Samarqand davlat universiteti

Raqamli texnologiyalar fakulteti

“Matematik modellashtirish” kafedrasi

Fan: Diskret matematika va matematik mantiq

Mavzu: To‘plamlar va ular ustida amallar. To‘plam Buleani. Dekart ko‘paytma

Rabbimov I.

Samarqand - 2020

To‘plamlar nazariyasining paydo bo‘lishi

Matematikada, diskret matematika, kombinatorika va graflar nazariyasida ham, turli **to‘plamlar** bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Masalan, kutubxonadagi barcha kitoblar to‘plami, lotin harflari to’plami, ot so’z turkumiga tegishli so’zlar to’plami, unli harflar to’plami, undosh harflar to’plami, suvda hayot kechiruvchi tirik organizmlar to‘plami, natural sonlar to‘plami, koinotdagi yulduzlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalar to‘plami va hokazo.

Georg Kantor

To‘plamlar nazariyasiga fan sifatida XIX asrning oxirida matematikani standartlashtirish bo‘yicha o‘z dasturini taklif etgan Kantor tomonidan asos solingan deb hisoblansada, to‘plamlar bilan Kantordan oldinroq Bolsano shug‘ullangan.

Kantor fikricha, istalgan matematik ob’yekt (shu jumladan, to‘plamning o‘zi ham) qandaydir to‘plamga tegishli bo‘lishi shart.

Berilgan xossaga ega bo‘lgan barcha ob’yektlar majmuasi uchun umumiy nomni Kantor to‘plam deb tushungan edi.

1- ta’rif. To‘plamni tashkil etuvchilar shu to‘plamning ***elementlari*** deb ataladi.

To‘plamlar nazariyasida to‘plamning elementlari bir-biridan farqli deb hisoblanadi, ya’ni muayyan bir ***to‘plamning elementlari takrorlanmaydi.***

To‘plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Birinchi holda ***chekli to‘plamga***, ikkinchi holda esa, ***cheksiz to‘plamga*** ega bo‘lamiz.

To‘plamlarni belgilashda, odatda, lotin yoki grek alifbosining bosh harflari, uning elementlari uchun esa alifboning kichik harflari qo‘llaniladi. To‘plamni tashkil etuvchi elementlar figurali qavslar orasiga olinib ifodalanishi mumkin.

Masalan, to‘plamning $a, b, c, \ldots, z$ elementlardan tuzilganligini $A=\{a, b, c, \ldots, z\}$ ko‘rinishda yozish mumkin. Toq natural sonlar to‘plamini B deb belgilasak, uni $B=\{m \mid m=2n-1\}$, bunda n – natural son.

To‘plamlarning aksiomatik nazariyasi haqida tushunchalar

Hozirgi zamon to‘plamlar nazariyasi **aksiomalar** tizimiga asoslangandir. Qandaydir aksiomalarga asoslangan nazariya **aksiomatik nazariya** deb yuritiladi . To‘plamlarning aksiomatik nazariyasida bunday aksiomalar tizimi sifatida standart tizim hisoblangan Sermelo-Frenkel aksiomalari tizimini keltirish mumkin.

Hajmiylik aksiomasi. Ikkita *A* va *B* to‘plamlar faqat va faqat aynan bir xil elementlardan iborat bo‘lsagina tengdir.

Bo‘sh to‘plam aksiomasi. Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam, ya’ni **bo‘sh to‘plam**, mavjud. Bo‘sh to‘plam uchun $\varnothing$ belgisi qo‘llaniladi.

Juftlik aksiomasi. Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun shunday C to‘plam mavjudki, bu to‘plam elementlari faqat A va B to‘plamlardan iboratdir (ya’ni, A va B to‘plamlar C ning yagona elementlaridir). C to‘plam $\{A, B\}$ ko‘rinishda belgilanadi. Ushbu $\{A, B\}$ ifoda A va B ning **tartiblanmagan juftligi** deb yuritiladi. Agar A va B to‘plamlar teng bo‘lsa, u holda C bitta elementdan iboratdir.

