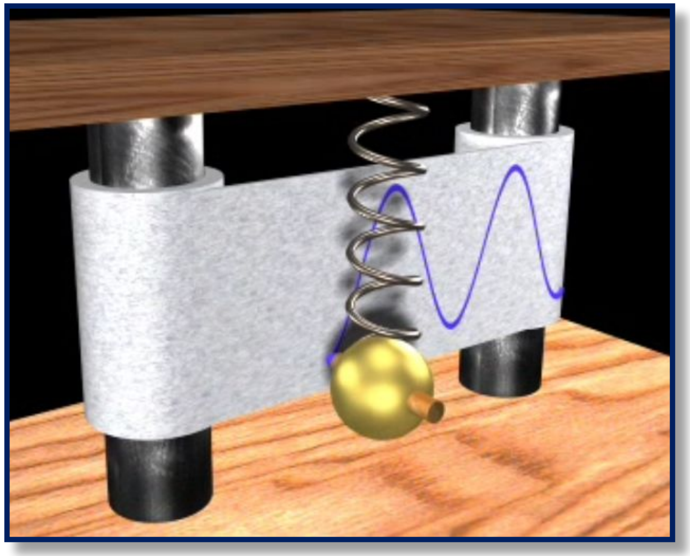
Курс физики для студентов 1-2 курса БГТУ
Заочный факультет
для специальностей ЛИД, ТДП, ТДП$_С$, МОЛК, МОЛК$_С$
Кафедра физики БГТУ
доцент Крылов Андрей Борисович

Часть I. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Лекция 3б.
Механические колебания-1



Гармонические колебания

2015

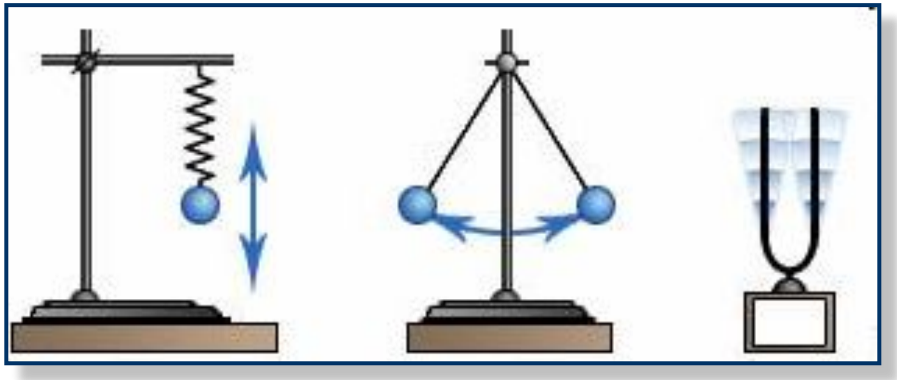
Определение колебания

- Внутри любого живого организма непрерывно происходят разнообразные повторяющиеся процессы, например, процесс работы сердца.
- Аналогично и в технике есть разнообразные повторяющиеся процессы
- Все эти явления подчиняются общим закономерностям, которые рассмотрим на примере механических колебаний.

- Колебания – это периодически повторяющиеся движения или изменения параметров, которые характеризуют состояние системы.
- Колебания могут быть разной природы:
  - механические,
  - тепловые,
  - электрические и т. п.

Виды колебаний

- гармонические,
- периодические
- затухающие,
- вынужденные



- Простейшим видом колебаний является гармонические колебания, но чаще встречаются периодические колебания.

Систему, совершающую колебательные движения, называют осциллятором.

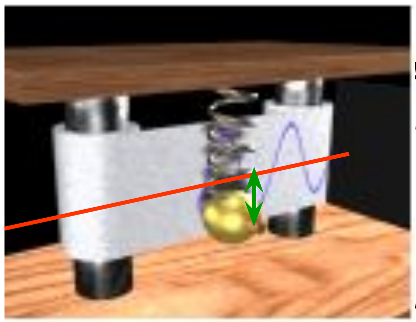
+5

Основные характеристики колебательного движения

- **Смещение** x – *это расстояние, на которое отклоняется колеблющееся тело в данный момент времени от положения равновесия. Измеряется в СИ в метрах (м);*

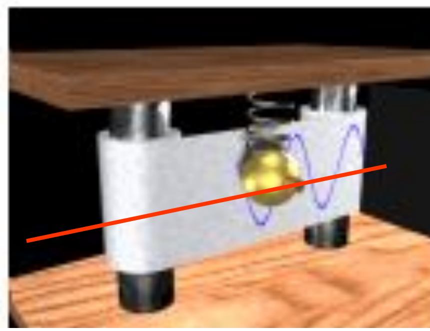
  для гармонического колебания (1):

