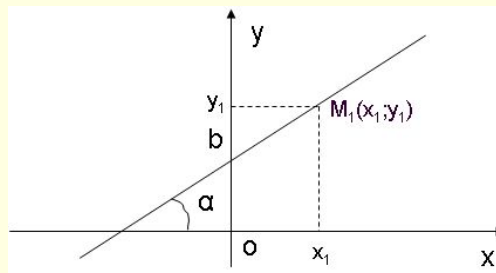
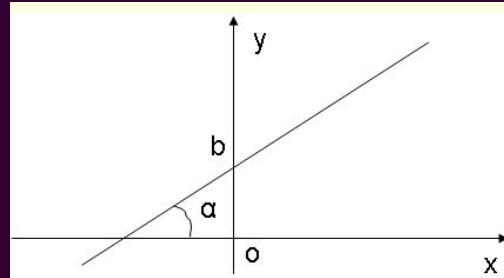


$$y=kx+b$$

Различные виды уравнения прямой на ПЛОСКОСТИ

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

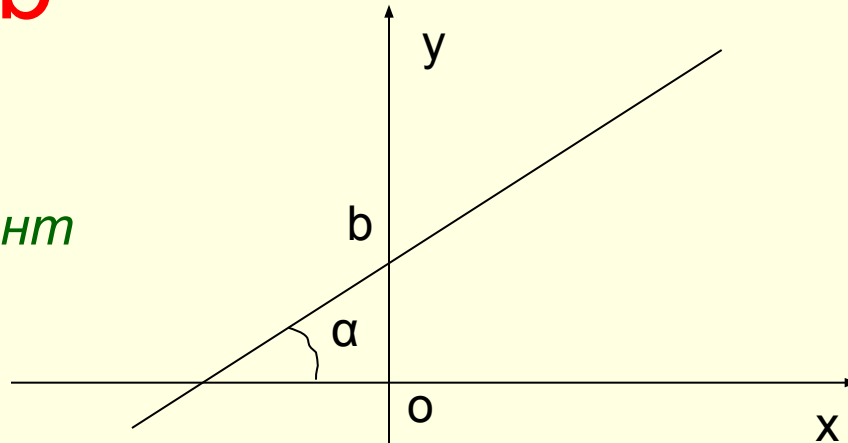


$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

■ $y = kx + b$

- k - угловой коэффициент прямой



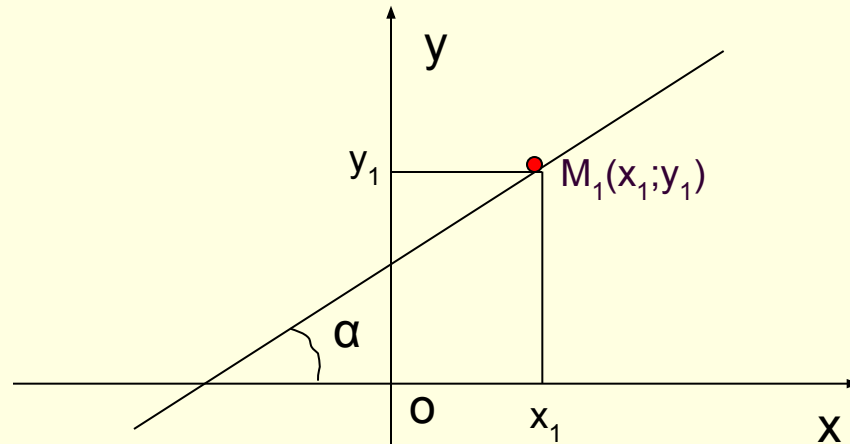
$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

