранжа $$L=T-\Pi$$

Уравнения Лагранжа для консервативных сил

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad j=1,2,\dots\ ,s}$$

Инвариантность уравнений Лагранжа $$L\to L+f(t) \qquad L\to cL$$

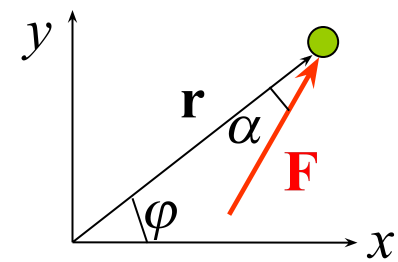
2. Лагранжев формализм

Лагранжев формализм = последовательность действий, позволяющая, действуя стандартным образом, выписать уравнения движения

1. Определить число степеней свободы и ввести обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$
2. Вычислить кинетическую энергию T, определив ее через обобщенные координаты q и обобщенные скорости $\dot{q}$
3. Определить потенциальную энергию Π через обобщенные координаты, если система потенциальна
4. Найти обобщенные силы системы
5. Выполнить указанные в уравнениях Лагранжа действия

3. Пример 1

Составить уравнения плоского движения материальной точки в полярных координатах



1) Обобщенные координаты $q_1 = r, q_2 = \varphi$

2) Обобщенные силы

$$\delta q_1 = \delta r, \delta q_2 = 0 \qquad \delta A_r = F\cos\alpha\,\delta r \qquad Q_1 = \delta A_r / \delta r = F\cos\alpha = F_r$$

$$\delta q_1 = 0, \delta q_2 = \delta\varphi \qquad \delta A_\varphi = F\sin\alpha\; r\delta\varphi \qquad Q_2 = \delta A_\varphi / \delta\varphi = Fr\sin\alpha = M_O(\mathbf{F})$$

3) Кинетическая энергия $T = {}^m\!/_2\left(v_x^2 + v_y^2\right) = {}^m\!/_2\left(v_r^2 + v_\varphi^2\right)$

Способ 1 $\quad v_r = \dot{r} = \dot{q}_1, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = q_1\dot{q}_2 \qquad T = {}^m\!/_2\left(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2\right)$

Способ 2

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(r\cos\varphi\right) = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}\left(r\sin\varphi\right) = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

4. Пример 1

4) Дифференцирование $T = {}^{m}\!/_{2}\left(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2\right)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = mq_1\dot{q}_2^2, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = mq_1^2\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m\ddot{q}_1, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = mq_1^2\ddot{q}_2 + 2mq_1\dot{q}_1\dot{q}_2$$

5) Окончательный результат

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - mq_1\dot{q}_2^2 = F_r \\ mq_1^2\ddot{q}_2 + 2mq_1\dot{q}_1\dot{q}_2 = M_O(\mathbf{F}) \end{cases}$$

Случай движения в поле тяготения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\Pi = -\frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{q_1} \qquad L = T - \Pi = {}^{m}\!/_{2}\left(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2\right) + \frac{\alpha}{q_1}$$

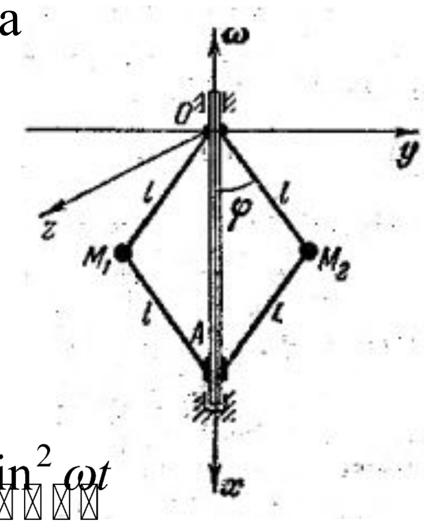
$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - mq_1\dot{q}_2^2 = {}^{\alpha}\!/_{q_1^2} \\ mq_1^2\ddot{q}_2 + 2mq_1\dot{q}_1\dot{q}_2 = 0 \end{cases}$$

