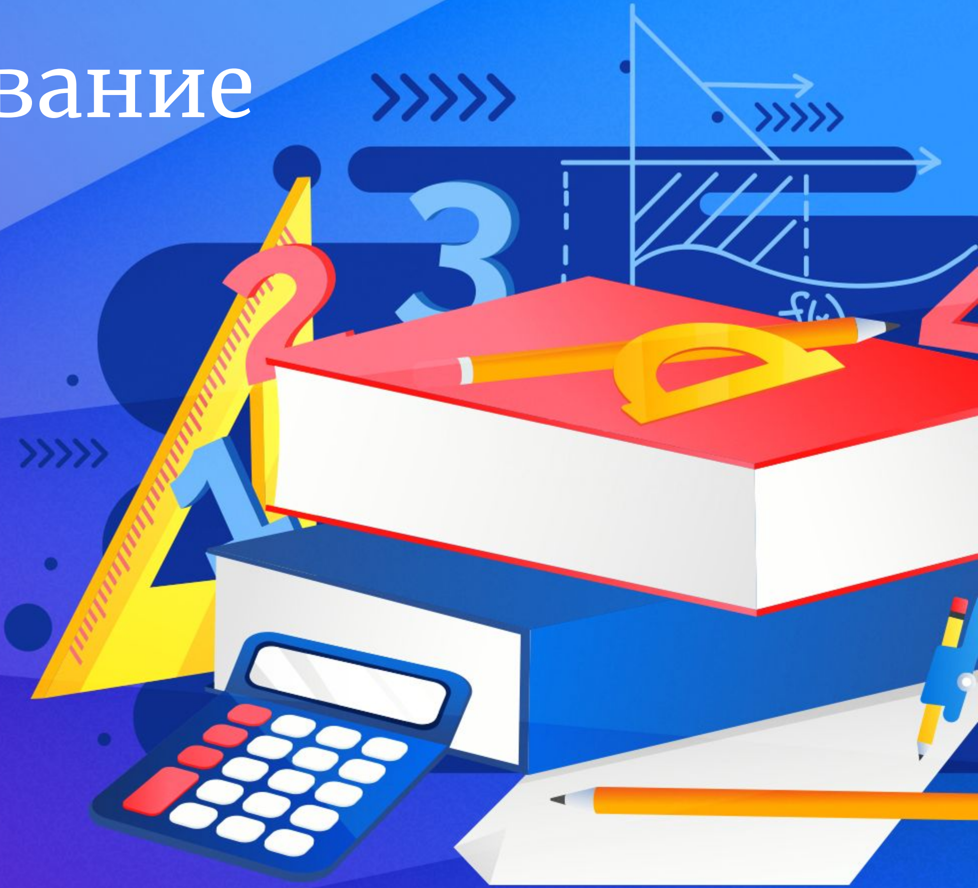
Возрастание и убывание функции



Применение производной
к исследованию функций

Сегодня на уроке

1. Рассмотрим применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.
2. Познакомимся с теоремой Лагранжа.
3. Сформулируем и докажем теорему о достаточном условии возрастания функции.
4. Сформулируем и докажем теорему о достаточном условии убывания функции.

VIDEOUROKI.NET

Чему равна производная функции $f(x) = (4x - 9)^7$?

А $f'(x) = 7(4x - 9)^6$

В $f'(x) = 28(4x - 9)^6$

Б $f'(x) = 4(4x - 9)^6$

Г $f'(x) = 28(4x - 9)^7$

Чему равна производная функции $f(x) = (4x - 9)^7$?

А $f'(x) = 7(4x-9)^6$

В $f'(x) = 28(4x-9)^6$

Б $f'(x) = 4(4x-9)^6$

Г $f'(x) = 28(4x-9)^7$

Чему равна производная функции $f(x) = \cos(5x + 9)$?

А $f'(x) = -\sin(5x + 9)$

В $f'(x) = 5\sin(5x + 9)$

Б $f'(x) = -5\sin(5x + 9)$

Г $f'(x) = 5\cos(5x + 9)$

Чему равна производная функции $f(x) = \cos(5x + 9)$?