α - угол наклона прямой к оси Ox , где

$$0 \leq \alpha < \pi \quad \alpha \neq \pi/2$$

b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy

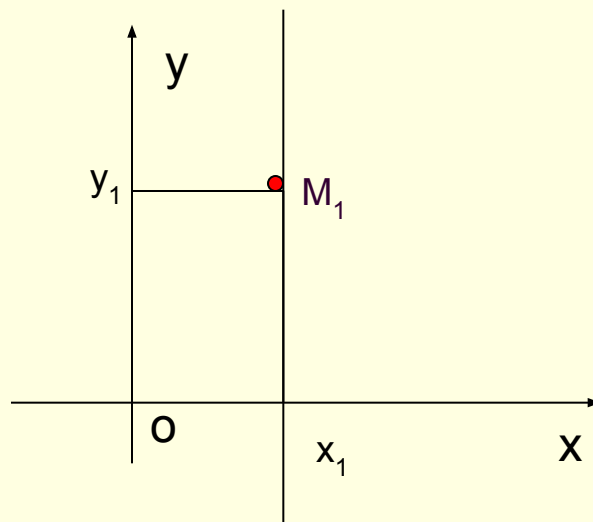
Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ с заданным угловым коэффициентом k , при $\alpha \neq \pi/2$



$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$, но не имеющей углового коэффициента, при $\alpha = \pi/2$

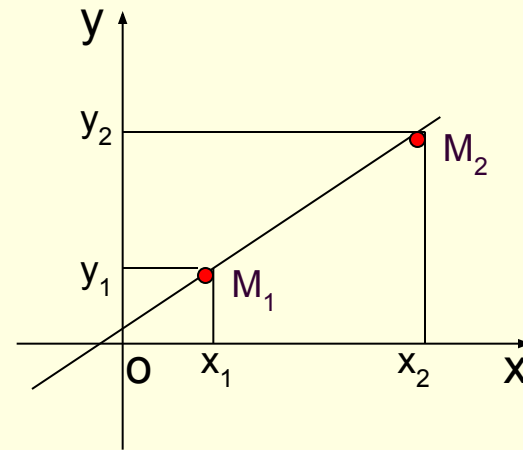
$$X = X_1$$



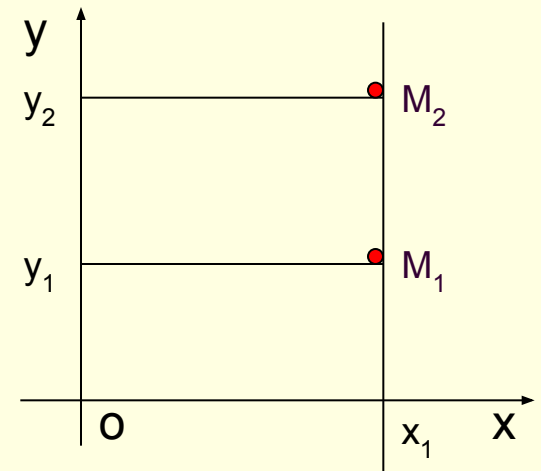
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

если $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$

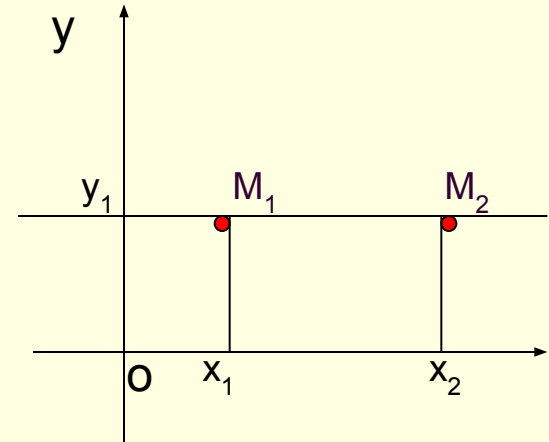


$x = x_1$, если $x_1 = x_2$, но $y_1 \neq y_2$



Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$y = y_1$, если $x_1 \neq x_2$, но $y_1 = y_2$



Общее уравнение прямой на плоскости:

- $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – числа $A^2 + B^2 \neq 0$
- Если $A=0$ $B \neq 0$ уравнение прямой принимает вид: $y = y_1$, прямая параллельна оси Ox , угловой коэффициент равен 0;
- Если $A \neq 0$ $B=0$ уравнение прямой принимает вид: $x = x_1$, прямая параллельна оси Oy , углового коэффициента не имеет;
- Если $A=0$ $B=0$, то уравнение прямой принимает вид:
- $y = kx + b$, где: $k = A / B$

1. Угловым коэффициентом прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

2. Острый угол φ между прямыми, заданными уравнениями

- $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$
вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$

3. Точка пересечения прямых, заданных общими уравнениями

- $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$,
находится как решение системы:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

4. Координаты x_0, y_0 середины отрезка M_1, M_2
между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$$x_0 = \frac{x_2 + x_1}{2}, \quad y_0 = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

5. Расстояние $|M_1M_2|$ между точками
 $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

6. *Необходимое и достаточное условие параллельности двух прямых*

- *Необходимое и достаточное условие параллельности двух прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2 :*

■ $k_1 = k_2$

7. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых

- *Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2 :*

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Примеры:

- Пример 1. Дано общее уравнение прямой:

$$2x - 3y + 12 = 0$$

- Найти угловой коэффициент прямой.
- *Решение.* Решим уравнение относительно y получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$3y = 2x + 12 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + 4$$

- Отсюда заключаем: $k = 2/3$ - угловой коэффициент прямой.
- *Ответ:* $2/3$

Примеры:

- Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;3)$ и составляющей с осью Ox угол 135° .
- *Решение.* Так как в данном случае $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$ и $x_1 = -1$, $y_1 = 3$, то уравнение прямой будет иметь вид:
$$y - 3 = -1(x + 1)$$
- Отсюда получаем: $y = -x + 2$ – искомое уравнение прямой.
- *Ответ:* $y = -x + 2$

Примеры:

- **Пример 3.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых:

$$x + y - 1 = 0 \quad 2x + 3y + 4 = 0$$

- параллельно прямой:

$$3x - y + 7 = 0$$

- *Решение.* а) Найдем точку пересечения двух прямых, для этого, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -6 \end{cases}$$

- Следовательно, искомая точка пересечения – $M_1(7;-6)$
- б) Составим уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(7;-6)$ параллельно прямой:

$$3x - y + 7 = 0$$

Примеры:

- Найдем угловой коэффициент k_1 прямой: $3x = y + 7 \equiv 0$
 $y = 3x + 7 \Rightarrow k_1 = 3$

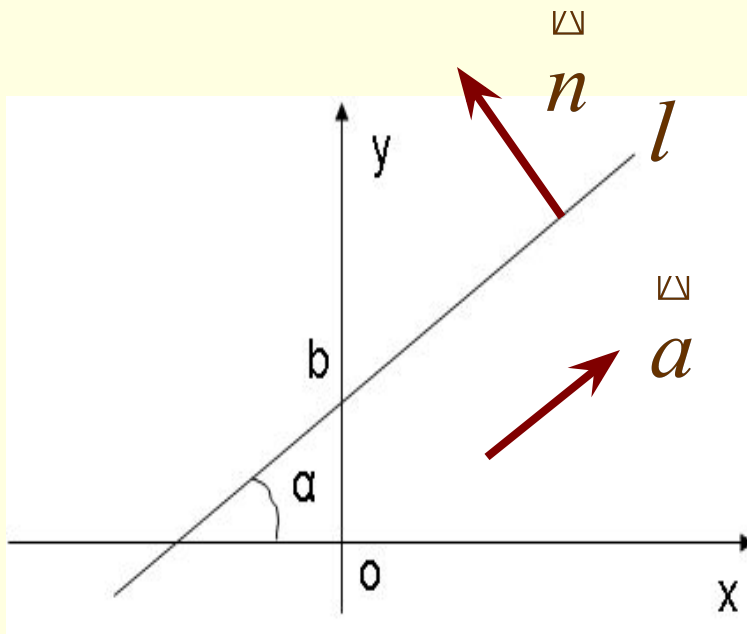
- Из условия параллельности двух прямых находим угловой коэффициент искомой прямой: $k_1 = k_2 = 3$