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$



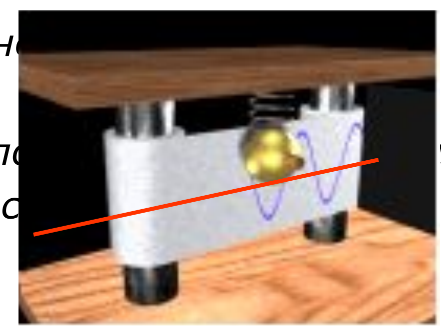
- *и (часто) просто* A *– максимальное смещение* ($A_0 = x_{max}$) *от*
  ия. Измеряется в СИ в метрах (м);

- *одно*
  Измеряется в СИ в секундах (с).
  риаль



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

где m – масса материальной то
ружин



- **Частота** *или* **линейная частота** ν *(«ню») – это числ*
  у
  времени. Измеряется в СИ в Герцах (Гц) или обратных с
  $1 Гц$

  Связана с периодом T формулой:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Основные характеристики колебательного движения
(продолжение)

- *Циклическая или круговая частота ω («омега») – величина, которая связана с линейной частотой ν формулой:*

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

  - *Измеряется в СИ в радианах в секунду (рад/с), т.к. по определению -это скорость изменения угла φ от времени t.*
  - *Круговая частота ω связана с коэффициентом жёсткости k:*

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{m/k}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 m$$

- *Фаза колебаний φ («фи») характеризует состояние колеблющейся материальной точки в любой момент времени:*

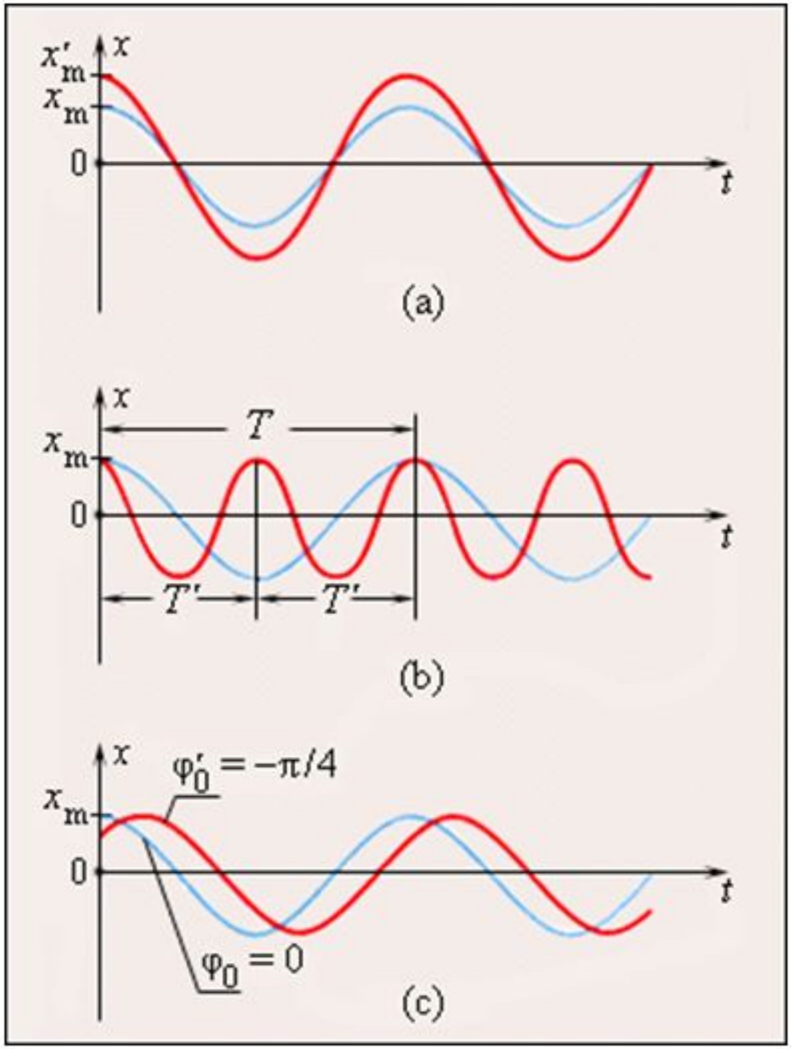
$$\varphi = \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

где φ_0 - начальная фаза колебаний (фаза при $t_0=0$).

