

КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни «Числові методи та моделювання на ЕОМ»
на тему: Розв'язання системи лінійних рівнянь великої
розмірності. Метод Гаусса-Зейделя

Студента 3 курсу В групи
Кірман С. Ю.

Керівник доцент кафедри
автоматизації та комп'ютерно
-інтегрованих технологій,
Гладка Л.І.

ЗМІСТ

ВСТУП

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Основні поняття

1.2. Класифікація методів розв'язання СЛАР на ЕОМ

РОЗДІЛ 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР МЕТОДОМ ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ

2.1. Алгоритм Гаусса-Зейделя

2.2. Умови збіжності ітераційного процесу

2.3. Умови збіжності ітераційного процесу Гаусса-Зейделя

РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР

3.1. Реалізація алгоритму розв'язку СЛАР методом Гаусса-Зейделя в середовищі QT5

3.2. Реалізація алгоритму розв'язку СЛАР методом Гаусса-Зейделя в EXCEL

- **Актуальність курсової роботи** полягає в тому, що рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь – одна з основних завдань обчислювальної лінійної алгебри. Аналітичні методи розв'язання математичних задач, як і раніше, дуже важливі. Чисельні методи суттєво розширюють можливості розв'язання наукових та інженерних задач, адже з ЕОМ ми зменшуємо час та збільшуємо точністю обрахунків.

- **Об'єктом дослідження курсової роботи є**
 - **системи лінійних рівнянь великої розмірності та класифікація методів їх розв'язання.**
- **Предмет дослідження – метод Гаусса-Зейделя для вирішення систем лінійних рівнянь великої розмірності точним методом.**
- **Мета дослідження** полягає в теоретичному вивченні методів розв'язання СЛАР та практичному використанні набутих знань за допомогою мови програмування C++ в середовищі QT 5.

Завдання:

- Розглянути методи розв'язання СЛАР.
- Розробити алгоритм розв'язання СЛАР методом Гаусса-Зейделя.
- Розробити програмний продукт для розв'язання СЛАР методом Гаусса-Зейделя.

Класифікація методів розв'язання СЛАР

- *Точні методи*
- До точних методів належать методи, що дають точний результат у припущенні ідеальної арифметики. Точні методи можна застосовувати й тоді, коли коефіцієнти й вільні члени рівняння задані в аналітичній, символній формі.
- *Ітераційні методи*
- Ітераційні методи встановлюють процедуру уточнення певного початкового наближення до розв'язку. При виконанні умов збіжності вони дозволяють досягти будь-якої точності просто повторенням ітерацій. Перевага цих методів у тому, що часто вони дозволяють досягти розв'язку з наперед заданою точністю швидше, а також розв'язувати більші системи рівнянь.

Класифікація методів розв'язання СЛАР



РИС. 1.1 Чисельні методи розв'язання СЛАР

Алгоритм Гаусса-Зейделя

Проілюструємо метод Гаусса-Зейделя на прикладі рішення системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (2.2)$$

Виразимо невідомі x_1, x_2, x_3 з першого, другого, і третього рівняння відповідно:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \quad (2.3)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \quad (2.4)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \quad (2.5)$$

Задаємо деякі початкові значення для невідомих $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0$ підставляємо в праву частину рівнянь (2.3) і отримуємо нові наближені значення для x_1 :

Алгоритм Гаусса-Зейделя

$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0)$$

Використовуючи значення x_1^1 та x_3^0 підставляємо його у формулу (2.4) знаходимо x_2^1 :

$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0)$$

Далі використовуємо значення x_1^1, x_2^1 для знаходження x_3^1 :

$$x_3^1 = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1)$$

На цьому завершується перша ітерація. Використовуючи значення x_1^1, x_2^1, x_3^1 можна таким же методом провести другу ітерацію і знайти наступні наближені значення x_1^2, x_2^2, x_3^2 і так далі.

Алгоритм Гаусса-Зейделя

Загальна формула виглядає так:

$$x_1^k = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)})$$

$$x_2^k = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^{(k-1)})$$

$$x_3^k = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k)$$

Ітерацій процес буде продовжуватиметься до тих доки не буде досягнута потрібна точність

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq e$$

Умови збіжності ітераційного процесу

Ітераційний процес розв'язання системи збігається, якщо елементи головної діагоналі більше суми модулів елементів відповідної стрічки крім діагонального елементу цієї стрічки, тобто виконується умова: або умова

$$|\alpha_{ii}| > \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \text{ або умова}$$

$$|\alpha_{jj}| > \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|$$

Реалізація алгоритму розв'язку СЛАР методом Гаусса-Зейделя в середовищі QT 5

The screenshot shows a Qt5 application window titled "MainWindow". On the left, there are input fields for "n =" and "e =", and three buttons: "Задати вручну", "Обрахувати смстему", and "Задати константні значення". Below these is a label "Кількість ітераці у = 5". The main area is divided into three sections: "Вигляд системи" (System View), "Вільні члени" (Free Members), and "Результат" (Result). The "Вигляд системи" section contains a table with 3 rows and 3 columns. The "Вільні члени" section contains a table with 3 rows and 1 column. The "Результат" section contains a table with 3 rows and 1 column. Below the tables, a status bar indicates "Ітераційни процес для даної системи збігається".

Вигляд системи			Вільні члени	Результат		
	1	2	3	1		
1	4	-1	1	4	1	0.999858
2	1	6	2	9	2	1.00002
3	-1	-2	5	2	3	0.999978

Ітераційни процес для даної системи збігається

Рис.3.1.Результат роботи програми при заданій константних значень

Реалізація алгоритму розв'язку СЛАР методом Гаусса-Зейделя в EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		4	-1	1	4			
2		1	6	2	9			
3		-1	-2	5	2			
4								
5								
6	I	X1	X2	X3	Точність			
7	0	4,0000	9,0000	2,0000				
8	1	2,7500	0,3750	1,1000	8,6250			
9	2	0,8188	0,9969	0,9625	1,9313			
10	3	1,0086	1,0111	1,0061	0,1898			
11	4	1,0012	0,9977	0,9993	0,0133			
12	5	0.999859	1,0000	1,0000	0,0001			
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								

Рис.3.2. Результат роботи в EXCEL

ВИСНОВКИ

Вході курсової роботи реалізовано наявні знання з курсу лінійної алгебри за рішенням СЛАР в програмній інтерпретації на мові програмування C++ в середовищі QT. Алгоритм програми було перевірено в середовищі Microsoft Excel.

По завершенні роботи були досягнуті необхідні цілі і виконані поставлені **завдання**.

- Було проведено аналіз методів розв'язання систем лінійних рівнянь і сучасних засобів вирішення з виявленням їх характерних особливостей;
- Описаний математичний метод, необхідний для вирішення поставленого завдання, визначені вхідні та вихідні дані, розроблено алгоритм реалізації програми;
- Описана розробка програми (системні вимоги) і діалог з користувачем, наведено контрольний приклад.



Дякую за увагу!