- Пользуясь формулой: $y - y_1 = k(x - x_1)$, находим уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(7; -6)$ с угловым коэффициентом $k_2 = 3$:

$$y + 6 = 3(x - 7) \Rightarrow 3x - y - 27 = 0.$$

- *О т в е т:* $3x - y - 27 = 0.$

Нормальный вектор прямой



Если вектор \underline{n} перпендикулярен направляющему вектору \underline{a} прямой l , то он называется **нормальным вектором прямой l** .

Прямая задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

Тогда вектор $\underline{n} = (A, B)$ является нормальным вектором этой прямой.

З

А

Нормальный вектор прямой

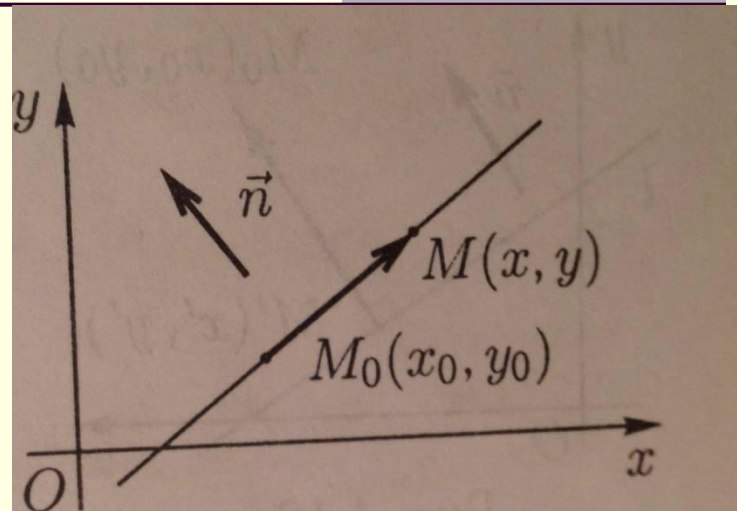
Д

Найти уравнение
прямой l , которая проходит
через точку $M_0(x_0, y_0)$
и имеет нормальный вектор

А

Ч

$$\vec{n} = (A, B)$$



А

Решение. Векторы $\vec{MM}_0 = (x - x_0, y - y_0)$, \vec{n}
перпендикулярны, их скалярное произведение равно
нулю: $(\vec{n} \cdot \vec{M}_0M) = 0$. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Это и есть искомое уравнение.

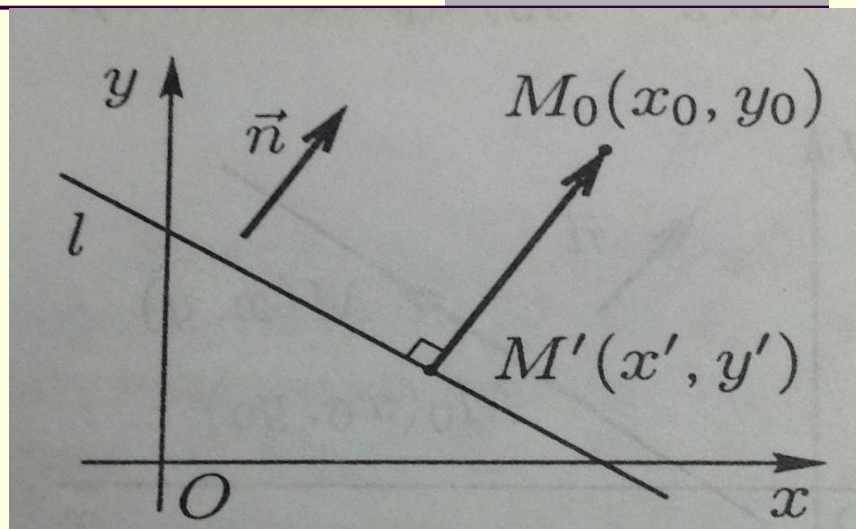
Расстояние от точки до прямой

Теорема. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

вычисляется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Расстояние от точки до прямой

Найти расстояние от точки $M_0(1, 5)$ до прямой, заданной общим уравнением $3x - 4y - 3 = 0$

Решение.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4.$$

Ответ: 4.