А $f'(x) = -\sin(5x + 9)$

В $f'(x) = 5\sin(5x + 9)$

Б $f'(x) = -5\sin(5x + 9)$

Г $f'(x) = 5\cos(5x + 9)$

Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$?

А $\frac{\sqrt{2}}{2}$

В $\frac{1}{2}$

Б 1

Г -1

Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$?

А $\frac{\sqrt{2}}{2}$

В $\frac{1}{2}$

Б 1

Г -1

Вспомним

Функция $f(x)$ называется возрастающей на некотором промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых точек x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Если для любых точек x_1 и x_2 из данного промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство

$$f(x_2) < f(x_1),$$

то функция $f(x)$ называется убывающей на этом промежутке.

Нахождение промежутков возрастания и убывания функции – это одна из основных задач исследования функции.

Применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций

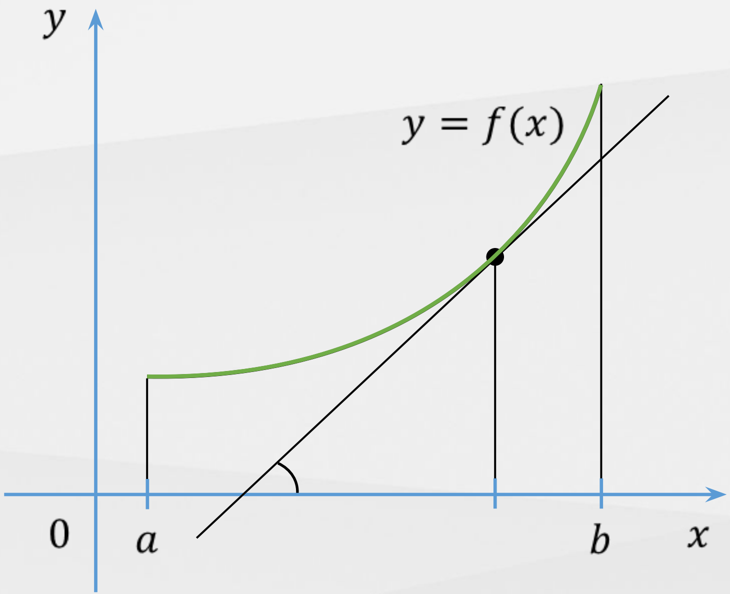
Пусть дана функция $f(x)$.

$f'(x) > 0$ на некотором промежутке.

Тогда угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ к графику этой функции положителен в каждой точке данного промежутка.

А значит, касательная образует острый угол с осью Ox.

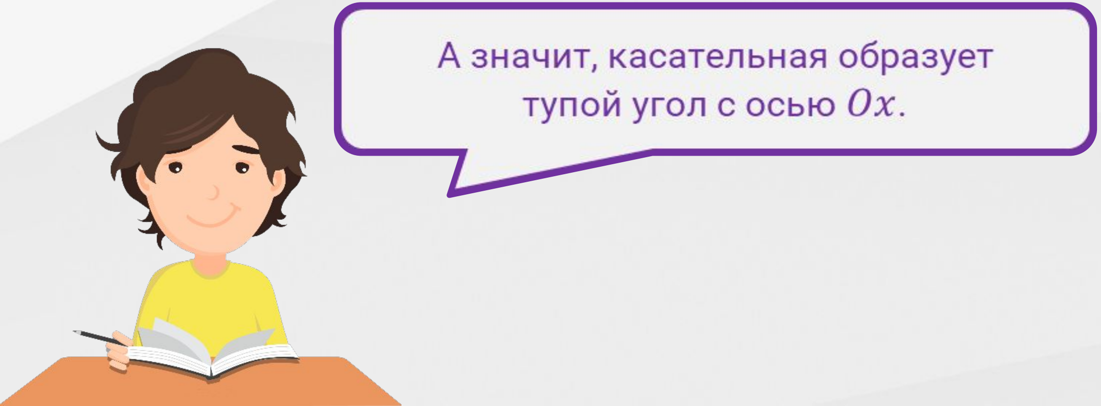
График функции «поднимается» на этом промежутке, т. е. функция $f(x)$ возрастает.