- *Фаза по смыслу является углом отклонения от положения равновесия и измеряется в угловых градусах (внесистемная единица) и в СИ – в радианах (рад).*

- *Амплитуда A_0 и начальная фаза φ_0 колебаний определяются начальными условиями движения (положением материальной точки в момент времени $t_0 = 0$).*

Пример на изменение характеристик колебательного движения



Во всех трех случаях для **синих** кривых $\varphi_0 = 0$:

$$\boxed{x = A_0 \cos(\omega t) = x_m \cos(\omega t)}$$

а – красная кривая отличается от синей **только** бóльшей амплитудой ($x'_{max} > x_{max}$);

b – красная кривая отличается от синей **только** значением периода ($T' = T / 2$);

с – красная кривая отличается от синей **только** значением начальной фазы:

$$\varphi'_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Основные характеристики колебательного движения

(ещё продолжение)

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- *Скорость движения материальной точки* $\mathbf{v}$.
  - *Измеряется в СИ в метрах в секунду (м/с).*
  - *Выражение для* $\mathbf{v}$ *найдём путем дифференцирования* x*:*

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = A_0\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

  - *Скорость максимальна, если:* $\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$ *Тогда*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\max} = A_0\omega_0$$

- *Ускорение колеблющейся материальной точки* a.
  - *Измеряется в СИ в метрах в секунду в квадрате (м/с²).*
  - *Выражение для нахождения* a *найдём путем дифференцирования* $\mathbf{v}$*:*

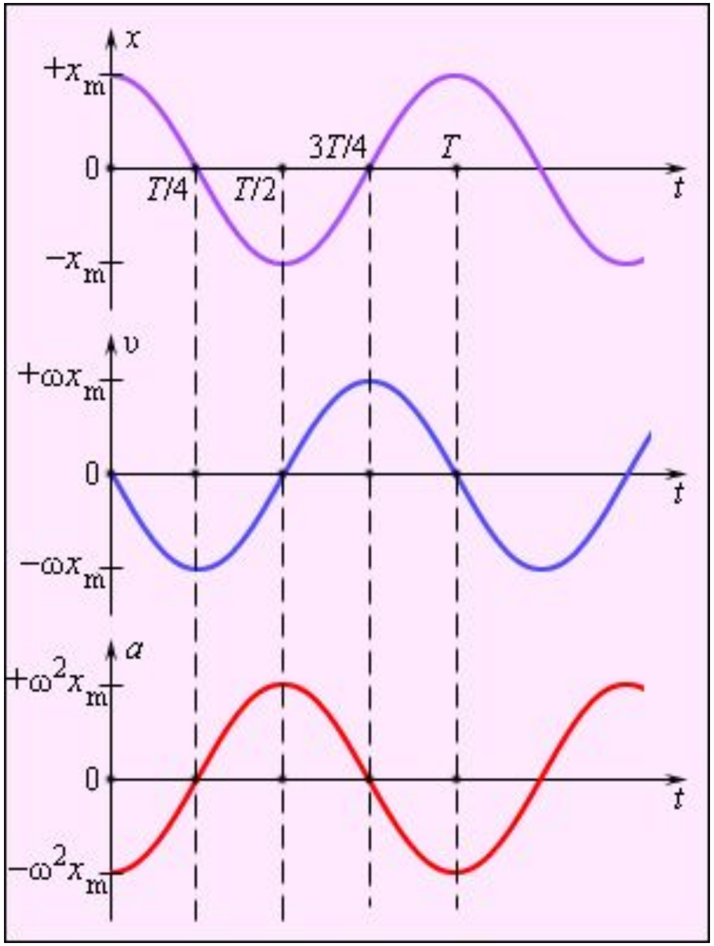
$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -A_0\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

  - *Ускорение – это вторая производная по времени от смещения:* $a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = x''$
  - *Ускорение максимально, если* $\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -1$ *Тогда*

$$a = a_{max} = A_0\omega_0^2$$

+7

Графики колебательного движения



$$x = A_0 \cos(\omega t) = x_m \cos(\omega t)$$

График координаты x (t) тела, совершающего гармонические колебания

$$x_{max} = A_0$$

График скорости v(*t*) тела, совершающего гармонические колебания

$$v = v_{max} = A_0 \omega_0$$

График ускорения *a*(*t*) тела, совершающего гармонические колебания

$$a = a_{max} = A_0 \ {}_0^2$$

Энергия гармонического колебания

- *Полная энергия* гармонического колебания *E* определяется *суммой кинетической и потенциальной энергий*:

$$E = E_к + E_п = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

- *Подставляя в эту формулу*
  - *выражение для скорости* $\mathbf{v}$:

$$v = \frac{dx}{dt} = A_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

  - *выражение для смещения* $\mathbf{x}$:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

  - *и, учитывая, что* $k = m\omega_0^2$.

- *получаем:*

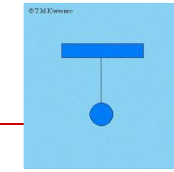
$$E = \frac{1}{2} mA_0^2\omega_0^2[\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} mA_0^2\omega_0^2$$

так как: $\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$ *(основное тригонометрическое тождество)*

- *Из формулы:* $E = \frac{1}{2} mA_0^2\omega_0^2$ *следует, что энергия гармонического колебания прямо* [illegible] *на квадрату амплитуды* A^2*: чем больше "размах" колебаний, тем больше и их энергия.*
- *Кроме того, энергия прямо пропорциональна квадрату круговой частоты колебаний* ω_0.

