СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Если твердое тело движется относительно подвижной системы отсчета $OXYZ$ которая в свою очередь движется произвольным образом относительно неподвижной системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$, движение тела называют составным или сложным.

Основная задача кинематики сложного движения твердого тела состоит в определении вида и кинематических характеристик результирующего движения тела по заданному виду и кинематическим характеристикам составляющих движений.

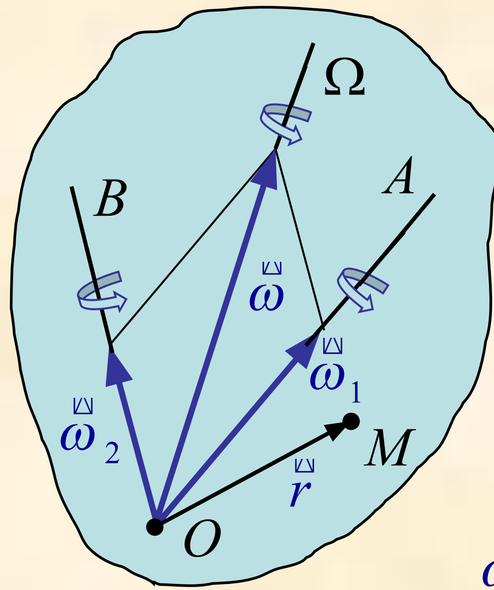
1. Сложение поступательных движений

Пусть твердое тело движется поступательно со скоростью $\vec{V}_1$ относительно подвижной системы отсчета, которая также движется поступательно со скоростью $\vec{V}_2$ относительно неподвижной системы отсчета. Тогда, на основании теоремы о сложении скоростей, все точки тела в абсолютном движении будут иметь одинаковую абсолютную скорость $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ и, следовательно, результирующим движением тела будет являться поступательное движение.

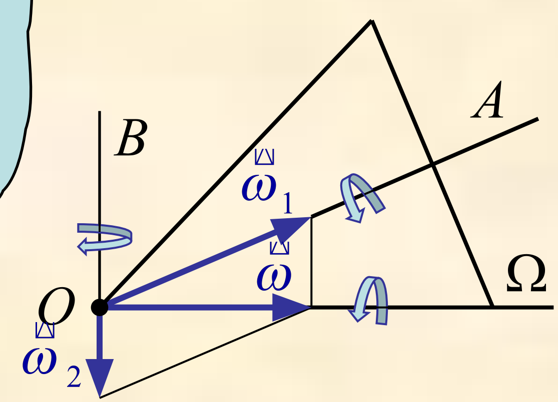
Замечание.
Если твердое тело одновременно участвует, в N поступательных движениях, то результирующим движением является поступательное движение со скоростью $\vec{V} = \sum_{k=1}^{N} \vec{V}_k$

2. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ

Пусть твердое тело вращается одновременно вокруг двух пере-секающихся осей ОА и ОВ с угло -выми скоростями $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$. Тогда точка О, лежащая на обеих осях одновременно будет оставаться неподвижной и резуль -тирующее движение тела можно рассматривать как мгновенное вращательное движение с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг мгновенной оси вращения $O\Omega$.



Пример:
качение конуса по плоскости
$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.



Для нахождения угловой скорости $\vec{\omega}$ выразим скорость произвольной точки М, не лежащей на осях вращения по теореме о сложении скоростей:

$$\vec{V} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}.$$

Скорость той же точки при сферическом движении тела $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Отсюда в силу произвольности вектора $\vec{r}$, получаем: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

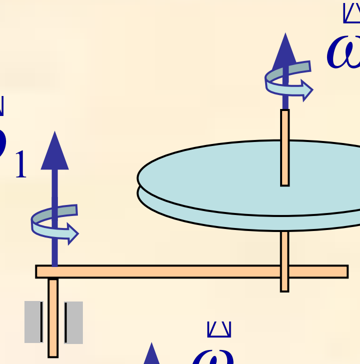
Замечание.

