Лекція 2.4.

Метод вузлових напруг

- **Формування матриці провідностей для лінійного електричного кола з двополюсними компонентами**

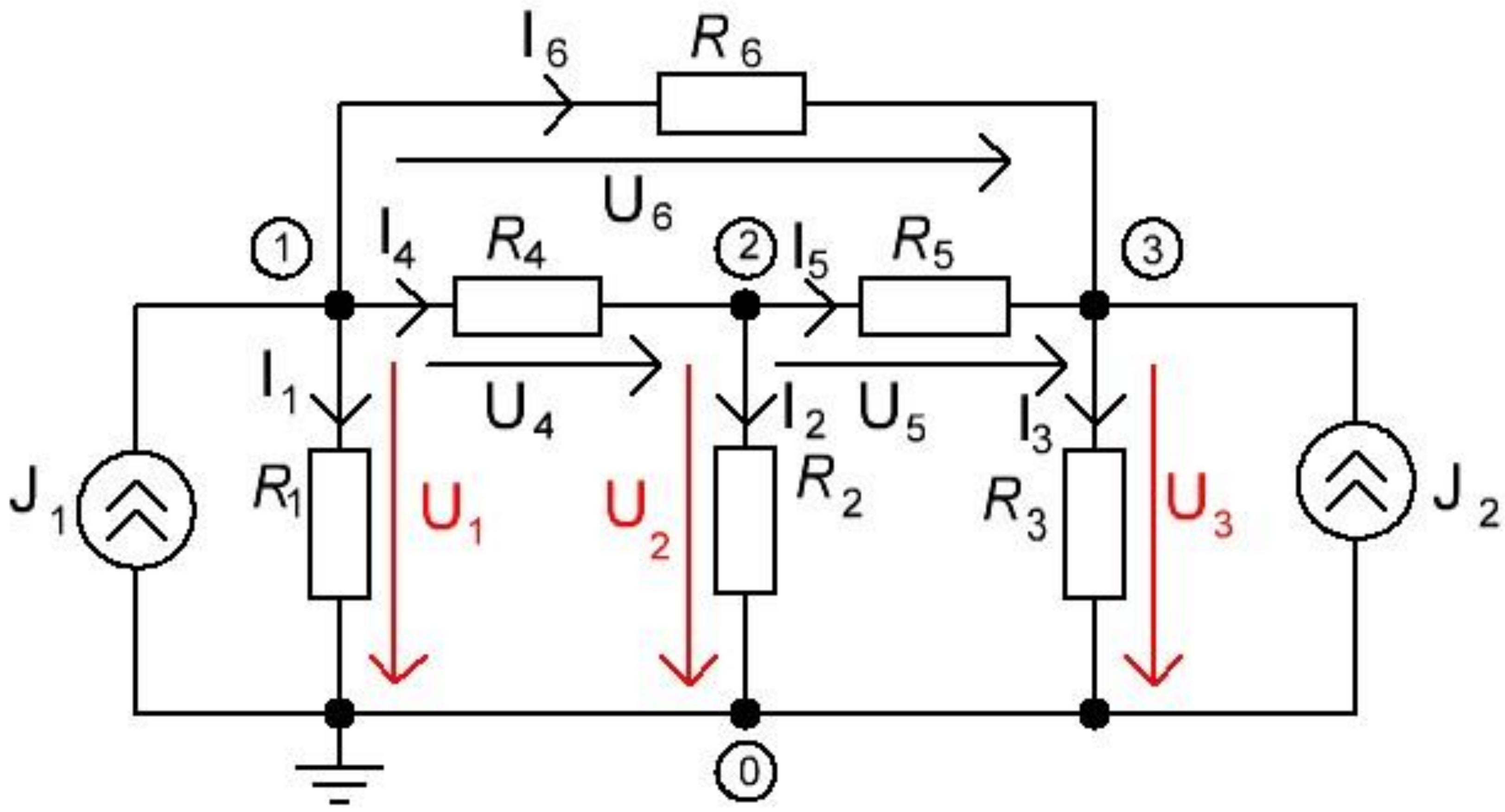
- **Властивості матриці провідностей лінійних багатополюсників**

- **Формування математичної моделі електронного кола з багатополюсними компонентами за узагальненим методом вузлових напруг**

МЕТОД ВУЗЛОВИХ НАПРУГ

- Цей метод в наш час є найпоширенішим методом розрахунку складних електронних кіл, оскільки він використовує математичну модель кола, розмірність якої на одиницю менша від кількості вузлів, зручний при наявності багатополюсних компонентів (транзисторів, операційних підсилювачів, інтегральних мікросхем), легко формалізується при використанні комп’ютерних засобів.
- Ідея методу вузлових напруг полягає у тому, що завжди можна серед загальної кількості напруг гілок вибрати невелику кількість т. зв. базисних (визначальних) напруг, яких достатньо для визначення електричного стану кола, і через які можна визначити напруги решти гілок.