5. Пример 2

Составить уравнение движения центробежного регулятора

m -массы точечных грузов 1 и 2 M -масса муфты А

1 степень свободы Обобщенная координата φ



$$x_1 = l\cos\varphi \qquad x_2 = l\cos\varphi \qquad x_A = 2l\cos\varphi$$

$$y_1 = l\sin\varphi\cos\omega t \qquad y_2 = -l\sin\varphi\cos\omega t \qquad y_2 = 0$$

$$z_1 = l\sin\varphi\sin\omega t \qquad z_2 = -l\sin\varphi\sin\omega t \qquad z_2 = 0$$

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\cos^2\omega t + l^2\omega^2\sin^2\varphi\sin^2\omega t$$

$$+ l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\sin^2\omega t + l^2\omega^2\sin^2\varphi\cos^2\omega t = l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\omega^2\sin^2\varphi$$

$$v_2^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\omega^2\sin^2\varphi \qquad v_3^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$$

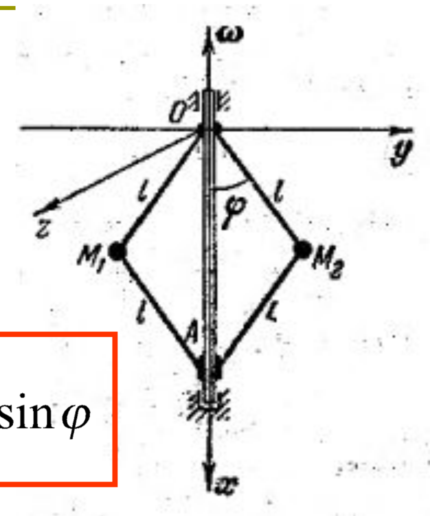
$$T = l^2\left(m + 2M\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + ml^2\omega^2\sin^2\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = 2l^2\left(m + 2M\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 4Ml^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + 2ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$$

6. Пример 2

$$\delta A = mg\delta x_1 + mg\delta x_2 + mg\delta x_A = \left(-2mgl\sin\varphi - 2Mgl\sin\varphi\right)\delta\varphi$$

$$Q = -2gl\left(m+M\right)\sin\varphi$$



$$\boxed{\left(m+2M\sin^2\varphi\right)\ddot{\varphi} + 2M\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - m\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{g}{l}\left(m+M\right)\sin\varphi}$$

Равновесие

$$\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{g}{lm\omega^2}\left(m+M\right) \qquad \omega^2 > \frac{g}{lm}\left(m+M\right)$$

7. Выражение для кинетической энергии

Задача: выразить кинетическую энергию через обобщенные координаты и обобщенные скорости

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left|\dot{\mathbf{r}}_i\right|^2$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{p=1}^{s} A_{mp}\dot{q}_m\dot{q}_p + \sum_{m=1}^{s} B_m\dot{q}_m + T_0$$

$$A_{mp} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_p}\right), \quad B_m = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_m}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right), \quad T_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

$$\boxed{T = T_2 + T_1 + T_0}$$

T_2 Однородный многочлен 2-й степени от обобщенных скоростей

T_1 Однородный многочлен 1-й степени от обобщенных скоростей

T_0 Не зависит от обобщенных скоростей

Стационарные связи $\quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T_2$

8. Структура ур-й Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j(q,\dot q,t) \qquad T=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\sum_{p=1}^{s}A_{mp}\dot q_m\dot q_p+\sum_{m=1}^{s}B_m\dot q_m+T_0$$

$(*)$ - функция, зависящая от $q,\dot q,t$

$$Q_j=(*),\quad \frac{\partial T}{\partial q_j}=(*),\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{m=1}^{s}A_{jm}\dot q_m+B_j\right)=\sum_{m=1}^{s}A_{jm}\ddot q_m+(*)$$

$$\boxed{\sum_{m=1}^{s}A_{jm}\ddot q_m=(*),\quad j=1,2,\dots,s}$$

Основная теорема лагранжева формализма : Определитель, составленный из коэффициентов $A_{mp}(q,t)$ отличен от нуля при любых q,t

- Уравнения Лагранжа можно разрешить относительно вторых производных, сведя их к форме Коши $\ddot q_j=G_j(q,\dot q,t)$
- При заданных начальных данных существует единственное решение систем ДУ типа Коши