Если твердое тело одновременно участвует, в N вращениях вокруг пересекающихся осей, то результирующим движением является вращательное движение с угловой скоростью

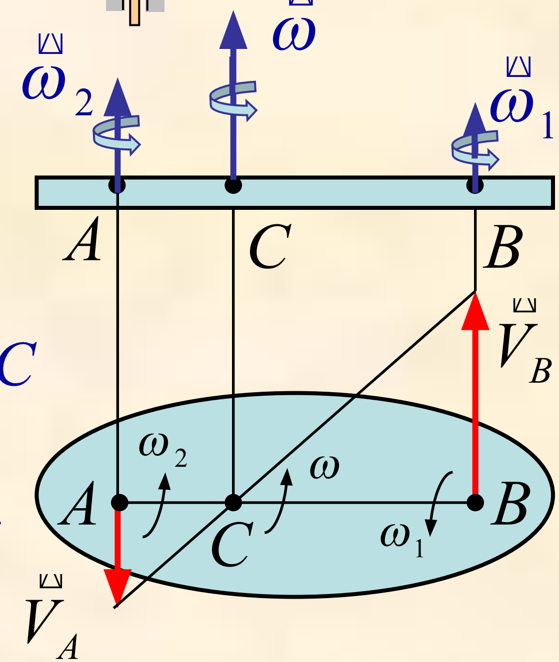
$$\vec{\omega} = \sum_{k=1}^{N} \vec{\omega}_k .$$

3. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Если оси вращения тела параллельны, то результирующим движением тела будет плоское движение в плоскости, перпендикулярной осям.



а) вращения направлены в одну сторону



$$\left|\vec V_A\right| = \omega_1 \cdot AB\ ,\ \vec V_A \perp AB\ ;$$

$$\left|\vec V_B\right| = \omega_2 \cdot AB\ ,\ \vec V_B \perp AB\ ,\ \ \vec V_B \uparrow\uparrow -\vec V_A$$

Точка С – МЦС, поэтому $\left|\vec V_A\right| = \omega \cdot AC\ ,\ \left|\vec V_B\right| = \omega \cdot BC$

$$\omega = \frac{\left|\vec V_A\right|}{AC} = \frac{\omega_1 \cdot AB}{AC}\ ,\ \omega = \frac{\left|\vec V_B\right|}{BC} = \frac{\omega_2 \cdot AB}{BC} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{BC}{AC}$$

$$\omega = \frac{\left|\vec V_A\right|}{AC} = \frac{\omega_1 \cdot AB}{AC} = \frac{\omega_1 \cdot (AC + BC)}{AC} = \omega_1 \cdot (1 + BC/AC) =$$

$$= \omega_1 \cdot (1 + \omega_2/\omega_1) = \omega_1 + \omega_2$$

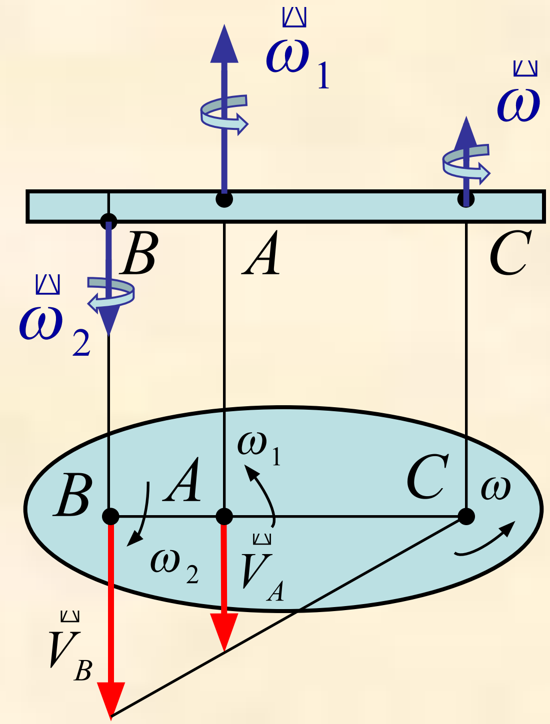
$$\boxed{\omega_2/\omega_1 = BC/AC\ \ ,\ \omega = \omega_1 + \omega_2 .}$$

3. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

б) вращения направлены в противоположные стороны ($|\vec{\omega}_1| > |\vec{\omega}_2|$).

$$|\vec{V}_A| = \omega_2 \cdot AB\ ,\ \vec{V}_A \perp AB\ ; \qquad \vec{V}_B \uparrow\uparrow \vec{V}_A\ ,$$

$$|\vec{V}_B| = \omega_1 \cdot AB\ ,\ \vec{V}_B \perp AB \qquad |\vec{V}_B| > |\vec{V}_A|$$