- Згідно з цим методолм роль визначальних величин відіграють **вузлові напруги**, тобто напруги незалежних вузлів, визначені відносно деякого вузла, вибраного як базисний. Знаючи вузлові напруги, можна просто визначити напруги решти гілок та міжвузлові напруги багатополюсників (напруги сторін багатополюсників).
- Для визначення вузлових напруг конкретного кола потрібно сформувати математичну модель кола, розмірність (кількість рівнянь) якої дорівнює $N_{вуз}$-1, тобто на одиницю менша від загальної кількості вузлів даного кола.
- Спочатку розглянемо методику формування математичної моделі за методом вузлових напруг на прикладі кола, яке складається лише із двополюсних компонентів.



I_6
R_6
U_6
1
I_4
R_4
2
I_5
R_5
3
I_1
U_4
I_2
U_5
I_3
J_1
R_1
U_1
U_2
R_2
R_3
U_3
J_2
0

- Визначальними величинами в даній схемі служать вузлові напруги U_1, U_2, U_3, які відраховують від базисного вузла 0. Напруги усіх інших гілок можна достатньо просто визначити через вузлові напруги:

$$U_4 = U_1 - U_2; U_5 = U_3 - U_2; U_6 = U_1 - U_3.$$

- Для визначення невідомих вузлових напруг потрібно скласти три рівняння балансу струмів незалежних вузлів:

для вузла 1: $J_1 - I_1 - I_4 - I_6 = 0;$

для вузла 2: $-I_2 + I_4 + I_5 = 0;$

для вузла 3: $J_2 - I_3 - I_5 + I_6 = 0,$

де J_1 та J_2 - струми зовнішніх джерел струму.

- Виразимо струми гілок через вузлові напруги та опори гілок: $I_1 = U_1 / R_1; I_2 = U_2 / R_2; I_3 = U_3 / R_3;$

$$I_4 = (U_1 - U_2) / R_4; I_5 = (U_3 - U_2) / R_5; I_6 = (U_1 - U_3) / R_6.$$

- Підставивши дані вирази у рівняння балансу струмів та замінивши опори провідностями гілок (1/R = G), отримуємо систему рівнянь для визначення вузлових напруг:

$$(G_1 + G_4 + G_6)U_1 - G_4U_2 - G_6U_3 = J_1;$$
$$-G_4U_1 + (G_2 + G_4 + G_5)U_2 - G_5U_3 = 0;$$
$$-G_6U_1 - G_5U_2 + (G_3 + G_5 + G_6)U_3 = J_2.$$

- Розв'язавши цю систему рівнянь, визначаємо всі невідомі вузлові напруги, а відтак всі інші напруги гілок. Отже, як бачимо, за методом вузлових напруг потрібно розв'язувати систему із трьох рівнянь, в той час як при аналізі тієї самої схеми методом безпосереднього застосування законів Кірхгофа потрібно розв'язувати систему із восьми рівнянь.

Систему рівнянь балансу струмів запишемо в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} G_1+G_4+G_6 & -G_4 & -G_6 \\ -G_4 & G_2+G_4+G_5 & -G_5 \\ -G_6 & -G_5 & G_3+G_5+G_6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ 0 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

або компактніше : $(G)\times(U)=(J)$,

де (G)- матриця операторних вузлових провідностей кола,
(U) – вектор-стовпець операторних вузлових напруг,
(J) – вектор-стовпець операторних струмів незалежних джерел струму.

Для узагальнення викладеного вище на випадок аналізу довільного лінійного електричного кола введемо спочатку деякі нові означення.

- **Власною провідністю** i-го вузла G_{ii} назвемо суму про відностей усіх гілок, під'єднаних до даного вузла.
- **Взаємною провідністю** i-го та j-го вузлів G_{ij} назвемо суму провідностей усіх гілок, увімкнутих безпосередньо між цими вузлами**.**
- **Вузловим струмом** i-го вузла J_i назвемо алгебраїчну суму струмів усіх джерел струму, під'єднаних до даного вузла. Якщо струм джерела струму спрямований до i-го вузла, то його записуємо зі знаком плюс, у протилежному випадку – зі знаком мінус.

- Використовуючи наведені означення, можемо сформулювати **правило формування матриці провідностей** для лінійного електричного кола з двополюсними компонентами:

у головну діагональ матриці вписують власні провідності G_{ii} відповідних вузлів, а в інші клітини, які знаходяться на перетині i-го рядка та j-го стовпця, вписують зі знаком мінус взаємні провідності G_{ij} i-го та j-го вузлів.