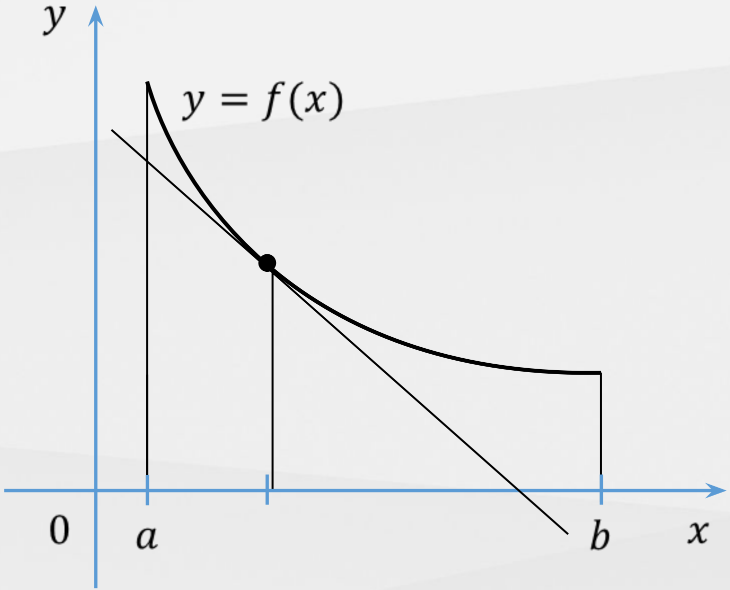


Применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций

Пусть дана функция $f(x)$.

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен.





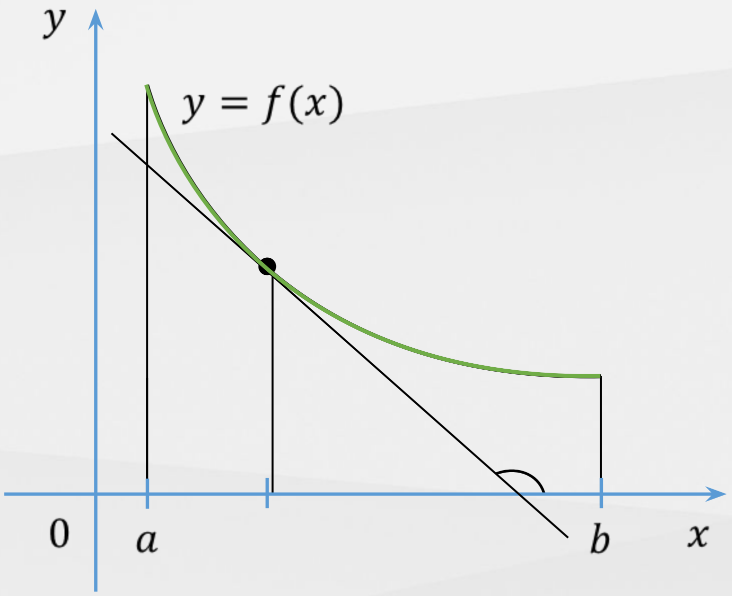
Применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций

Пусть дана функция $f(x)$.

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен.

А значит, касательная образует тупой угол с осью Ox.

График функции на этом промежутке «опускается», т. е. функция $f(x)$ убывает.



Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Теорему Лагранжа будем использовать при доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции.

Теорема Лагранжа

Геометрический смысл формулы $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$A\ (a; f(a)),\ B\ (b; f(b))$.

Прямая l – секущая.