Tanlash aksiomasi. Bo‘sh bo‘lmagan va o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar majmuasidagi har bir to‘plamdan bittadan “vakil”-element tanlab, shu elementlar to‘plami C ni tuzish mumkin. X to‘plam shu majmuaning qanday elementi bo‘lishidan qat’iy nazar X va C to‘plamlar faqatgina bitta umumiy elementga ega bo‘ladi.

2- ta'rif. *Chekli to'plamning elementlari soni shu to'plamning **quvvati** deb ataladi.*

Berilgan A to'plamning quvvati $|A|$ ko'rinishda belgilanadi.

1- misol. Ushbu to'plamlar berilgan bo'lsin: $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{a,b,c,d,e\}$, $D=\{1,2,3,\ldots,n\}$, $E=\{m \mid m=2z\}$, $F=\{2,3,5,7,\ldots,p,\ldots\}$, bu yerda n – natural son, z – butun son, p – tub son. Berilgan oltita to'plamdan to'rttasi – A, B, C va D to'plamlar chekli, E va F to'plamlar esa cheksiz to'plamlardir. Bundan tashqari, $|A|=1$, $|B|=2$, $|C|=5$ va $|D|=n$.

Berilgan A to‘plamga a element tegishliligi $a \in A$ yoki $A \ni a$ ko‘rinishda belgilanadi va “a tegishli A” deb o‘qiladi. “Tegishli” iborasining o‘rniga, ba’zan, “qarashli” yoki “ta’luqli” iborasi ham qo‘llaniladi. Qandaydir b ning A to‘plamga tegishli emasligi, ya’ni b ning A to‘plam elementi bo‘lmasligi $b \overline{\in} A$, $b \notin A$ yoki $A \overline{\ni} b$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ to‘plam uchun $4 \in A$, $6 \in A$, va $10 \in A$ (bularni umumlashtirib, $4, 6, 10 \in A$ ko‘rinishda yozish ham mumkin), lekin $12 \notin A$ va $14 \notin A$ (ya’ni, $12, 14 \notin A$).

3- ta’rif. *Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, u holda B to‘plam A to‘plamning **qism to‘plami** deb ataladi.*

B to‘plam A to‘plamning qism to‘plami ekanligi $B \subseteq A$ yoki $A \supseteq B$ ko‘rinishda belgilanadi.

4-ta'rif. *B to'plamning hamma elementlari A to'plamda bor bo'lib, shu bilan birga A to'plamda B ga kirmagan element(lar) ham topilsa, u holda B to'plam A to'plamning* ***xos qism to'plami*** *deb ataladi.*

B to'plam A to'plamning xos qism to'plami bo'lishi $B \subset A$ yoki $A \supset B$ ko'rinishda belgilanadi.

Ta'kidlash kerakki, $A \subset A$ yoki $A \supset A$ deb yozish mumkin emas. Shuning uchun, bu holatni ifodalash maqsadida, har qanday to'plam "o'zi o'zining xosmas qismi" degan iboradan foydalaniladi.

Qandaydir a tasdiqning oʻrinli boʻlishidan boshqa b tasdiqning oʻrinli boʻlishi kelib chiqsa, bu holat $a \Rightarrow b$ deb belgilanadi. Masalan, $(A \subseteq B \text{ va } B \subseteq A) \Rightarrow A = B$.

5-ta'rif. *Agar a va b tasdiqlar uchun $a \Rightarrow b$ va $b \Rightarrow a$ boʻlsa, u holda bu tasdiqlar* ***oʻzaro ekvivalent tasdiqlar*** *deb ataladi.*

a va b tasdiqlarning oʻzaro ekvivalentligi $a \Leftrightarrow b$ deb belgilanadi.