Кривые второго порядка

ОКРУЖНОСТЬ

Определение 1. *Окружность* – геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от некоторой точки, называемой центром.

Каноническое уравнение: $x^2 + y^2 = r^2$. (1)

Свойства:

1. Точка $O(0;0)$ – центр окружности;
2. r - радиус;
3. Ox , Oy - оси симметрии;
4. График изображен на рис.1.

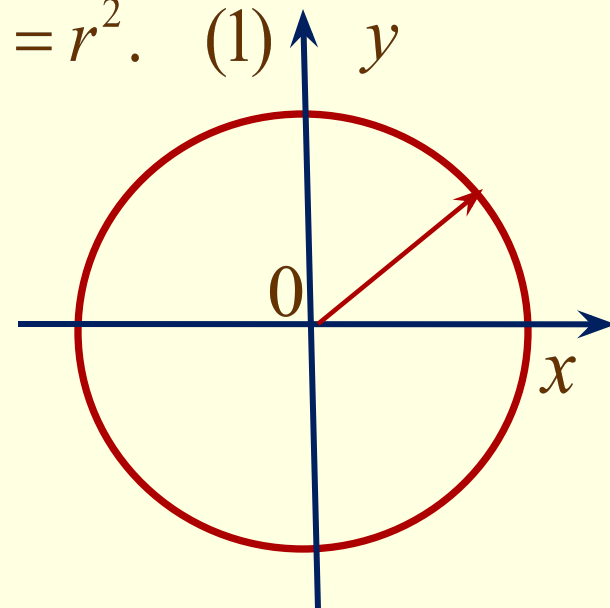


рис.1.

Кривые второго порядка

Окружность, задаваемая уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (2)$$

обладает свойствами:

1. Точка $O_1(x_1, y_1)$ – центр окружности;
2. r – радиус;
3. Прямые $x = x_0, y = y_0$ – оси симметрии;
4. График окружности (2) изображен на рис.2 и получается из окружности с уравнением (1) параллельным переносом на вектор $\vec{OO_1}$.