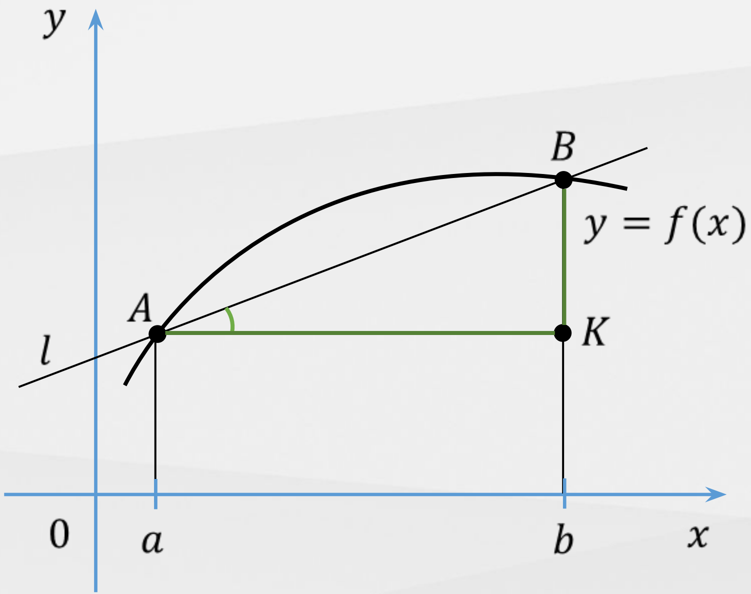
ΔAKB – прямоугольный.

$K\ (b; f(a))$

$\operatorname{tg} \angle BAK = \frac{BK}{AK}$,

$BK = f(b) - f(a),\ AK = b - a$.

Тогда $\operatorname{tg} \angle BAK = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Теорема Лагранжа

Геометрический смысл формулы $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$A\ (a; f(a))$, $B\ (b; f(b))$.

Прямая l – секущая.

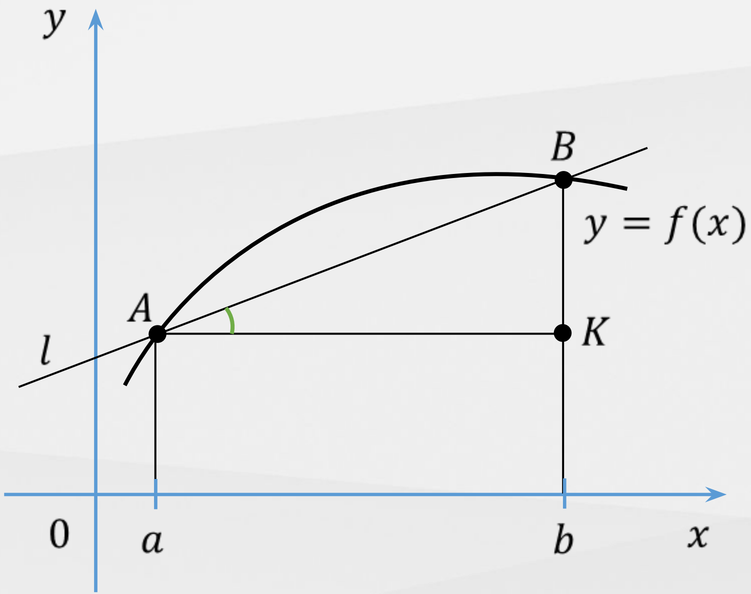
ΔAKB – прямоугольный.

$K\ (b; f(a))$

$\operatorname{tg} \angle BAK$

$$\operatorname{tg} \angle BAK = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Угол BAK равен углу наклона между секущей l и осью Ox.



Теорема Лагранжа

Геометрический смысл формулы $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$A\ (a; f(a)),\ B\ (b; f(b)).$

Прямая l – секущая.

ΔAKB – прямоугольный.