2-misol. $\mathbf{N}$ natural sonlar toʻplami $\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar toʻplamining qism toʻplamini tashkil etadi: $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$.

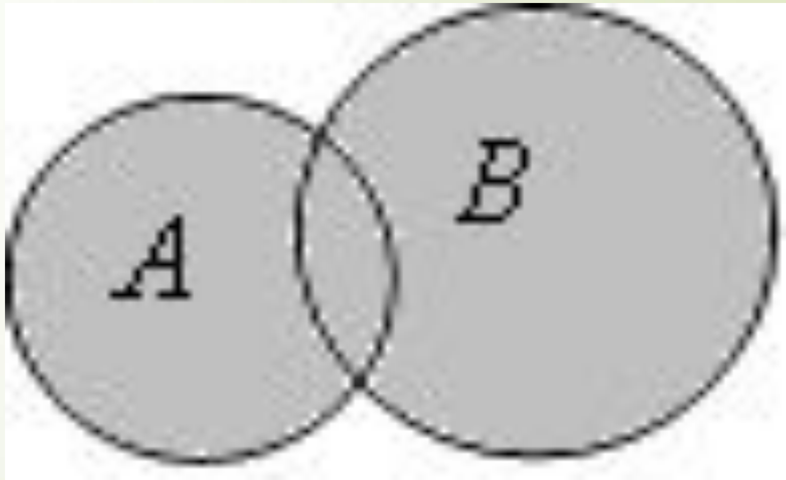
3-misol. Lotin unli harflari to'plami Lotin harflari toʻplamining qism toʻplamidir.

To‘plamlar ustida amallar

6-ta’rif. *Har qanday ikkita to‘plamning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan, tuzilgan to‘plamga shu to‘plamlarning birlashmasi (yoki yig‘indisi) deb ataladi.*

$$A \cup B$$

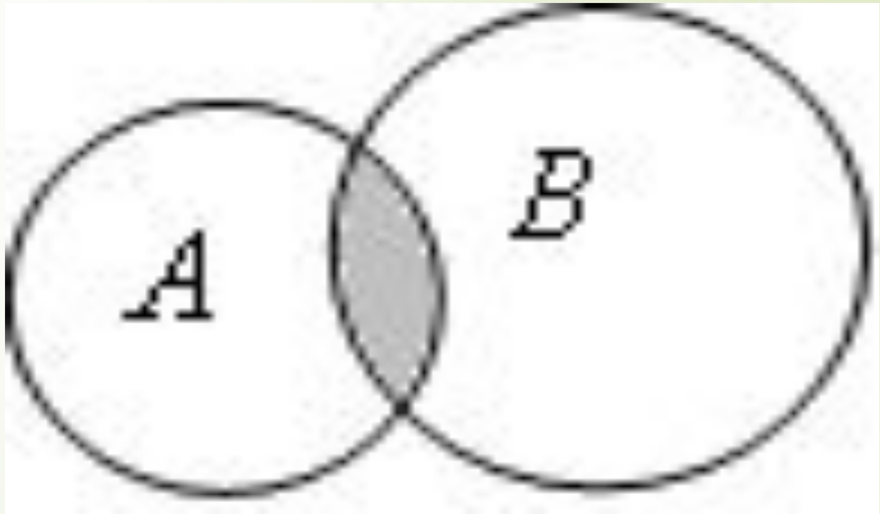
4-misol. Agar $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo‘lsa, u holda $E=A\cup B=\{a,b,c\}$, $E\cup C=\{a,b,c,e,f,k\}$, $C\cup B=\{a,b,c,e,f,k\}$, $A\cup C=\{a,b,e,f,k\}$ bo‘ladi.