- Можна переконатись, що для лінійного кола, яке складається із пасивних двополюсників енергії, матриця вузлових провідностей є квадратною і симетричною відносно головної діагоналі.

- Отже, в загальному випадку математична модель лінійного кола, яке має M незалежних вузлів (M=Nвуз-1), згідно з методом вузлових напруг, набирає вигляду:

$$\begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M1} & \cdots & G_{MM} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ \cdots \\ U_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ \cdots \\ J_M \end{pmatrix},$$

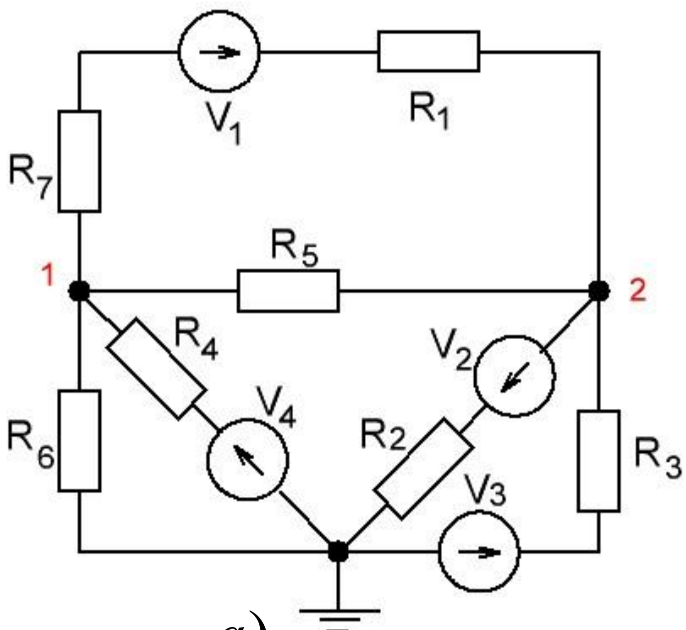
де $(U),(J)-$ відповідно вектор стовпець операторних вузлових напруг кола та вектор стовпець операторних струмів незалежних джерел струму.

- На підставі наведеної математичної моделі ***к***–ту вузлову напругу U_K визначаємо за формулами Крамера:

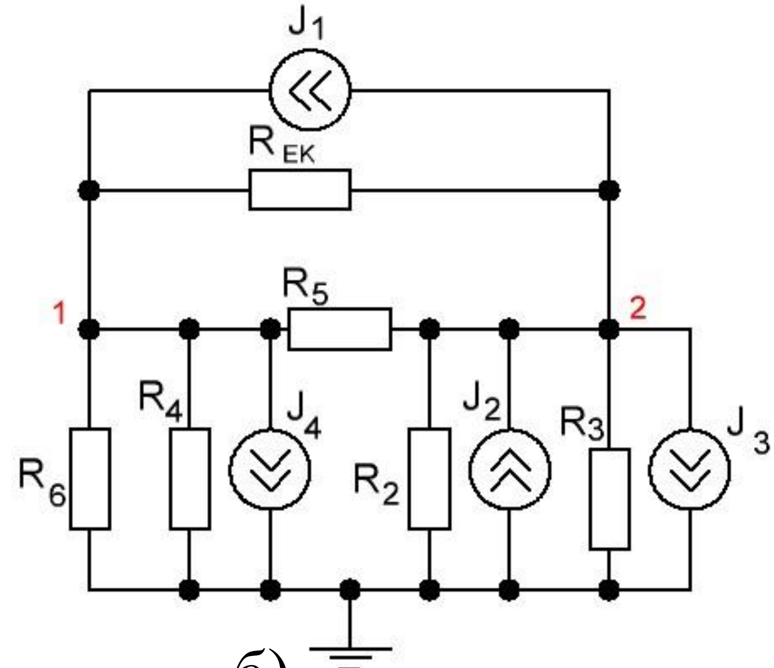
$$U_K = \frac{\Delta_{1K}}{\Delta} J_1 + \frac{\Delta_{2K}}{\Delta} J_2 + \cdots + \frac{\Delta_{MK}}{\Delta} J_M = \sum_{i=1}^{M} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} J_i ,$$

де Δ – визначник матриці провідностей ; Δ_{ik} – алгебраїчне доповненння елемента G_{ik} визначника цієї матриці.

Якщо джерела енергії подані як джерела напруги, то потрібно перетворити їх у джерела струму на підставі теореми Нортона, як показано на рисунку ***б*** для конкретної схеми.