$K\ (b; f(a))$

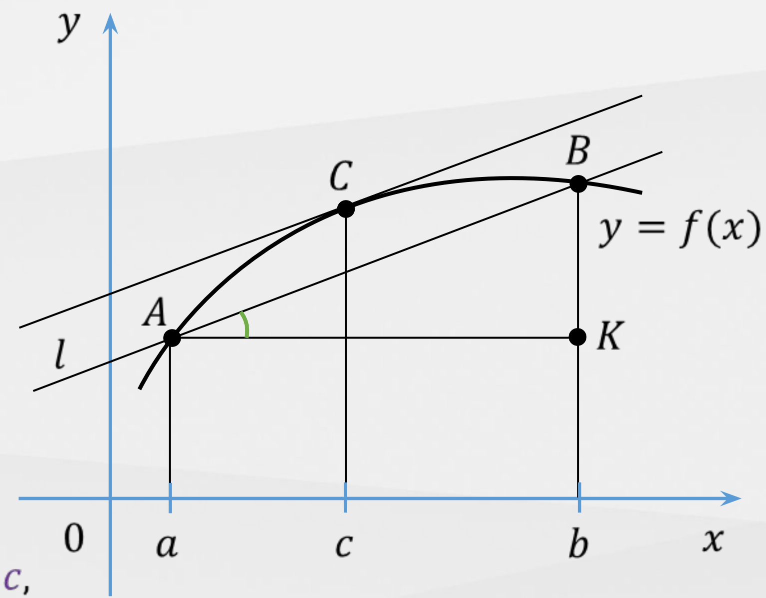
$\operatorname{tg} \angle BAK$

$\operatorname{tg} \angle BAK = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Угловой коэффициент секущей l равен $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке C с абсциссой c.

Получается, что на интервале $(a; b)$ найдётся такая точка c, что в точке графика с абсциссой c касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна секущей.



Теорема о достаточном условии возрастания функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция возрастает на интервале $(a; b)$.

Доказательство:

Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки интервала $(a; b)$,такие, что $x_1 < x_2$.

Применим теорему Лагранжа к отрезку $[x_1; x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1; x_2).$$

$f'(c) > 0,\ c \in (x_1; x_2);\ x_2 - x_1 > 0$, т. к. $x_1 < x_2$.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Теорема о достаточном условии возрастания функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, то функция <u>возрастает</u> на интервале $(a;b)$.

Доказательство:

Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки интервала $(a;b)$,такие, что $x_1 < x_2$.

Применим теорему Лагранжа к отрезку $[x_1;x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), c \in (x_1;x_2).$$

$f'(c) > 0, c \in (x_1;x_2); x_2 - x_1 > 0$, т. к. $x_1 < x_2$.

Тогда получаем, что $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$.

Значит, функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$.

Теорема о достаточном условии возрастания функции

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то эта функция <u>возрастает</u> на отрезке $[a; b]$.

Теорема о достаточном условии убывания функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x)<0$ для всех $x\in(a;b)$, то функция убывает на интервале $(a;b)$.

Доказательство:

Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки интервала $(a;b)$,такие, что $x_1<x_2$.

Применив к отрезку $[x_1;x_2]$ теорему Лагранжа, получаем:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),\ c\in(x_1;x_2).$$

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Теорема о достаточном условии убывания функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция убывает на интервале $(a; b)$.

Доказательство:

Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки интервала $(a; b)$,такие, что $x_1 < x_2$.

Применив к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа, получаем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), c \in (x_1; x_2).$$

$f'(c) < 0, c \in (x_1; x_2)$; $x_2 - x_1 > 0$, т. к. $x_1 < x_2$.

Тогда получаем, что $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$.

Значит, функция $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$.

Теорема о достаточном условии убывания функции

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(a; b)$, то эта функция убывает на отрезке $[a; b]$.

Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на возрастание и убывание.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3.$

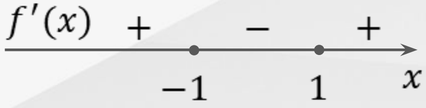
Чтобы найти промежутки <u>возрастания</u>, надо решить неравенство $f'(x) > 0$, т. е. $3x^2 - 3 > 0$.

$3x^2 - 3 = 0,$

$3x^2 = 3,$

$x^2 = 1,$

$x_1 = -1,\ x_2 = 1.$



$x = 2: 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$

Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на возрастание и убывание.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3.$

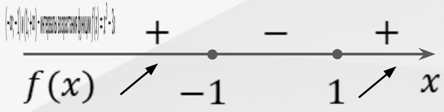
Чтобы найти промежутки возрастания, надо решить неравенство $f'(x) > 0$, т. е. $3x^2 - 3 > 0$.