1-shakl

7-ta'rif. *Har qanday ikkita to'plamning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to'plamga to'plamlarning kesishmasi (yoki ko'paytmasi) deyiladi.*

$A \cap B$

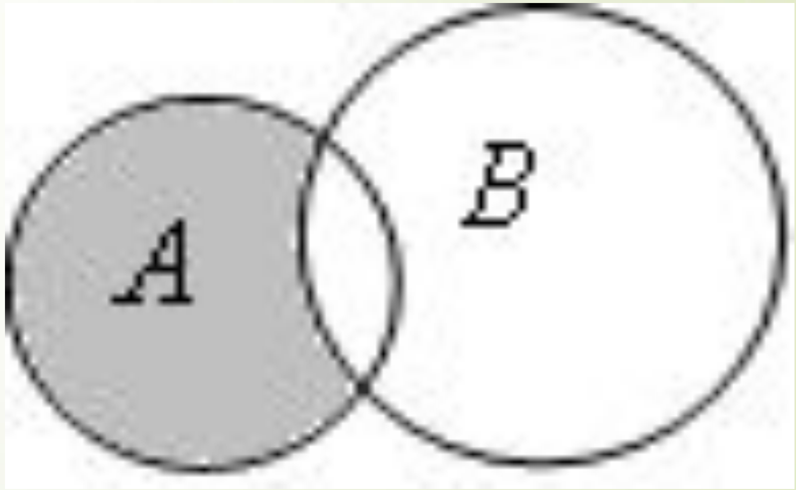


2-shakl

5-misol. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo'lsa, u holda $D=A\cap B=\{a,b,c\}$, $D\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $D\cap B=\{a,b,c\}$ bo'ladi.

8-ta'rif. *A to'plamning B to'plamda bo'lmagan barcha elementlaridan tuziladigan to'plamni hosil qilish A* ***to'plamdan*** *B* ***to'plamni ayirish*** *deb, tuzilgan to'plam esa, shu A va B* ***to'plamlarning ayirmasi*** *deb ataladi.*

$$A \setminus B$$

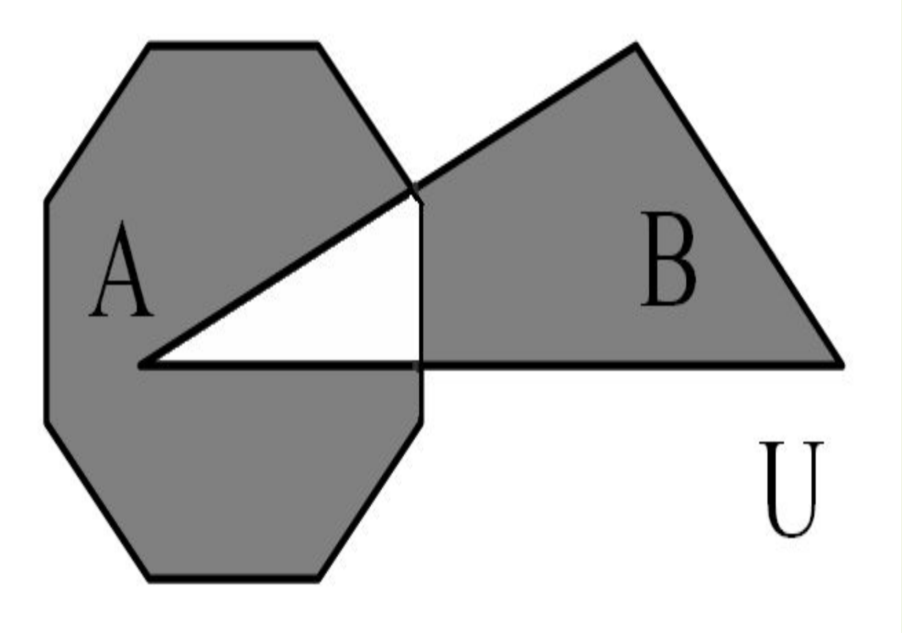


3-shakl

6-misol. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{e, f, k\}$ bo'lsa, u holda $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \{c\}$, $B \setminus C = \varnothing$ bo'ladi.