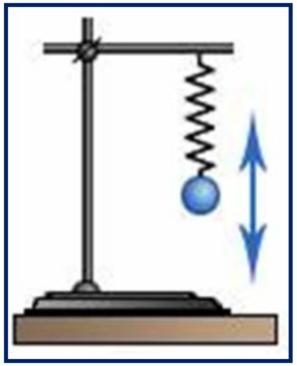
$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

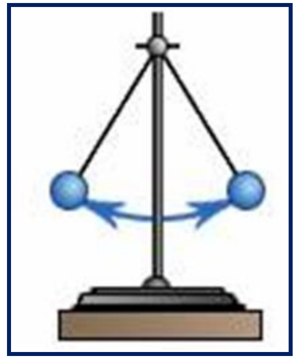
Маятники

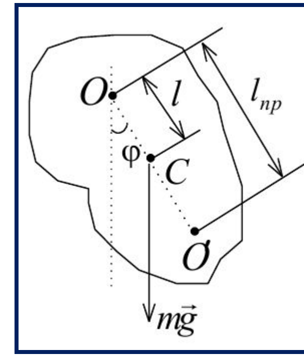


Маятник – это тело массой ***m***, , подвешенная на нити или пружине и совершающее гармонические колебания.

Пружинный маятник	Математический маятник	Физический маятник







Пружинный маятник – это материальная точка массой ***m***, подвешенная на абсолютно упругой пружине жесткостью ***k*** и совершающая гармонические колебания под действием упругой силы.

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити длиной ***l***, на которой подвешена материальная точка массой ***m***.

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Физический маятник - это твердое тело массой ***m***, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку *O*, не совпадающую с центром масс ***C*** тела

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}=2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}} \qquad \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

где величину $I/ml=l_{np}$ называют ***приведенной длиной*** физического маятника. Она **численно равна** длине такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника. **+5**

- На примере движения пружинного маятника – материальной точки массой m, закреплённой на **ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ** пружине жёсткостью k (Рис.1), рассмотрим различные виды колебаний в зависимости от сил, которые действуют вдоль оси Ox на данное тело массой m.

Гармонические колебания

- Гармонические колебания – колебания, при которых наблюдаемая величина изменяется во времени:
  - с постоянной частотой ν по закону синуса или косинуса и
  - постоянной амплитудой A_0.

Рассмотрим случай действия на тело массой m только силы упругости $F_{упр}$ (Рис.1).

- Если пружину оттянуть (на рисунке) или сжать (аналогично, но в другую сторону) на расстояние x от положения равновесия, то возникает сила упругости $F_{упр}$, величина и направление которой определяется законом Гука:

$$F_{упр} = -k \cdot x$$

Знак "минус" показывает, что сила упругости всегда направлена в сторону, противоположную направлению смещения x, т.е. к положению равновесия.

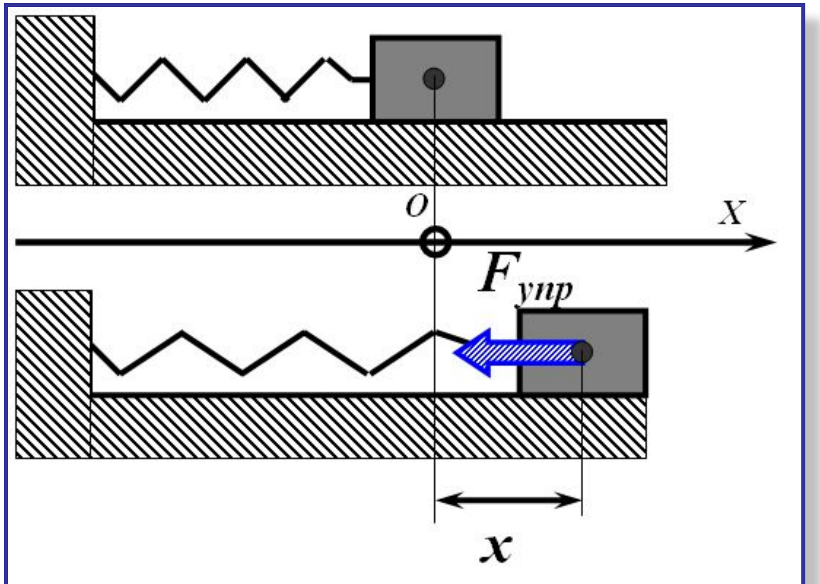


Рис. 1. Силы, действующие на пружинный маятник при **гармонических** колебаниях.