$3x^2 - 3 = 0,$

$3x^2 = 3,$

$x^2 = 1,$

$x_1 = -1,\ x_2 = 1.$



$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ – интервалы возрастания функции $f(x) = x^3 - 3x$.

Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на возрастание и убывание.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3.$

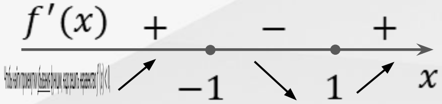
Чтобы найти промежутки <u>убывания</u> функции, надо решить неравенство $f'(x) < 0$, т. е. $3x^2 - 3 < 0$.

$3x^2 - 3 = 0,$

$3x^2 = 3,$

$x^2 = 1,$

$x_1 = -1,\ x_2 = 1.$



$x \in (-1; 1)$

$(-1; 1)$ – интервал убывания функции $f(x) = x^3 - 3x$.

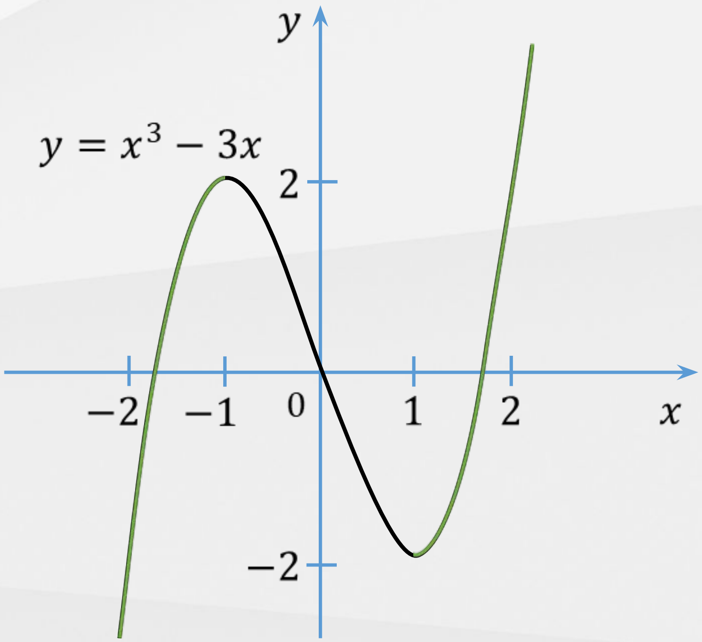
Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на возрастание и убывание.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

$(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ – интервалы возрастания функции.

$(-1; 1)$ – интервал убывания функции.

Функция $y = x^3 - 3x$ возрастает не только
на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$,
но и на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$;



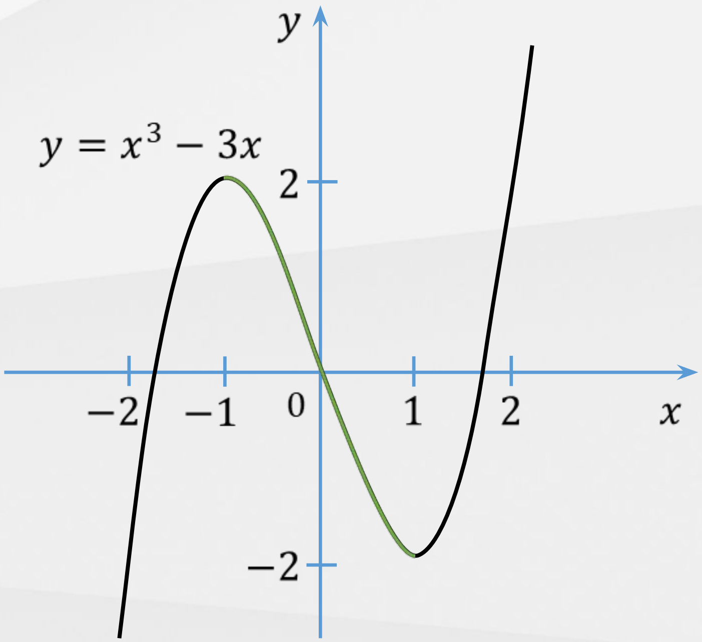
Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на возрастание и убывание.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

$(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ – интервалы возрастания функции.