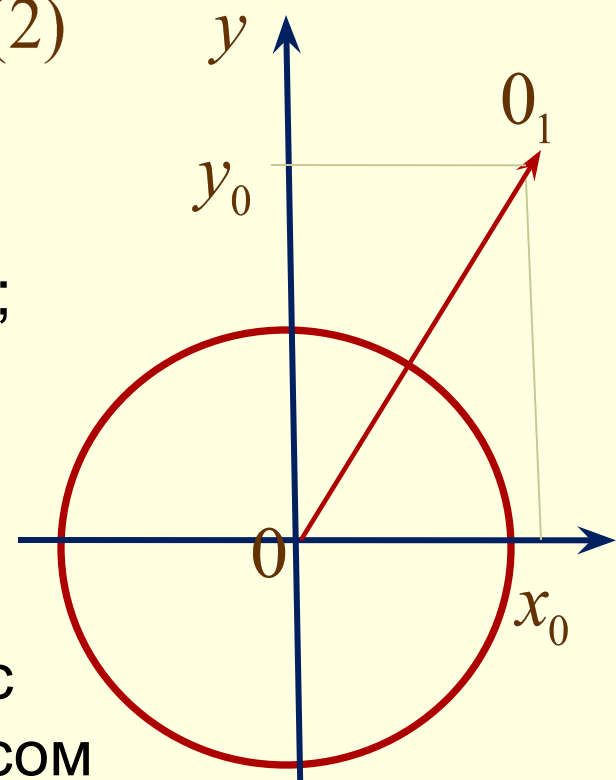


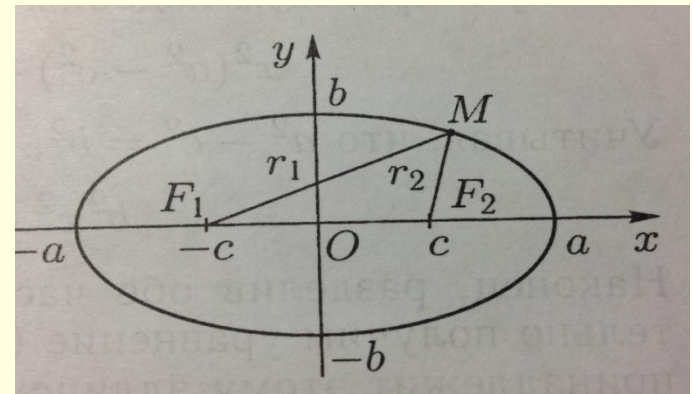
рис.2.

Кривые второго порядка

Определение. Эллипс – геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Эллипс – геометрическое место точек на плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \neq b) \quad (1)$$

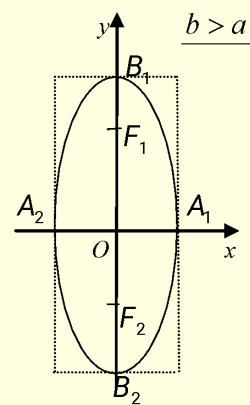
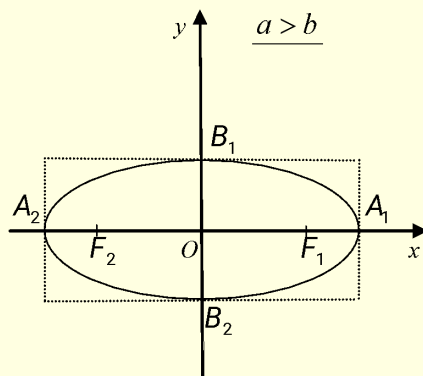


При $a = b$ уравнение (1) является уравнением окружности радиуса a с центром в начале координат.

Кривые второго порядка

■ Свойства:

- 1. Центр эллипса – точка $O(0;0)$;
- 2. Вершины эллипса – точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$
- 3. $|A_1A_2| = 2a$, $|B_1B_2| = 2b$ – оси эллипса;
- 4. a, b – полуоси эллипса;
- 5. Оси симметрии – Ox , Oy ;
- 6. Фокусы эллипса – точки, $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, если $a > b$;
 $F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, если $a < b$;



Кривые второго порядка

Эллипс, задаваемый уравнением $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, a \neq b$ обладает свойствами:

1. Центр эллипса – точка $O_1(x_0; y_0)$;

2. Вершины эллипса – точки

$$A_1(x_0 + a; y_0), A_2(x_0 - a; y_0), B_1(x_0; y_0 + b), B_2(x_0; y_0 - b);$$

3. $|A_1A_2| = 2a, |B_1B_2| = 2b$ – оси эллипса;

4. a, b – полуоси эллипса;

5. Оси симметрии – прямые $x = x_0, y = y_0$;

6. Фокусы эллипса – точки

$$F_1(x_0 + c; y_0), F_2(x_0 - c; y_0), \text{ где } c = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ если } a > b;$$

$$F_1(x_0; y_0 + c), F_2(x_0; y_0 - c), \text{ где } c = \sqrt{b^2 - a^2}, \text{ если } b > a;$$

Кривые второго порядка

- **Определение.** Гипербола – геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.
- **Каноническое уравнение:**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a) \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (б)$$

Кривые второго порядка

■ Свойства:

1. Вершины:

$$A_1(a;0), A_2(-a;0) \quad - \text{ для гиперболы (а);}$$

$$B_1(0;b), B_2(0;-b) \quad - \text{ для гиперболы (б);}$$

2. Полуоси: a – действительная

$$b \text{ – мнимая} \quad] \quad - \text{ для гиперболы (а);}$$

$$a \text{ – мнимая}$$

$$b \text{ – действительная} \quad] \quad - \text{ для гиперболы (б);}$$

3. Фокусы гиперболы: точки

$$F_1\left(\sqrt{a^2 + b^2};0\right), F_2\left(-\sqrt{a^2 + b^2};0\right) \quad - \text{ для гиперболы (а),}$$

$$F_1\left(0;\sqrt{a^2 + b^2}\right), F_2\left(0;-\sqrt{a^2 + b^2}\right) \quad - \text{ для гиперболы (б);}$$

Кривые второго порядка

■ Свойства:

4. Оси симметрии – Ox , Oy .

5. Асимптоты: прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$;

6. График изображен на рис. 4.

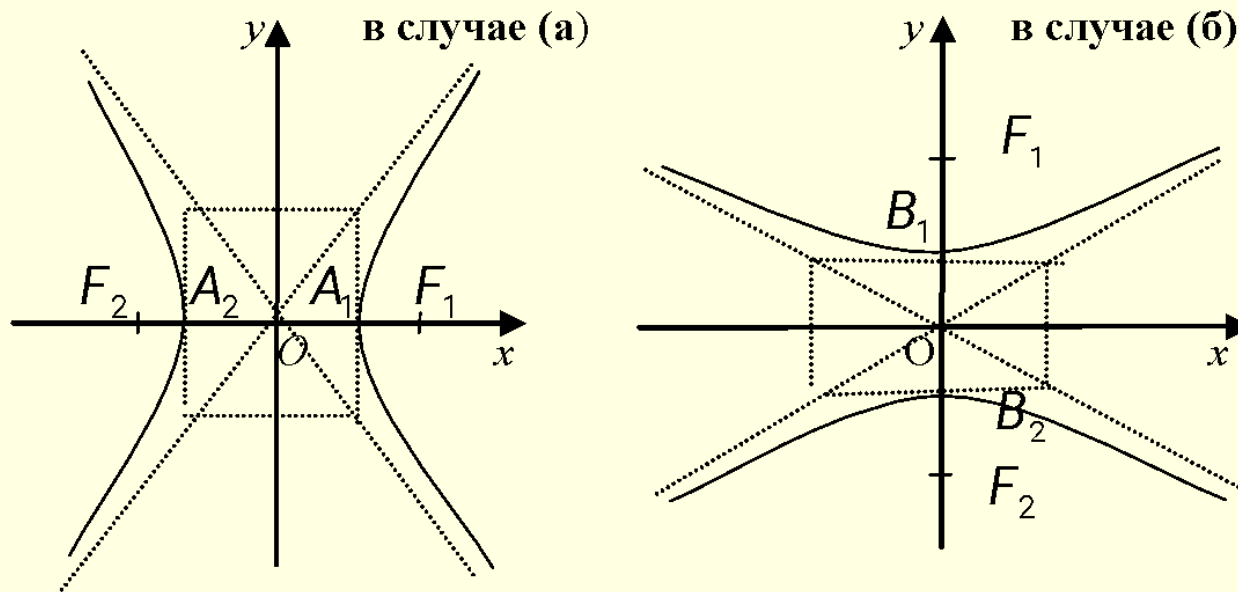


Рис.4

Кривые второго порядка

Гиперболы, задаваемые уравнениями:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

Вершины:

$A_1(x_0 + a; y_0)$, $A_2(x_0 - a; y_0)$ – для гиперболы (а);

$B_1(x_0; y_0 + b)$, $B_2(x_0; y_0 - b)$ – для гиперболы (б);

2. Полуоси: a – действительная
 b – мнимая] – для гиперболы (а);

a – мнимая
 b – действительная] – для гиперболы (б);

3. Фокусы гиперболы: точки

$F_1(x_0 + \sqrt{a^2 + b^2}; y_0)$, $F_2(x_0 - \sqrt{a^2 + b^2}; y_0)$ – для (а),

$F_1(x_0; y_0 + \sqrt{a^2 + b^2})$, $F_2(x_0; y_0 - \sqrt{a^2 + b^2})$ – для (б);

4. Оси симметрии: прямые $x = x_0$, $y = y_0$.