Гармонические колебания
(продолжение)

- *Для данного случая второй закон Ньютона в проекции на ось Ox:*

$$ma_x = F_{пр\,x} = -k \cdot x$$

- Вспомним, что ускорение – это вторая производная по времени от смещения x:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$$

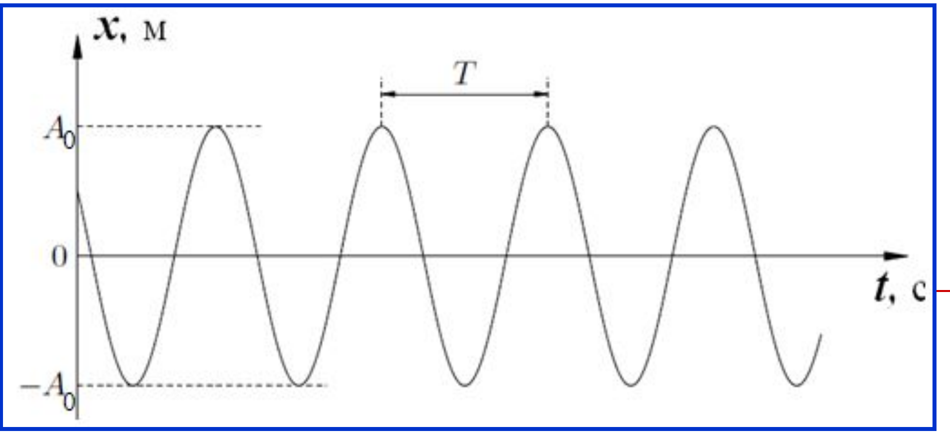
- Получаем уравнение: $$mx'' = -k \cdot x \Leftrightarrow mx'' + k \cdot x = 0$$

- Разделим каждое слагаемое на m и вспомним, что $k = \omega_0^2 m$,

где ω_0 – собственная круговая частота гармонического колебания.

- Получилось дифференциальное уравнение второй степени: $$x'' + \omega^2 x = 0$$
решением которого является: $$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- График гармонического колебания – синусоида, по которой можно определить смещение x колеблющейся точки в любой момент времени t (рис.2).



Тут φ_0 не равно 0

Затухающие колебания

- *Затухающие колебания – колебания, при которых:*
  - *наблюдаемая величина изменяется во времени с постоянной (!)*

частотой ν (круговой частотой ω) по закону синуса или косинуса, но

  - *амплитуда колебания A всё время уменьшается.*
- *В данном случае на тело массой m вдоль оси Ox действуют уже две силы:*
  - *сила упругости $F_{упр}$*
  - *сила трения $F_{тр}$.*

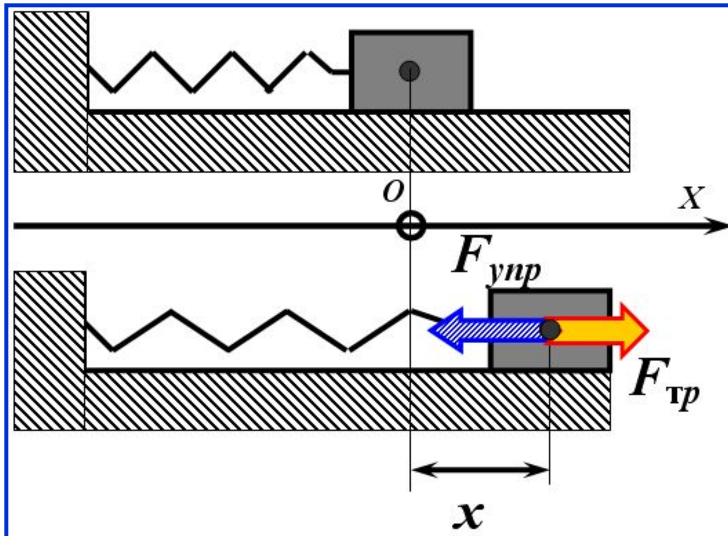


Рис. 3. **Силы**, действующие на пружинный маятник, при **затухающих** колебаниях.

- *Сила трения $F_{тр}$ пропорциональна скорости колебания $\mathbf{v}$ и направлена в сторону, противоположную скорости:*

$$F_{тр} = -r\mathbf{v} = -r\frac{dx}{dt} = -rx'$$

- *Для данного случая второй закон Ньютона в проекции на ось Ox:*

$$ma_x = F_{упр\,x} + F_{тр\,x} = -kx - rx'$$

Затухающие колебания (продолжение)

- *Учтём*, что: $k = \omega_0^{\,2} m$

- Тогда *при сокращении* каждого слагаемого на *m и переносе всех членов влево* от знака равенства, получим: $x'' + \frac{r}{m}x' + \omega_0^{\,2}x = 0$

- Проведем *замену*: $\frac{r}{m} = 2\beta$,

где β называется *коэффициентом затухания* - это основная характеристика *затухающего* колебания, измеряется *в обратных секундах* ($с^{-1}$),

- Получаем конечный вид *дифференциального уравнения второй степени*:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^{\,2}x = 0$$

- Решением его является формула: $x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) = A(t)\sin(\omega t + \varphi_0)$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – *собственная круговая частота затухающего* колебания.