$(-1; 1)$ – интервал убывания функции.

Функция $y = x^3 - 3x$ возрастает не только
на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$,
но и на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$;
убывает не только на интервале $(-1; 1)$,
но и на отрезке $[-1; 1]$.



Промежутки возрастания и убывания функции называют **промежутками монотонности этой функции**.

Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ на возрастание и убывание.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^3 - 6x^2 - 15x + 4)' = 3x^2 - 12x - 15.$

Чтобы найти промежутки возрастания, надо решить неравенство $f'(x) > 0$,

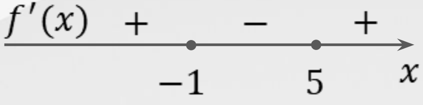
т. е. $3x^2 - 12x - 15 > 0.$

$3x^2 - 12x - 15 = 0,$

$x^2 - 4x - 5 = 0,$

$x_1 + x_2 = 4,\ x_1 x_2 = -5,$

$x_1 = -1,\ x_2 = 5.$



$x = 6: 3 \cdot 6^2 - 12 \cdot 6 - 15 = 21 > 0$

Теорема Виета

$x^2 + px + q = 0,$

$x_1 + x_2 = -p,$

$x_1 x_2 = q.$

Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ на возрастание и убывание.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^3 - 6x^2 - 15x + 4)' = 3x^2 - 12x - 15.$

Чтобы найти промежутки <u>возрастания</u>, надо решить неравенство $f'(x) > 0$,

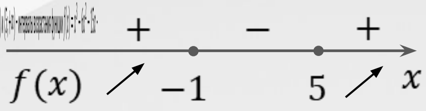
т. е. $3x^2 - 12x - 15 > 0$.

$3x^2 - 12x - 15 = 0,$

$x^2 - 4x - 5 = 0,$

$x_1 + x_2 = 4,\ x_1 x_2 = -5,$

$x_1 = -1,\ x_2 = 5.$



$x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$

$(-\infty; -1)$ и $(5; +\infty)$ – интервалы возрастания функции $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$.

Исследуем функцию $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ на возрастание и убывание.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x^3 - 6x^2 - 15x + 4)' = 3x^2 - 12x - 15.$

Чтобы найти промежутки убывания функции, надо решить неравенство $f'(x) < 0$,

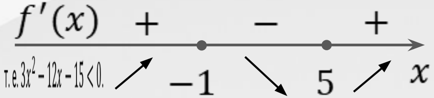
т. е. $3x^2 - 12x - 15 < 0.$

$3x^2 - 12x - 15 = 0,$

$x^2 - 4x - 5 = 0,$

$x_1 + x_2 = 4,\ x_1x_2 = -5,$

$x_1 = -1,\ x_2 = 5.$



$x \in (-1; 5)$

$(-1; 5)$ – интервал убывания функции $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4.$

Итоги урока

Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема

Теорема о достаточном условии возрастания функции

Теорема о достаточном условии убывания функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция <u>убывает</u> на интервале $(a; b)$.

Доказательство:

Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки интервала $(a; b)$, такие, что $x_1 < x_2$.

Применив к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа, получаем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), c \in (x_1; x_2).$$

$f'(c) < 0, c \in (x_1; x_2)$; $x_2 - x_1 > 0$, т. к. $x_1 < x_2$.

Тогда получаем, что $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$.

Значит, функция $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$.

Теорема о достаточном условии убывания функции

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция <u>убывает</u> на интервале $(a; b)$.

Доказательство:

Пусть x_1 и x_2 – произвольные точки интервала $(a; b)$, такие, что $x_1 < x_2$.

Применив к отрезку $[x_1; x_2]$ теорему Лагранжа, получаем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), c \in (x_1; x_2).$$

$f'(c) < 0, c \in (x_1; x_2)$; $x_2 - x_1 > 0$, т. к. $x_1 < x_2$.

Тогда получаем, что $f(x_2) - f(x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$.

Значит, функция $f(x)$ убывает на интервале $(a; b)$.