а)



б)

$$J_1 = V_1 / R_{EK} = V_1 / (R_1 + R_7);$$

$$J_2 = V_2 / R_2;$$

$$J_3 = V_3 / R_3;$$

$$J_4 = V_4 / R_4.$$

Математична модель перетвореного кола у матричній формі приймає вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1/R_{EK}+1/R_4+1/R_5+1/R_6 & -1/R_{EK}-1/R_5 \\ -1/R_{EK}-1/R_5 & 1/R_{EK}+1/R_2+1/R_3+1/R_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 - J_4 \\ -J_1 + J_2 - J_3 \end{pmatrix}$$

Параметри елементів схеми відомі:

$$V_1 = 30B; V_2 = 10B; V_3 = 200B; V_4 = 56B;$$

$$R_1 = 20\ Ом;\ R_2 = 30\ Ом;\ R_3 = 6\ Ом;\ R_4 = 8\ Ом;$$

$$R_5 = 15\ Ом;\ R_6 = 40\ Ом;\ R_7 = 10\ Ом.$$

Підставивши значення параметрів у рівняння математичної моделі, отримуємо:

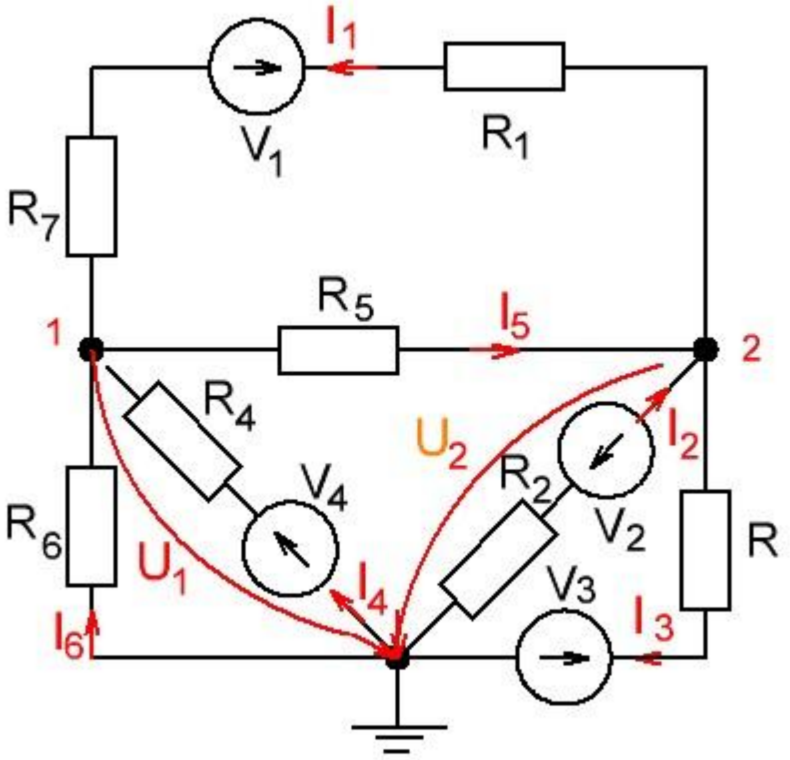
$$\begin{pmatrix} 0,25 & -0,1 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -34 \end{pmatrix}$$

Розв’язавши цю систему рівнянь, знаходимо значення вузлових напруг: $U_1 = -80B; U_2 = -140B.$

Позначимо умовні додатні напрями струмів гілок як показано на рисунку. Використовуючи другий закон Кірхгофа, можемо визначити значення струмів:

$$I_1 = (V_1 + U_2 - U_1)/(R_1 + R_7) == (30 - 140 + 80)/(20 + 10) = -1A;$$

$$I_2 = (V_2 - U_2)/R_2 = (10 + 140)/30 = 5A;$$



$$I_3 = (V_3 + U_2)/R_3 = (200 - 140)/6 = 10A;$$

$$I_4 = -(V_4 + U_1)/R_4 = -(56 - 80)/8 = 3A;$$

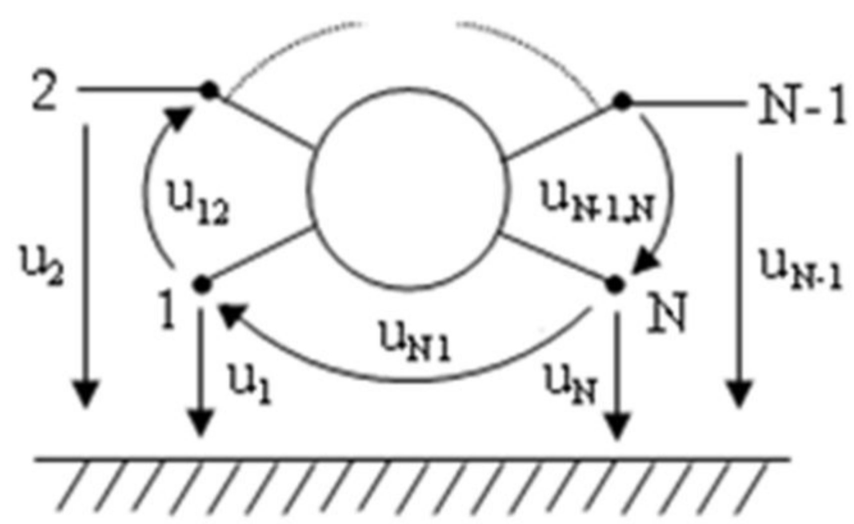
$$I_5 = (U_1 - U_2)/R_5 = (-80 + 140)/15 = 4A;$$