Характеристики затухающего колебания

График затухающего колебания – синусоида (рис.4), амплитуда которой A(t) уменьшается по экспоненте:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Коэффициент затухания β характеризует **степень затухания** колебаний.

- *Декремент затухания δ («дельта») – отношение значений двух последовательных амплитуд, разделённых периодом колебания:*

$$\delta = \Delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

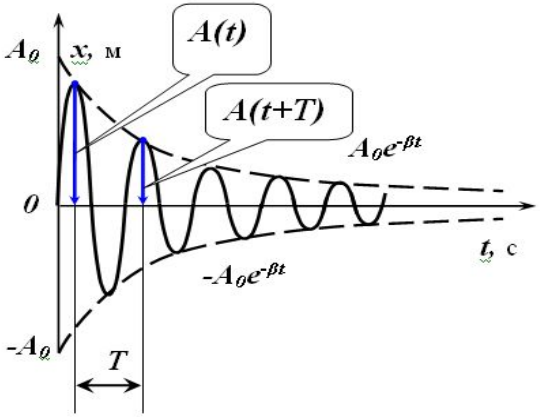


Рис.4. График затухающего колебания.

Логарифмический декремент затухания λ («лямбда») – натуральный логарифм декремента затухания:

$$\lambda = ln\delta = ln\frac{A(t)}{A(t+T)}$$

Логарифмический декремент затухания применяется чаще, т.к. он связан с периодом T и коэффициентом затухания β:

$$\lambda = ln\delta = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = ln e^{\beta T} = \beta T$$

$$\boxed{\lambda = \beta T}$$

- *Обе характеристики – безразмерные величины.*

Характеристики затухающего колебания
(продолжение)

- *Время релаксации* τ (*«тау»*) – это время, за которое амплитуда уменьшается в *е* раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e \Rightarrow \tau = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e^1 \Rightarrow \beta\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$$

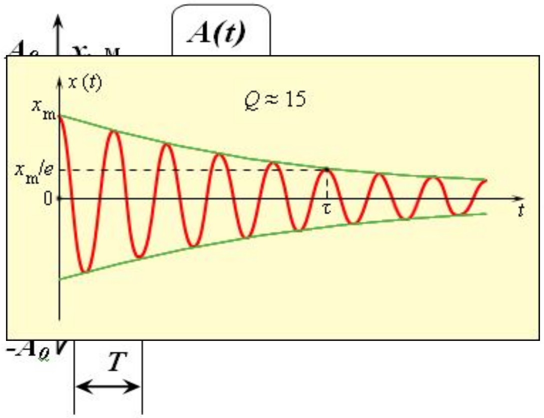


Рис.4. График затухающего колебания.

- *Коэффициент затухания* β (*«бета»*) – величина, обратная промежутку времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в *е* раз:

$$\beta = \frac{1}{\tau}$$

Измеряется в СИ в ***Герцах*** *(Гц) или* ***обратных секундах*** *(с*$^{-1}$*)*

- За время релаксации τ система успевает сделать N_e колебаний:

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau\beta}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

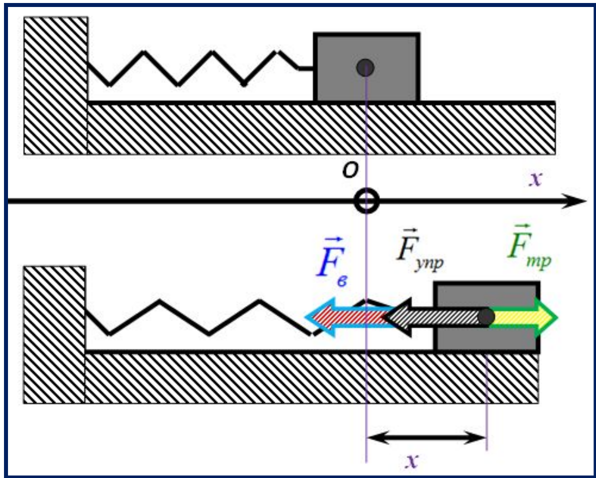
Значит, **логарифмический декремент затухания** λ обратно пропорционален по величине числу колебаний, за которые амплитуда колебаний уменьшается в е раз:

$$\lambda = \frac{1}{N_e}$$

Добротность Q системы - величина, характеризующая уменьшение полной энергии ΔE системы по формуле: $\Delta E = -2\pi E/Q$, где знак минус показывает, что энергия уменьшается.
Бо́льшим значениям *Q* соответствует **слабое затухание колебаний**. **Добротность** пропорциональна числу колебаний за время релаксации N_e и обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания λ:

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e}$$

+4



Вынужденные колебания

- *Вынужденные колебания* – *колебания, при которых наблюдаемая величина изменяется во времени:*
  - *с постоянной частотой* ν *(круговой частотой* ω*), задаваемой внешней вынуждающей силой* $F_в$.