Точка С – МЦС, поэтому

$$|\vec{V}_A| = \omega \cdot AC\ ,\ |\vec{V}_B| = \omega \cdot BC$$

$$\omega = \frac{|\vec{V}_A|}{AC} = \frac{\omega_2 \cdot AB}{AC}\ ,\ \omega = \frac{|\vec{V}_B|}{BC} = \frac{\omega_1 \cdot AB}{BC} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{AC}{BC}$$

$$\omega = \frac{|\vec{V}_B|}{BC} = \frac{\omega_1 \cdot AB}{BC} = \frac{\omega_1 \cdot (BC - AC)}{BC} = \omega_1 \cdot (1 - AC/BC) =$$

$$= \omega_1 \cdot (1 - \omega_2/\omega_1) = \omega_1 - \omega_2$$

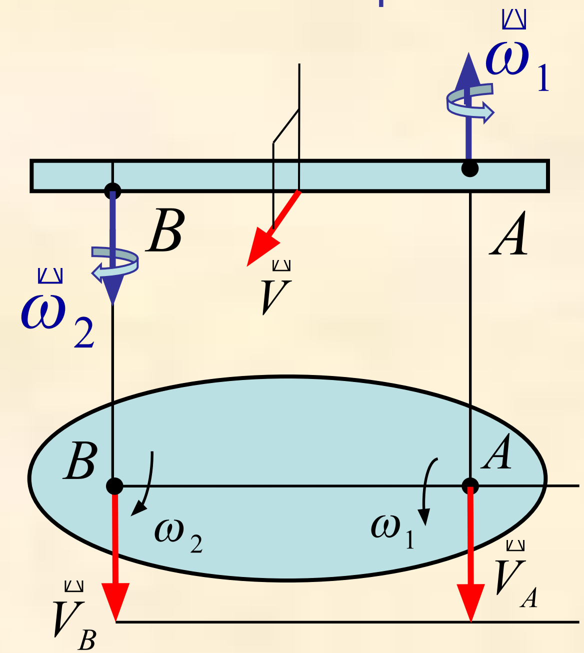
$$\boxed{\omega_2/\omega_1 = AC/BC\ ;\ \omega = \omega_1 - \omega_2\ .}$$

3. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

в) пара вращений Парой вращений называют совокупность двух мгновенных вращений твердого тела вокруг параллельных осей с оди - наковыми по модулю и противоположными по направлению угловыми скоростями.

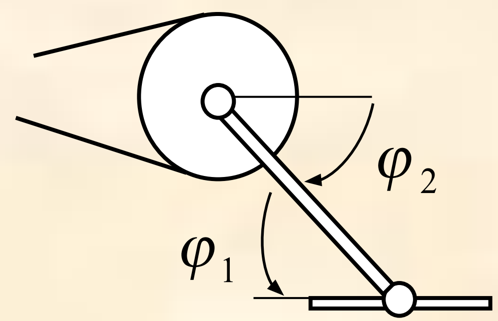
$$\left|\vec V_A\right| = \omega_2 \cdot AB\ ,\ \vec V_A \perp AB\ ; \qquad \vec V_B \uparrow\uparrow \vec V_A\ ,$$

$$\left|\vec V_B\right| = \omega_1 \cdot AB\ ,\ \vec V_B \perp AB \qquad \left|\vec V_B\right| = \left|\vec V_A\right|$$



МЦС $\to \infty$ поэтому тело совершает мгновенное поступательное движение со скоростью $\left|\vec V\right| = \omega \cdot AB$, направленной перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы угловых скоростей $\vec\omega_1$, $\vec\omega_2$ в ту сторону, откуда поворот, на который указывают векторы угловых скоростей, кажется происходящим против хода часовой стрелки.

Пример. Движение велосипедной педали относительно рамы велосипеда.