$$I_6 = -U_1/R_6 = 80/40 = 2A.$$

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРОННОГО КОЛА З БАГАТОПОЛЮСНИМИ КОМПОНЕНТАМИ ЗА УЗАГАЛЬНЕНИМ МЕТОДОМ ВУЗЛОВИХ НАПРУГ.

- **ВЛАСТИВОСТІ МАТРИЦІ ПРОВІДНОСТЕЙЛІНІЙНИХ БАГАТОПОЛЮСНИКІВ.**

Раніше було зазначено, що найпоширенішою формою подання багатополюсника в загальному випадку є система рівнянь , яка описує струми його зовнішніх виводів як функції напруг зовнішніх виводів, відрахованих відносно зовнішнього базисного вузла.



.

Для лінійного N-полюсника ця система набирає вигляду:

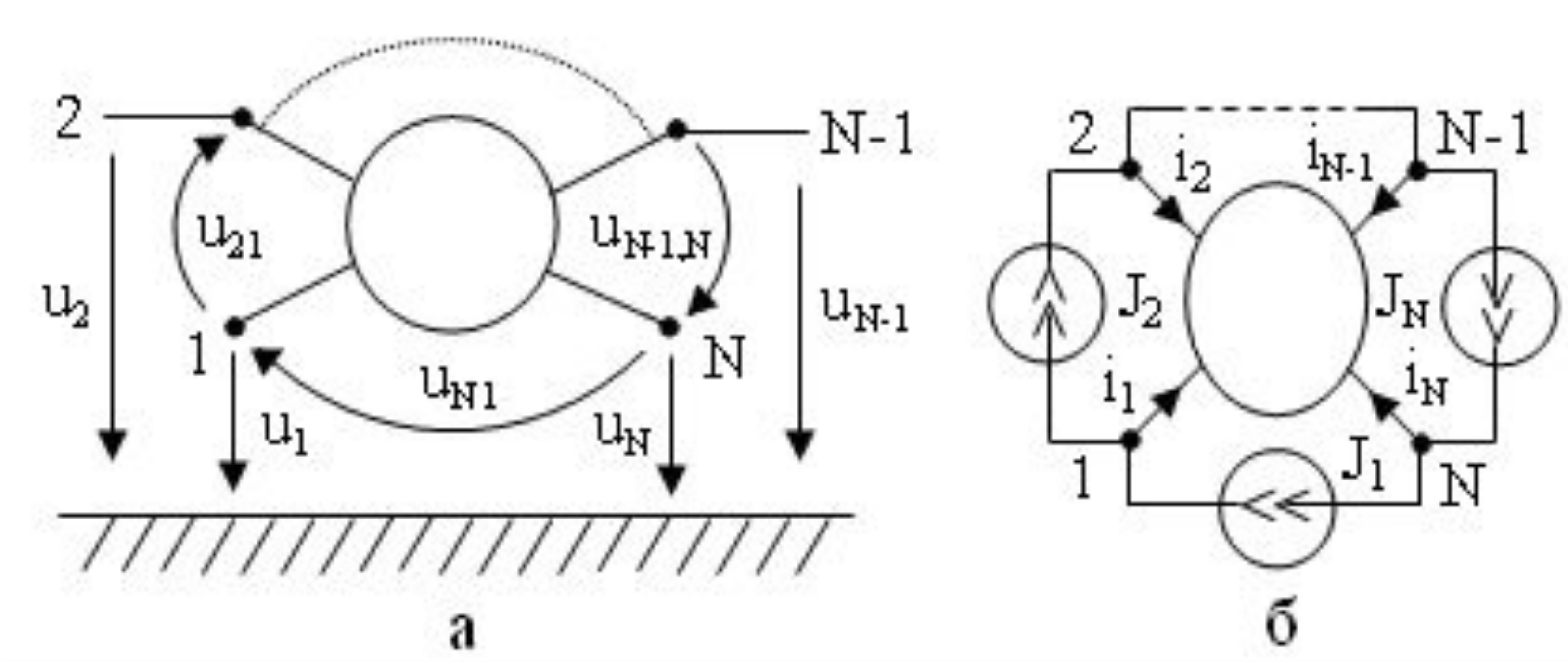
$$\left.\begin{aligned} i_1 &= g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + \ldots + g_{1N}.u_N \\ i_2 &= g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + \ldots + g_{1N}.u_N \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_N &= g_{N1}u_1 + g_{N2}u_2 + \ldots + g_{NN}.u_N \end{aligned}\right\}$$