- *В данном случае на тело массой* m *вдоль оси Ох действуют три силы:*
  - *сила упругости* $F_{упр}$
  - *сила трения* $F_{тр}$.
  - *вынуждающая сила* $F_в$*, которая действует периодически с круговой частотой* $\omega_в$*:*

$$F_в = F_0 \sin\omega_в t$$

- *Для данного случая второй закон Ньютона в проекции на ось Ох:*

$$ma_x = F_{упр\,x} + F_{тр\,x} + F_в + F$$

- *Учтём, что:* $k = \omega_0^2 m$ *и* $\frac{r}{m} = 2\beta$

- *При сокращении каждого слагаемого на* m *и переносе всех членов влево от знака равенства, получим:*

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega_в t$$

Вынужденные колебания (продолжение)

- Проведём замену: $\dfrac{F_0}{m} = f_0$ удельная вынуждающая сила
- Получаем конечный вид дифференциального уравнения второй степени:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0 \sin\omega_в t$$

- Решение такого уравнения состоит из двух частей-решений: $x = x_1 + x_2$:
  - Решение x_1 описывает неустановившейся режим колебаний, когда их амплитуда увеличивается во времени (рис.5).
  - Решение x_2 описывает установившийся режим колебаний.

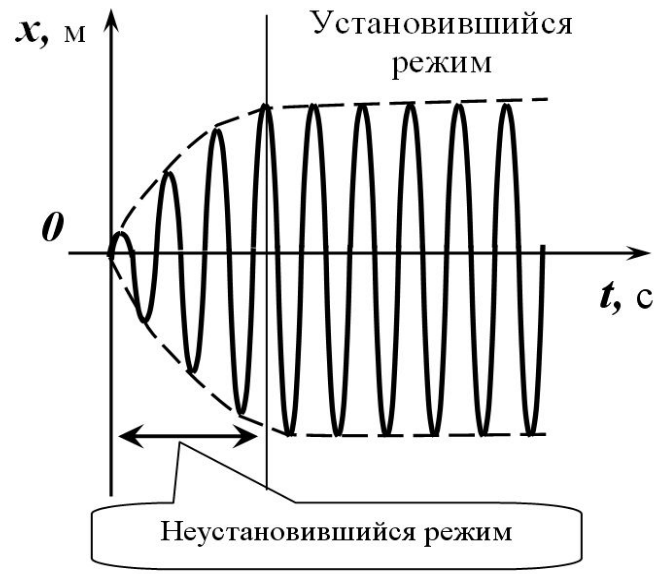


Рис. 5. График **вынужденного** колебания.

- В установившемся режиме вынужденных колебаний смещение x_2 подчиняется гармоническому закону и происходит с частотой $\omega_в$.

$$x = A\sin(\omega_в t + \varphi_0)$$

Резонанс

- *Амплитуда **A** вынужденных колебаний зависит от многих разобранных выше параметров:*
  - *частоты собственных колебаний ω_0 ,*
  - *коэффициента затухания β,*
  - *силы f_0 ,*
  - *частоты вынуждающей силы $\boldsymbol{\omega}_в$.*

- *Амплитуда **A** будет максимальна, если частота $\boldsymbol{\omega}_в$ действия вынуждающей силы определяется формулой:*

$$\omega_в = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

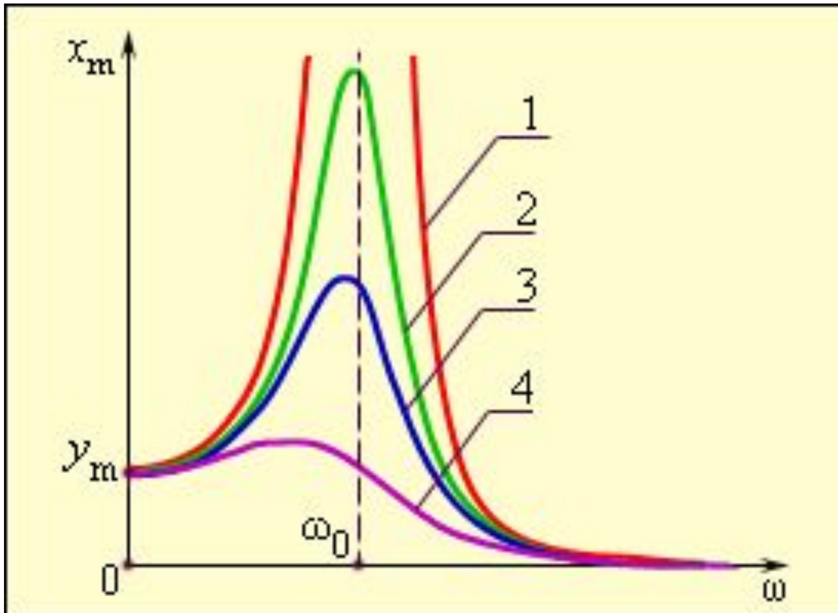
- *При этом наблюдается явление резонанса.*