9-ta'rif: *A va B to'plamlarning* ***simmetrik ayirmasi (halqali yig'indisi)*** *deb, A to'plamning B to'plamga, B to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan iborat to'plamga aytiladi va $A\Delta B$ kabi belgilanadi. Shunday qilib,* $A\Delta B = A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

$A\Delta B$ yoki $A \oplus B$



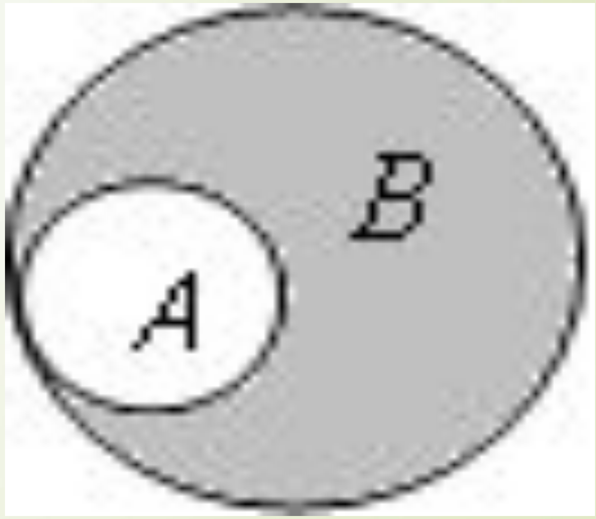
4-shakl

7-misol. $A = \{a,b\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{e,f,k\}$ bo'lsa, u holda $A\Delta B = \{c\}$, $B\Delta C = \{a,b,c,e,f,k\}$ bo'ladi.

10-ta'rif. *B to'plamning A to'plamga kirmagan barcha elementlaridan tuzilgan $B \setminus A$ to'plam A* ***to'plamning*** *B* ***to'plamgacha to'ldiruvchi to'plami*** *deb ataladi.*

8-misol. Barcha juft sonlar to'plamini $A = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ $(n \in \mathbf{N})$ deb belgilasak, A to'plamni $\mathbf{N}$ to'plamgacha to'ldirish amalini qo'llab $\overline{A}_{\mathrm{N}} = \{1, 3, \ldots, 2n-1, \ldots\}$ to'plamni, ya'ni barcha toq sonlar to'plamini hosil qilamiz. Demak, barcha toq sonlar to'plami barcha juft sonlar to'plamini natural sonlar to'plamigacha to'ldiradi.

$$\overline{A}_B$$



4-shakl

11-ta'rif. *Qaralayotgan barcha to'plamlarni o'zida qism to'plam sifatida saqlovchi to'plamga* ***universal to'plam*** *deb ataladi.*

12-ta'rif. *Berilgan to'plamning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan to'plam to'plamning buleani (to'plam uchun bulean) deb ataladi.*

9-misol. To'rtta elementga ega $A=\{a,b,c,d\}$ to'plam uchun 2^A bulean o'n oltita element-to'plamlardan iborat bo'ladi:

$$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},$$
$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}.$$

Ravshanki, $|A|=4$ va $\left|2^A\right|=16$.

To‘plamlar uchun asosiy tengliklar

1. [illegible]
2. [illegible] – ko’paytmaga nisbatan kommutativlik qonuni.
3. [illegible] – ko’paytmaga nisbatan assotsiativlik qonuni.
4. [illegible] – yig’indiga nisbatan kommutativlik qonuni.
5. [illegible] – yig’indiga nisbatan assotsiativlik qonuni.
6. [illegible] – ko’paytmaga nisbatan distributivlik qonuni.
7. [illegible] – yig’indiga nisbatan distributivlik qonuni.
8. [illegible]
9. [illegible]
10. [illegible]
11. [illegible]

Kortej tushunchasi.