або в матричній формі:

$$\begin{Vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \ldots \\ i_N \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11}, g_{12}, \cdots g_{1N} \\ g_{21}, g_{22}, \cdots g_{2N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{N1}, g_{N2}, \cdots g_{NN} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_N \end{Vmatrix}$$

- Зауважимо, що напруги зовнішніх виводів багатополюсника відносно базисного вузла $u_1, u_2, \ldots u_N$ є взаємно незалежні і їх можна задавати довільно.
- Матрицю провідностей N-полюсника, яка містить N^2 елементів, називають **повною** (невизначеною, плаваючою) матрицею.

- Аналіз показує, що не всі зовнішні струми багатополюсника та не всі напруги між його зовнішніми виводами є взаємно незалежними. Для з'ясування цього питання розглянемо дві схеми, зображені на рисунку:



- Звертаючись до схеми рис. ***а***, можна на підставі другого закону Кірхгофа визначити напруги між зовнішніми виводами багатополюсника, які утворюють **контур багатополюсника:**

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}_{12} &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_{23} &= \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{u}_{(N-1),N} &= \mathbf{u}_{N-1} - \mathbf{u}_N \\ \mathbf{u}_{N1} &= \mathbf{u}_N - \mathbf{u}_1 \end{aligned}\right\}$$

Додаючи між собою усі рівняння, отримаємо співвідношення, яке показує, що напруги між зовнішніми виводами багатополюсника взаємозв'язані між собою:

$$u_{12} + u_{23} + \ldots + u_{(N-1),N} + u_{N1} = 0$$

- Звертаючись до схеми рис. ***б***, зауважимо, що можна довільно задавати взаємно незалежні струми джерел $J_1, J_2, \ldots J_N$.
- У схемі рис. ***б*** можемо визначити на підставі першого закону Кірхгофа струми зовнішніх виводів багатополюсника:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{i}_2 &= \mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{i}_N &= \mathbf{J}_N - \mathbf{J}_1 \end{aligned}\right\}$$

Додаючи між собою рівняння (1.26), отримуємо, що струми зовнішніх виводів N-полюсника взаємозв'язані співвідношенням:

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_N = 0$$

Отже, незалежними є (N-1) струмів зовнішніх виводів багатополюсника.

- Систему рівнянь , яка описує взаємозв’язок між струмами та напругами на зовнішніх виводах лінійного багатополюсника, називають **основними рівняннями багатополюсника.** Коефіцієнти, що входять в основні рівняння, називають **первинними параметрами багатополюсника**.
- Отже,, ***N***-полюсник описується $\boldsymbol{N^2}$ параметрами. Проте, як побачимо далі, не всі параметри є лінійно незалежними. Для цього знайдемо суму усіх зовнішніх струмів багатополюсника, використовуючи основні рівняння багатополюсника :

$$i_1 + i_2 + ... + i_N = (g_{11} + g_{21} + ... + g_{N1})u_1 + ... + (g_{1N} + g_{2N} + ... + g_{NN}) = 0$$

Дане співвідношення повинно виконуватись при довільних значеннях u_1, u_2, ...u_N, які теж можна вибирати довільно. Прирівнюючи до нуля послідовно напруги всіх полюсів відносно базисного, крім одного, отримаємо систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}
&(g_{11}+g_{21}+\ldots+g_{N1})u_1=0\\
&(g_{12}+g_{22}+\ldots+g_{N2})u_2=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(g_{N1}+g_{N2}+\ldots+g_{NN})u_N=0
\end{aligned}\right\}$$

Звідси випливає, що **сума елементів кожного стовпця повної матриці провідностей багатополюсника дорівнює нулеві.**

- Якщо напруги всіх зовнішніх виводів багатополюсника вибрати рівними між собою, тобто $\boldsymbol{u_1 = u_2 = \ldots = u_N = u}$, то у цьому випадку напруги між зовнішніми виводами багато полюсника дорівнюють нулеві : $u_{12} = u_1 - u_2 = 0$; $u_{23} = u_2 - u_3 = 0$;…. ,$u_{N1} = u_N - u_1 = 0$.