Ур-я Лагранжа удовлетворяют требованиям детерминированности движения

9. Док-во основной теоремы лагранжева формализма

Обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots\ q_s$ независимы

Среди *3n* функций $x_1(q,t), y_1(q,t), z_1(q,t), \ldots\ x_n(q,t), y_n(q,t), z_n(q,t)$ ровно *s* независимых

Ранг матрицы Якоби *J* ровен *s* $\Rightarrow$ Ранг матрицы *I* ровен *s*

$$J = \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial q_1 & \ldots & \partial x_1/\partial q_s \\ \partial y_1/\partial q_1 & \ldots & \partial y_1/\partial q_s \\ \partial z_1/\partial q_1 & \ldots & \partial z_1/\partial q_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial x_n/\partial q_1 & \cdots & \partial x_n/\partial q_s \\ \partial y_n/\partial q_1 & \cdots & \partial y_n/\partial q_s \\ \partial z_n/\partial q_1 & \cdots & \partial z_n/\partial q_s \end{pmatrix}
\qquad
I = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1}\,\partial x_1/\partial q_1 & \ldots & \sqrt{m_1}\,\partial x_1/\partial q_s \\ \sqrt{m_1}\,\partial y_1/\partial q_1 & \ldots & \sqrt{m_1}\,\partial y_1/\partial q_s \\ \sqrt{m_1}\,\partial z_1/\partial q_1 & \ldots & \sqrt{m_1}\,\partial z_1/\partial q_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{m_n}\,\partial x_n/\partial q_1 & \cdots & \sqrt{m_n}\,\partial x_n/\partial q_s \\ \sqrt{m_n}\,\partial y_n/\partial q_1 & \cdots & \sqrt{m_n}\,\partial y_n/\partial q_s \\ \sqrt{m_n}\,\partial z_n/\partial q_1 & \cdots & \sqrt{m_n}\,\partial z_n/\partial q_s \end{pmatrix}$$

Векторы $\mathbf{u}_1, \ldots\ \mathbf{u}_s$ линейно независимы $\qquad \mathbf{u}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_s$

10. Док-во основной теоремы лагранжева формализма

Составленный из $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots\ \mathbf{u}_s$ определитель Грама отличен от нуля

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n\cdot\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n\cdot\mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n\cdot\mathbf{u}_n \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

$$\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_k = A_{jk}$$

$$\det A \neq 0$$

11. Теорема об изменении кинетической энергии

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j+\frac{\partial T}{\partial t}=\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\dot{q}_j+\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j+\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T=T_2+T_1+T_0 \qquad \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=2T_2+T_1$$

Формула Эйлера для однородных функий

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=2\frac{dT}{dt}-\frac{d\left(T_1+2T_0\right)}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt}=-\sum_{j=1}^{s}Q_j\dot{q}_j+2\frac{dT}{dt}-\frac{d\left(T_1+2T_0\right)}{dt}+\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt}=\sum_{j=1}^{s}Q_j\dot{q}_j+\cancel{\frac{d\left(T_1+2T_0\right)}{dt}}-\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}}$$

Стационарные связи

Консервативная система $\quad Q_j=-\dfrac{\partial \Pi(q)}{\partial q_j} \qquad \dfrac{d\Pi}{dt}=\sum_{j=1}^{s}\dfrac{d\Pi}{dq_j}\dot{q}_j=-\sum_{j=1}^{s}Q_j\dot{q}_j$

$$\boxed{T+\Pi=h}$$

12. Интеграл Якоби

Интеграл Якоби = обобщенный интеграл энергии

Консервативная система $\quad Q_j = -\dfrac{\partial \Pi(q,t)}{\partial q_j}$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{s} Q_j \dot{q}_j + \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{s} Q_j \dot{q}_j + \frac{d\left(T_1 + 2T_0\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{d\Pi}{dt} + \frac{d\left(T_1 + 2T_0\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

Если кинетическая и потенциальная энергия не зависят явно от времени, то имеет место интеграл Якоби

$$T + \Pi - 2T_0 - T_1 = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T_2 + \Pi - T_0 = \text{const}}$$