5. Асимптоты:

прямые $y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$ и

Кривые второго порядка

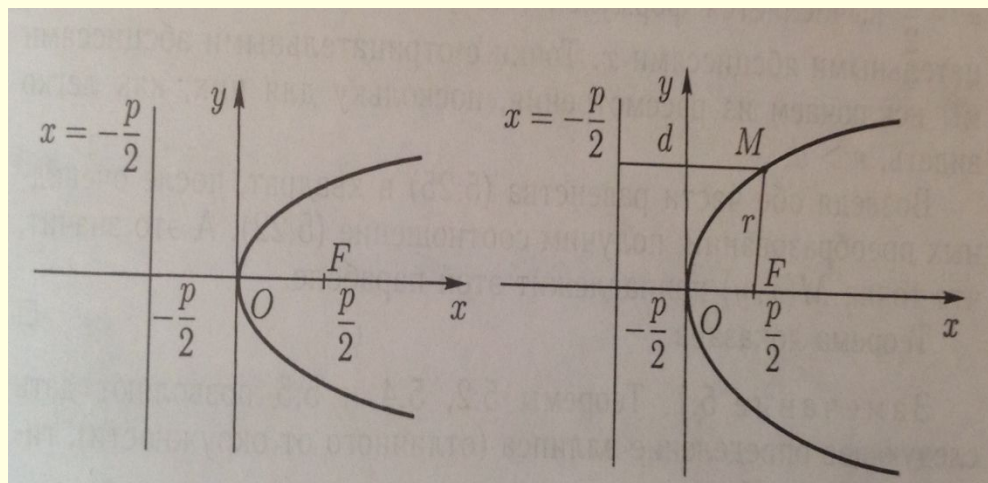
Определение. *Парабола* – геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение:

$$y^2 = 2px \quad \text{или} \quad x^2 = 2py$$

где $p > 0$ некоторое число, называемое *параметром параболы*.

Ось абсцисс Ox является *осью симметрии параболы*.



Кривые второго порядка

Свойства:

1. Вершина: $O(0;0)$;
2. Фокусы параболы: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ или $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$
3. Директриса: $x = -\frac{p}{2}$ или $y = -\frac{p}{2}$

Параболы, задаваемые уравнениями $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

или $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$,

где p некоторое число, называемое параметром параболы,

обладают свойствами:

Кривые второго порядка

1. Вершина: точка $O_1(x_0; y_0)$
2. Фокусы параболы: $F\left(x_0 + \frac{p}{2}; y_0\right)$ или $F\left(x_0; \frac{p}{2} + y_0\right)$
3. Директриса: $x = x_0 - \frac{p}{2}$ или $y = y_0 - \frac{p}{2}$
4. Оси симметрии: $y = y_0$ или $x = x_0$.

Кривые второго порядка

Уравнение второй степени $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, (*)

где числа **A** и **C** не равны одновременно нулю, преобразуется к каноническому виду методом выделения полных квадратов и последующим параллельным переносом.

Тип кривой определяется числами **A** и **C**:

- 1) Если $A = C$, то (*) – окружность;
- 2) если $A \neq C$ и $A \cdot C > 0$ то (*) – эллипс;
- 3) если $A \cdot C < 0$, то (*) – гипербола;
- 4) если одно из чисел **A** или **C** равно нулю, то – (*) парабола.