Отже, усі зовнішні струми багатополюсника також дорівнюють нулеві. Тоді можемо записати:

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = (g_{11} + g_{12} + ...g_{1N})u = 0 \\ i_2 = (g_{21} + g_{22} + ...g_{2N})u = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i_N = (g_{N1} + g_{2N} + ...g_{NN})u = 0 \end{array}\right\}$$

- Звідси випливає, що сума **елементів кожного рядка повної матриці провідностей багатополюсника дорівнює нулеві**.
- Отже, із N^2 елементів повної матриці N-полюсника лише $(N\text{-}1)^2$ є незалежними
- На підставі розглянутого доходимо висновку, що лінійний N-полюсник повністю описується системою рівнянь, у склад якої входить (N-1) незалежних рівнянь і яка містить $(N\text{-}1)^2$ первинних параметрів. Ця система може бути записана в матричній формі з допомогою т.зв. **укороченої матриці про відностей**, яку отримують із повної матриці викреслюванням довільного стовпця та рядка з однаковими індексами.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОВНИХ МАТРИЦЬ ПРОВІДНОСТЕЙ ЛІНІЙНИХ БАГАТОПОЛЮСНИКІВ

1. Зміна нумерації полюсів багатополюсника не змінює елементів матриці, а призводить лише до перестановки відповідних рядків та відповідних стовпців матриці
2. Якщо довільний ***К***-й полюс багатополюсника з'єднаний з базисним, то матрицю такого багатополюсника отримуємо із його повної матриці шляхом викреслення ***К***-го рядка та ***К***-го стовпця
3. Якщо два довільні полюси ***К*** і ***М*** об'єднані в один полюс з номером ***К***, то матрицю такого багатополюсника отримуємо із його повної матриці шляхом додавання елементів ***К***-го та ***М***-го рядка повної матриці і розміщенні їх у ***К***-му рядку, та додавання елементів ***К***-го та ***М***-го стовпця повної матриці і розміщенні їх у ***К***-му стовпці

4. Якщо довільний ***K***-й полюс багатополюсника не використовується при з’єднанні з іншою частиною схеми, то матрицю такого багатополюсника отримуємо із його повної матриці шляхом викреслення ***K***-го рядка та ***K***-го стовпця і заміни інших елементів матриці g_{ij} новими елементами g_{ij}^{1}, які визначаються співвідношенням:

$$g_{ij}^{1} = g_{ij} - \frac{g_{ik} g_{kj}}{g_{kk}}$$

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ КОЛА, ДО СКЛАДУ ЯКОГО ВХОДЯТЬ БАГАТОПОЛЮСНІ КОМПОНЕНТИ

- Узагальнений метод вузлових напруг полягає у тому, що коли вибрати один і той самий вузол як базовий і для багатополюсника і для решти кола, то напруги зовнішніх виводів багатополюсника будуть одночасно вузловими напругами тих вузлів кола, до яких під`єднані виводи багатополюсника. При тому струми зовнішніх виводів багатополюсника входитимуть у рівняння балансу струмів у незалежних вузлах кола. Ці струми визначаються через G-параметри матриці багатополюсника як функції вузлових напруг. **Отже, G-параметри багатополюсника входитимуть до складу власних та взаємних провідностей тих вузлів кола, до яких під’єднані виводи багатополюсника.**

- В загальному випадку, коли електронне коло містить декілька багатополюсників, рівняння електричної рівноваги за узагальненим методом вузлових напруг формують у такій по слідовності:

1) вибирають один із вузлів кола за базисний і нумерують незалежні вузли кола;