Интеграл Якоби

Если, кроме того, все связи стационарны, то $\boxed{T + \Pi = h}$

13. Гироскопические и диссипативные силы

Т-ма об изменении кинетической энергии, стационарные связи

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{j=1}^{s} Q_j \dot{q}_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{s} Q_j^{\Pi} \dot{q}_j}_{\text{Потенциальные}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{s} Q_j^{*} \dot{q}_j}_{\text{Непотенциальные}}$$

$$\frac{d\left(T+\Pi\right)}{dt} = \sum_{j=1}^{s} Q_j^{*} \dot{q}_j$$

Обобщенно-гироскопические силы – те, для которых $\boxed{\sum_{j=1}^{s} Q_j^{*} \dot{q}_j = 0}$

Для таких сил имеет место закон сохранения энергии

Гироскопические силы – те, для которых $Q_i^{*} = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij}(q,t)\dot{q}_j, \quad \gamma_{ij} = -\gamma_{ji}, \gamma_{ii} = 0$

$$\sum_{j=1}^{s} Q_j^{*} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{s} \gamma_{ji} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{jj} \dot{q}_j^2 + \sum_{j=1}^{s-1}\sum_{i=j+1}^{s} \left(\gamma_{ij} + \gamma_{ij}\right)\dot{q}_i \dot{q}_j = 0$$

Обобщенно-диссипативные силы – те, для которых $\boxed{\sum_{j=1}^{s} Q_j^{*} \dot{q}_j < 0} \Rightarrow \left(T+\Pi\right)\downarrow$

Для таких сил механическая энергия рассеивается

Диссипативные силы – те, для которых

$$Q_i^{*} = \sum_{j=1}^{s} -\gamma_{ij}(q,t)\dot{q}_j, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

Матрица $\left(\gamma_{ij}\right)$ положительно определена

14. Обобщенный потенциал

Обобщенные силы называются **обобщенно потенциальными** в том случае, когда существует функция $V(\dot{q},q,t)$ (**обобщенный потенциал**), такая, что

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad L = T - V$$

1) Если V не зависит от обобщенных скоростей, то обобщенный потенциал обращается в обычный

2) В общем случае V может зависеть от обобщенных скоростей только линейно

$$Q_j(\dot{q},q,t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + (*) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = 0$$

$$V = \Pi(q,t) + \sum_{j=1}^{s}\Pi_j(q,t)\dot{q}_j$$

15. Обобщенный потенциал

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{d\Pi_j}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_{k=1}^{s}\Pi_k \dot q_k + \Pi\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \Pi_j}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial \Pi_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \Pi_k}{\partial q_j}\dot q_k - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} =$$

$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_j}\right)\dot q_k + \frac{\partial \Pi_j}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{s}\gamma_{jk}\dot q_k + \frac{\partial \Pi_j}{\partial t}, \qquad \gamma_{jk} = -\gamma_{kj}$$

Если обобщенный потенциал Π не зависит явно от времени , то обобщенные силы складываются из потенциальных и гироскопических.

При этом

$$E = T + \Pi = \text{const} \qquad\qquad T + V \neq \text{const} \quad (!)$$

Теорема : Сумма переносных и кориолисовых сил инерции всегда имеет обобщенный потенциал

16. Уравнения Лагранжа в подвижной системе координат

Рассуждения 1-го неинерционного наблюдателя.

1) Составляю полную кинетическую энергию в абсолютном движении

2) Выражаю ее через «свои» относительные координаты и скорости, рассматривая переносные скорости «своей» системы как заданные функции времени

3) Пользуюсь уравнениями Лагранжа в их обычной записи.

Не надо вводить сил инерции! Лагранжев формализм все сделает сам!

Рассуждения 2-го неинерционного наблюдателя.

1)Добавляю к приложенным силам переносную и кориолисову силы инерции После добавления сил в «моей» системе отсчета верен второй закон Ньютона, а, значит и уравнения Лагранжа.