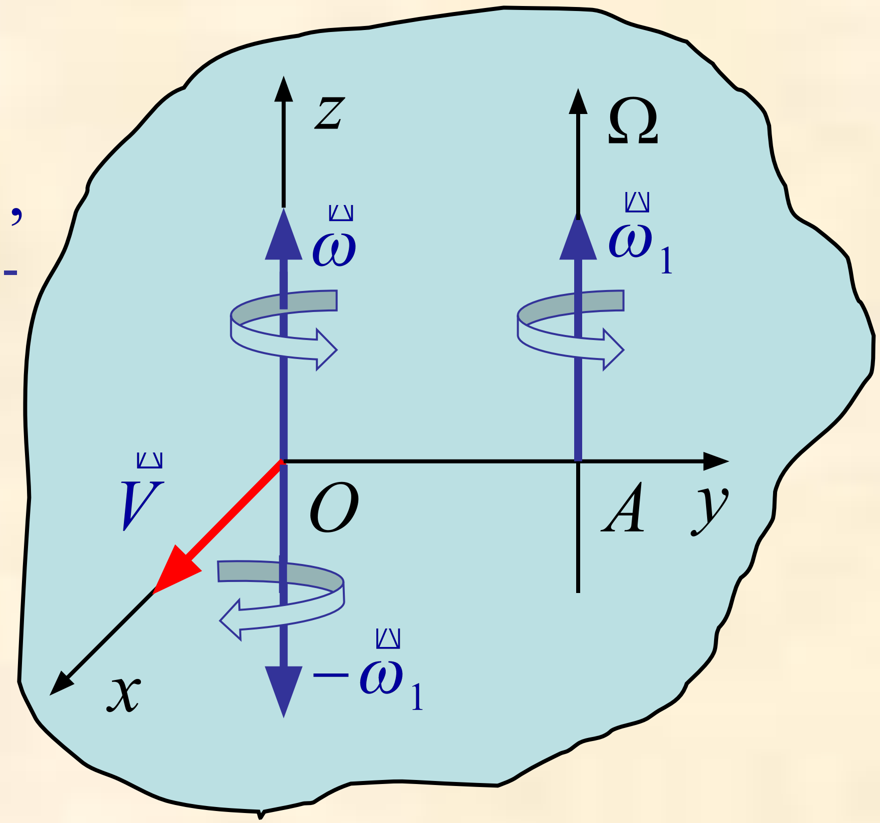


4. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

а) $\vec{V} \perp \vec{\omega}$

Заменим скорость поступательного движения $\vec{V}$ парой вращений $(\vec{\omega}_1, -\vec{\omega}_1)$, Расположенной в плоскости, перпендику - лярной вектору скорости $\vec{V}$, выбрав $|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}|$. Тогда плечо пары вращений

$$OA = d = \frac{|\vec{V}|}{|\vec{\omega}|}.$$



Вращения тела вокруг оси OZ с угловыми скоростями $(\vec{\omega}, -\vec{\omega}_1)$ взаимно уничто – жаются.

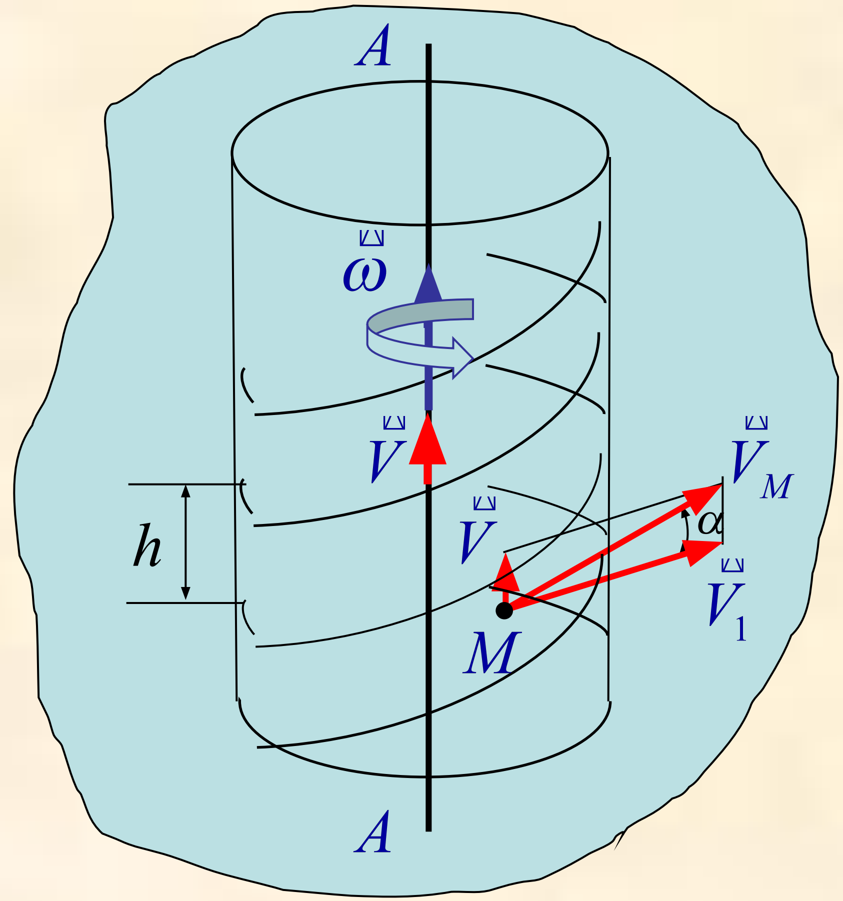
Следовательно, результирующим движением твердого тела является вращательное движение вокруг мгновенной оси AΩ, параллельной оси OZ и отстоящей от нее на расстояние $d = |\vec{V}| / |\vec{\omega}|$ с такой же по модулю и направлению угловой скоростью $\vec{\omega}$.

4. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

б) $\vec{V} \parallel \vec{\omega}$

Тело совершает винтовое движение. АА – ось винта; h – шаг винта – расстояние, проходимое точками тела, лежащими на оси винта за время одного оборота. Если

$$|\vec{\omega}| = consn, |\vec{V}| = const, \; h = 2\pi \frac{|\vec{V}|}{|\vec{\omega}|} = const,$$



при этом любая точка тела, не лежащая на оси винта, описывает винтовую линию. Абсолютная скорость точки М, отстоящей от оси винта на расстоянии r равна

$\vec{V}_M = \vec{V}_1 + \vec{V}$, где $|\vec{V}_1| = \omega \cdot r$, $\vec{V}_1 \perp \vec{V}$,

Поэтому $|\vec{V}_M| = \sqrt{V^2 + \omega^2 r^2}$. Скорость $\vec{V}_M$ направлена по касательной к винтовой линии, по которой движется точка М, и составляет с плоскостью основания цилиндра угол α.

$$tg\alpha = \frac{|\vec{V}|}{\omega \cdot r}$$

4. СЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

в) скорость поступательного движения образует произвольный угол α с осью вращения тела (общий случай).

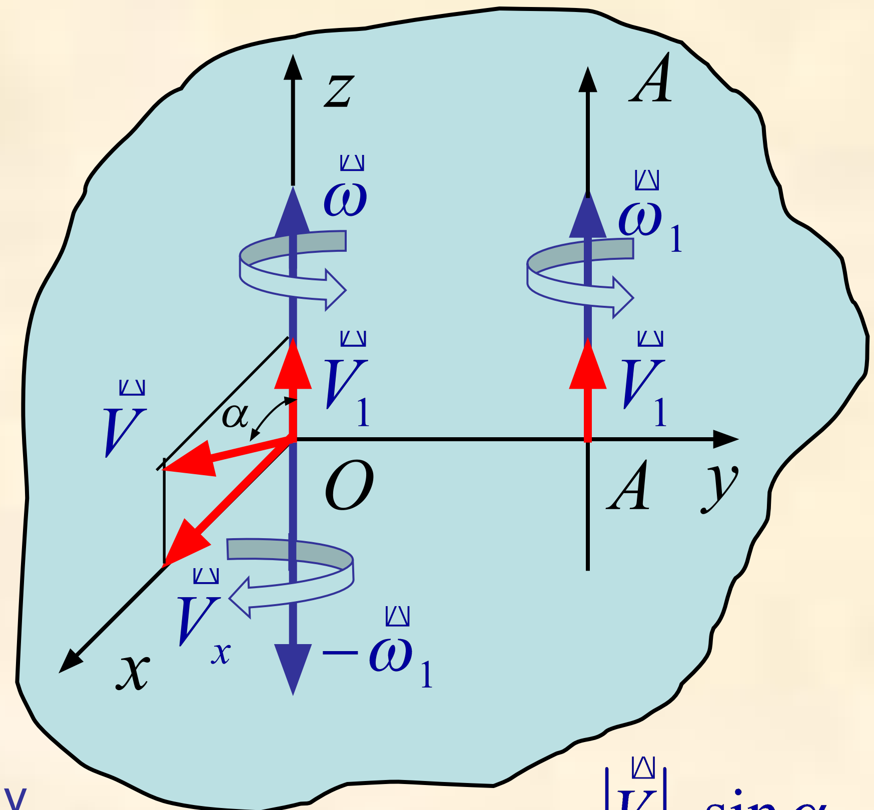
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_x \,, \quad |\vec{V}_1| = |\vec{V}| \cdot \cos\alpha \,,$$