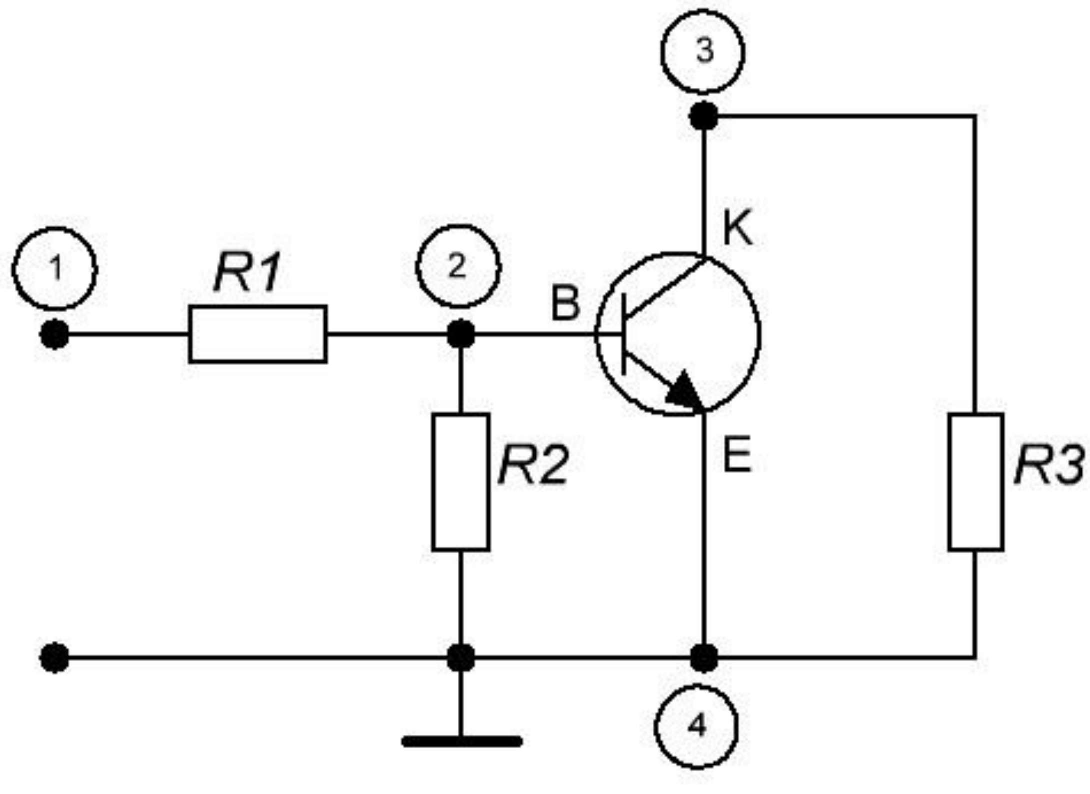
2) формують матрицю провідностей кола, враховуючи лише двополюсні компоненти.

3) перенумеровують стовпці та рядки невизначених (повних) матриць провідностей усіх багатополюсників згідно з нумерацією вузлів, до яких під'єднані виводи багатополюсників;

4) із невизначених матриць провідностей усіх багатополюсників викреслюють рядки та стовпці, що відповідають тим виводам багатополюсника, які під'єднані до базисного вузла

5) додають до елементів матриці провідностей кола, сформованої у п. 2, відповідні елементи матриць провідностей багатополюсників, згідно з нумерацією рядків та стовпців, виконаною у п.3.

Розглянемо приклад формування матриці провідностей підсилювального каскаду, побудованого на біполярному тран зисторі. Узагальнена малосигнальна еквівалентна схема каскаду зображена на рисунку:



За базовий вузол приймаємо вузол 4. Повна матриця провідностей транзистора має вигляд:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{B} & \mathrm{K} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{B} \\ \mathrm{K} \\ \mathrm{E} \end{array} & \begin{pmatrix} G_{BB} & G_{BK} & G_{BE} \\ G_{KB} & G_{KK} & G_{KE} \\ G_{EB} & G_{EK} & G_{EE} \end{pmatrix} \end{array}$$

Відповідно до способу вмикання транзистора у дану схему підсилювального каскаду присвоюємо базі номер 2, колектору номер 3, емітеру – номер 4. Оскільки емітер транзистора з’єднаний з базовим вузлом, то відповідний стовпець та рядок матриці провідностей транзистора не будемо враховувати (викреслюємо). Формуємо матрицю провідностей каскаду, враховуючи лише двополюсні компоненти:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/R_1 & -1/R_1 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1+1/R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Додаючи до елементів даної матриці відповідні елементи матриці провідностей транзистора, формуємо результуючу мат рицю провідностей підсилювального каскаду:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ (G) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/R_1 & -1/R_1 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1+1/R_2+G_{BB} & G_{BK} \\ 0 & G_{KB} & 1/R_3+G_{kk} \end{pmatrix} \end{array}$$

Приймемо, що на вході схеми діє джерело струму J_{BX}, яке створює на вході вузлову напругу U_1, а на виході вузлову напругу U_3. Згідно з формулами Крамера ці напруги дорівнюють:

$$U_1 = J_{BX}\frac{\Delta_{11}}{\Delta}; \qquad U_3 = J_{BX}\frac{\Delta_{13}}{\Delta}.$$

Коефіцієнт передавання напруги підсилювального каскаду дорівнює:

$$K_U = \frac{U_3}{U_1} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}$$

Визначивши відповідні алгебраїчні доповнення, отримуємо такий результат:

$$K_U = \frac{-(1/R_1)G_{KB}}{\left[(1/R_1)+(1/R_2)+G_{BB}\right](1/R_3+G_{KK})-G_{BK}G_{KB}}$$

На закінчення зауважимо, що узагальнений метод вузлових напруг є універсальним і не накладає обмежень на топологію кола.