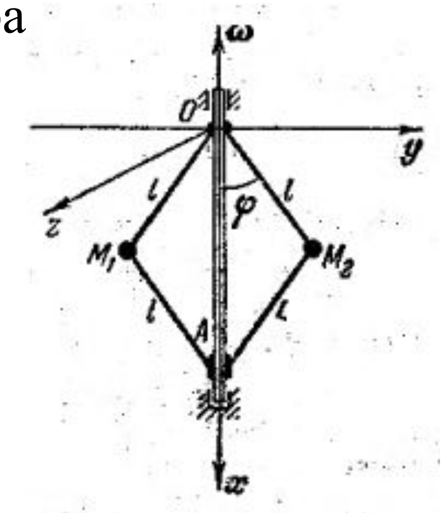
2) Выписываю уравнения Лагранжа в своей системе отсчета, подсчитывая кинетическую энергию через свои (относительные!) скорости. При подсчете обобщенных сил принимаю во внимание работу сил инерции на виртуальных перемещениях в относительном движении

Оба пути приводят к одному и тому же результату

17. Пример 2: сравнение подходов

Составить уравнение движения центробежного регулятора

m -массы точечных грузов 1 и 2 $\quad M$ -масса муфты А



Кинетическая энергия

Путь 1 $\quad T = l^2\left(m + 2M\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + ml^2\omega^2\sin^2\varphi$

Путь 2 $\quad T = l^2\left(m + 2M\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2$

Обобщенная сила

Путь 1 $\quad Q = -2gl\left(m + M\right)\sin\varphi$ $\quad$ гравитация

Путь 2 $\quad Q = -2gl\left(m + M\right)\sin\varphi + 2ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$ $\quad$ гравитация+центробежная

$x_1 = l\cos\varphi \qquad x_2 = l\cos\varphi \qquad x_A = 2l\cos\varphi$

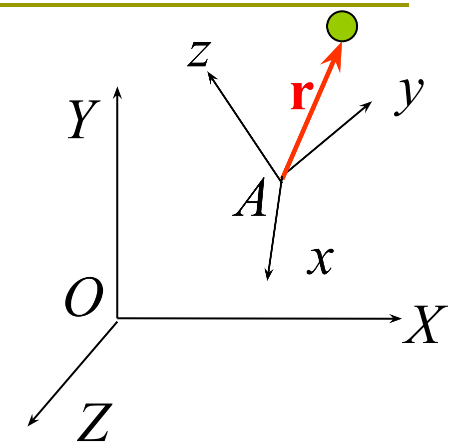
$y_1 = l\sin\varphi \qquad y_2 = -l\sin\varphi \qquad y_A = 0$

$\delta A^{\text{цб}} = 2F^{\text{цб}}\delta y_2 = 2\left(m\omega^2 l\sin\varphi\right)\cdot\left(l\cos\varphi\delta\varphi\right)$

$$\boxed{\left(m + 2M\sin^2\varphi\right)\ddot{\varphi} + 2M\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi - m\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{g}{l}\left(m + M\right)\sin\varphi}$$

18. Док-во теоремы

Для простоты записей – одна материальная точка



Путь 1

$$T = \frac{m}{2}\mathbf{v}_{абс}\cdot\mathbf{v}_{абс} = \frac{m}{2}\left(\mathbf{v}_{пер}+\mathbf{v}_{отн}\right)\cdot\left(\mathbf{v}_{пер}+\mathbf{v}_{отн}\right) = T_{отн} + V$$

$$T_{отн} = \frac{m}{2}\mathbf{v}_{отн}\cdot\mathbf{v}_{отн}, \quad V = \frac{m}{2}\mathbf{v}_{пер}\cdot\mathbf{v}_{пер} + m\mathbf{v}_{пер}\cdot\mathbf{v}_{отн}$$

$$\mathbf{v}_{пер} = \dot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}_{отн} = (\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \quad \mathbf{r} = (x,y,z)$$

$$T_{отн}(\dot{q},q,t), \quad V(\dot{q},q,t) \qquad q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad L = T_{отн} - V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{отн}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_{отн}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Путь 2 $T_{отн}$

$$Q_{пер} = -m\mathbf{w}_{пер}$$

$$Q_{кор} = -2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{отн}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{отн}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_{отн}}{\partial q_j} = Q_{пер} + Q_{кор}$$

$$\boxed{Q_{пер} + Q_{кор} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}}$$