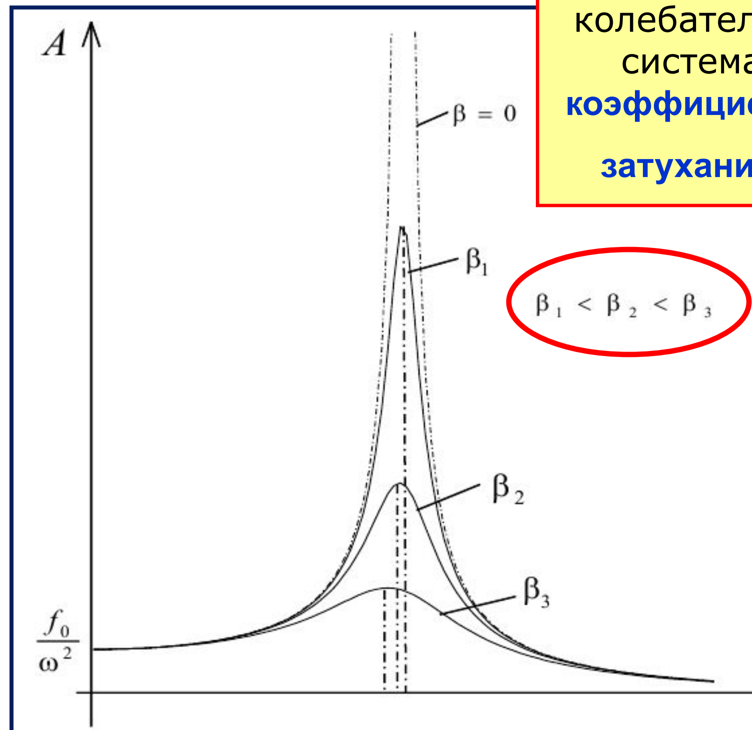
- Резонанс – это резкое возрастание амплитуды *A* вынужденных колебаний при совпадении частоты действия вынуждающей силы $\omega_в$ с частотой системы ω, т.е.:

$$\omega_в = \omega \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Если бы затухание в системе отсутствовало ($\beta = 0$), то резонанс наступал бы при условии: $\omega_0 = \omega_в$, где ω_0 – собственная частота гармонического колебания. При этом амплитуда достигала бы бесконечно большого значения.

График резонанса





колебательная система **с коэффициентом затухания** β

Резонансные кривые при различных уровнях затухания:

1 – колебательная система **без трения**:

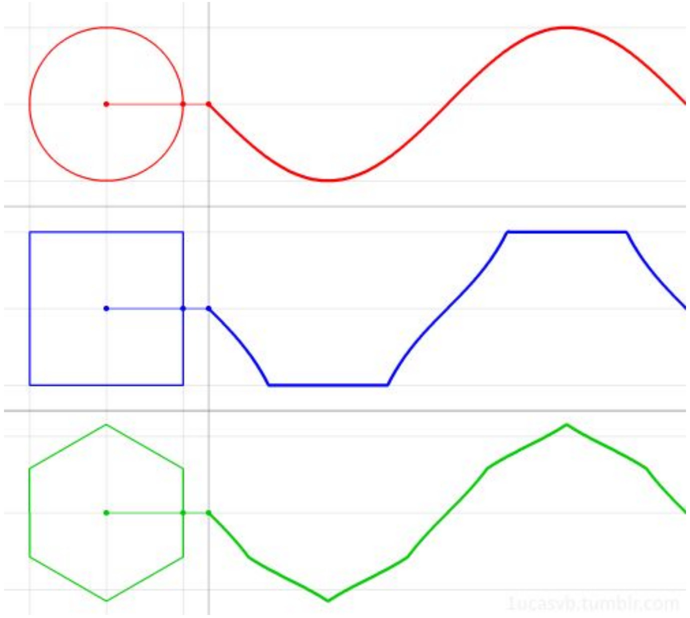
при резонансе **амплитуда** x_{max} вынужденных колебаний **неограниченно возрастает**;

2, 3, 4 – реальные резонансные кривые для колебательных систем с различной добротностью: $Q_2 > Q_3 > Q_4$.

На низких частотах ($\omega << \omega_0$) $x_{max} \approx f_{max}$. На высоких частотах ($\omega >> \omega_0$) $x_{max} \to 0$

доцент Крылов Андрей Борисович

Спасибо за внимание!



Зависимость смещения от времени при разных колебаниях