$$|\vec{V}_x| = |\vec{V}| \cdot \sin\alpha$$

Скорость $\vec{V}_x$ заменим парой вращений $(\vec{\omega}_1, -\vec{\omega}_1)$, выбирая $|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}|$.

Вращения тела вокруг оси OZ с угловыми скоростями $(\vec{\omega}, -\vec{\omega}_1)$ взаимно уничто – жаются. У тела остается вращение вокруг оси AA с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ и посту- пательное движение со скоростью $\vec{V}_1$, направленной параллельно оси AA.

Это соответствует мгновенному винтовому движению.

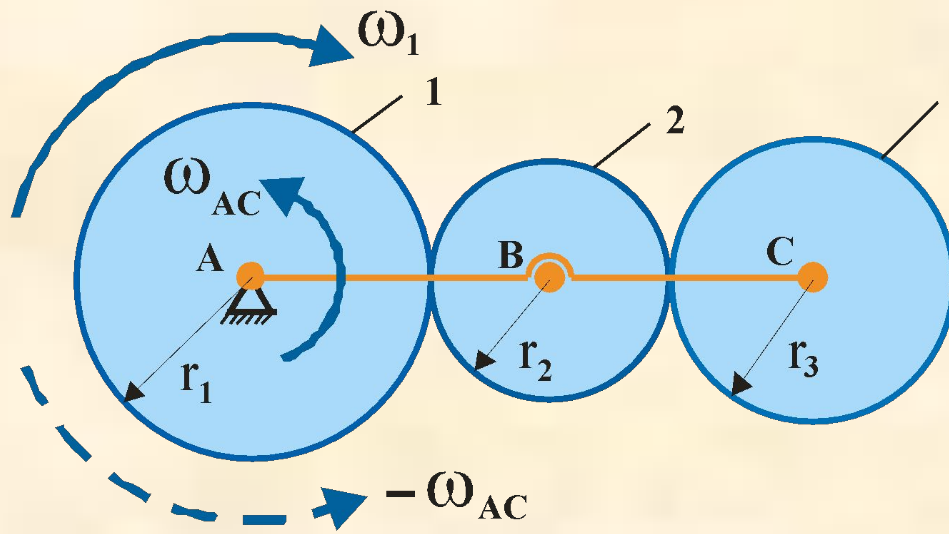


$$OA = \frac{|\vec{V}| \cdot \sin\alpha}{|\vec{\omega}|}$$

ВЫВОД: движение свободного твердого тела можно рассматривать как совокупность мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно изменяющих свое положение и направление в пространстве винтовых осей.

МЕТОД ВИЛЛИСА ДЛЯ РАСЧЕТА УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Изложенные выше результаты сложения вращений твердого тела вокруг параллельных или пересекающихся осей используются в методе Виллиса (методе остановки) для кинематических расчетов планетарных и дифференциальных передач. Так, для определения угловых скоростей шестерни дифференциальной передачи мысленно сообщают всему механизму вращение с угловой скоростью $-\omega_{AC}$ – равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости вращения кривошипа АС. Тогда кривошип становится неподвижным звеном, следовательно, неподвижными становятся и оси колес 2 и 3, что позволяет использовать обычные формулы для передаточных чисел.



$$\frac{\omega_1-\omega_{AC}}{\omega_2-\omega_{AC}}=-\frac{r_2}{r_1},\qquad \frac{\omega_2-\omega_{AC}}{\omega_3-\omega_{AC}}=-\frac{r_3}{r_2}$$