Ixtiyoriy $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarning ixtiyoriy biridan, masalan, A_{i_1} to'plamdan qandaydir a_{i_1} elementni, A_{i_1} to'plamdan boshqa istalgan A_{i_2} to'plamning qandaydir a_{i_2} elementini va hokazo, oxirgi A_{i_n} to'plamdan qandaydir a_{i_n} elementni olamiz. Bu elementlarni ularning berilgan to'plamlardan olinishi tartibida joylashtirib $< a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} >$ tuzilmaga ega bo'lamiz. Bu tuzilmada har bir element o'zining qat'iy joylashish o'rniga ega. Shunday usul bilan boshqa tuzilmalarni ham hosil qilish mumkin. Bu tuzilmalarning har biri **elementar kortej** (qisqacha, **kortej**) deb yuritiladi.

13-ta'rif. *Kortejni tashkil etuvchilar shu kortejning* ***elementlari*** *deb ataladi.*

14-ta'rif. *Kortejni tashkil etuvchi elementlar soni (kortejning uzunligi)* ***kortejning quvvati*** *deb ataladi.*

Quvvatlari teng bo'lgan ikkita kortejning mos o'rinlaridagi elementlari aynan bir xil bo'lsagina bu **kortejlar teng** deb hisoblanadi.

15-ta'rif. *Kortejni tashkil qiluvchi elementlar, uning* ***komponentalari*** *yoki* ***koordinatalari*** *deb ataladi.*

To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi va u bilan bog‘liq ba’zi amallar.

16-ta’rif. *Tartiblangan* $A_1, A_2, ..., A_n$ *to‘plamlar elementlaridan tuzilgan* n *o‘rinli barcha kortejlar to‘plami shu to‘plamlarning **Dekart ko‘paytmasi** deb ataladi.*

Ba’zan to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi iborasi o‘rnida **to‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi** iborasidan ham foydalaniladi. Tartiblangan $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ yoki $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ko‘rinishda belgilanadi, ya’ni

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{< a_1, a_2, ..., a_n > | \, a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}.$$

To‘plamlarning to‘g‘ri ko‘paytmasi tushunchasidan foydalanib, **to‘plamning darajasi tushunchasi**

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ marta}}$$

formula asosida kiritiladi. Masalan, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$. Umuman olganda, $A^n = A \times A^{n-1}$.

10-misol. Berilgan ikkita $A = \{a, c, 1, \otimes\} \times \{1, \Delta\} \times \{\otimes, \Delta\}$ va $B = \{b, c, 1\} \times \{2, a, \Delta\} \times \{\otimes\}$ Dekart ko‘paytmalarini toping.

Bu Dekart ko’paytmalar quyidagicha bo’ladi:

$A = \{<a,1,\otimes>, <a,1,\Delta>, <a,\Delta,\otimes>, <a,\Delta,\Delta>,\ <c,1,\otimes>, <c,1,\Delta>, <c,\Delta,\otimes>, <c,\Delta,\Delta>,$

$<1,1,\otimes>, <1,1,\Delta>, <1,\Delta,\otimes>, <1,\Delta,\Delta>,\ <\otimes,1,\otimes>, <\otimes,1,\Delta>, <\otimes,\Delta,\otimes>, <\otimes,\Delta,\Delta>\}$,

$B = \{<b,2,\otimes>, <b,a,\otimes>, <b,\Delta,\otimes>,\ <c,2,\otimes>, <c,a,\otimes>, <c,\Delta,\otimes>,\ <1,2,\otimes>, <1,a,\otimes>, <1,\Delta,\otimes>\}$

A va B to'plamlarning ***Dekart ko'paytma*** si:

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ and } b \in B\}$$

Agar A = {Charlie, Lucy, Linus}, va
B = {Brown, VanPelt}, uholda

$A \times B$ = {(Charlie, Brown), (Lucy, Brown), (Linus, Brown), (Charlie, VanPelt), (Lucy, VanPelt), (Linus, VanPelt)}

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$$
$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

A,B chekli $\rightarrow |A \times B| = |A|\,|B|$