ГИДРОМЕХАНИКА

Является предшествующей дисциплинам:

«Судовые вспомогательные механизмы, системы и устройства», «Судовые котельные и паропроизводящие установки»,

«Судовые холодильные установки и системы кондиционирования воздуха», «Судовые двигатели внутреннего сгорания»,

«Судовые турбомашины».

Глава 1.
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Предмет гидромеханики. Модель сплошной среды

Гидромеханика изучает законы равновесия и движения жидкостей и газов, их взаимодействие с омываемыми ими поверхностями твердых тел.

Гидромеханика разделяется на статику (гидростатику), кинематику и динамику.

Модель сплошной среды

Жидкости и газы рассматриваются как сплошная среда, которой приписываются физические свойства, феноменологически отражающие их молекулярную структуру.

Основные положения модели:

- Любой малый макроскопический объём имеет такие же свойства, что и объём сравнительно больших размеров
- Все физические свойства жидкостей и газов считаются непрерывными функциями координат и времени
- Производные от этих функций также являются непрерывными функциями координат и времени.

Модель сплошной среды

Эти допущения корректны:

- если размеры рассматриваемой области жидкости или газа велики по сравнению с размерами молекул и длиной их свободного пробега
- если количество молекул в рассматриваемом объёме достаточно, чтобы физические свойства можно было считать непрерывными (газ не разреженный).

Элементарный объём

Элементарный объём - это объём, размеры которого много больше размеров молекул и расстояний их свободного пробега, но много меньше размеров рассматриваемого объёма жидкости.

1.2. Физические свойства жидкостей и газов

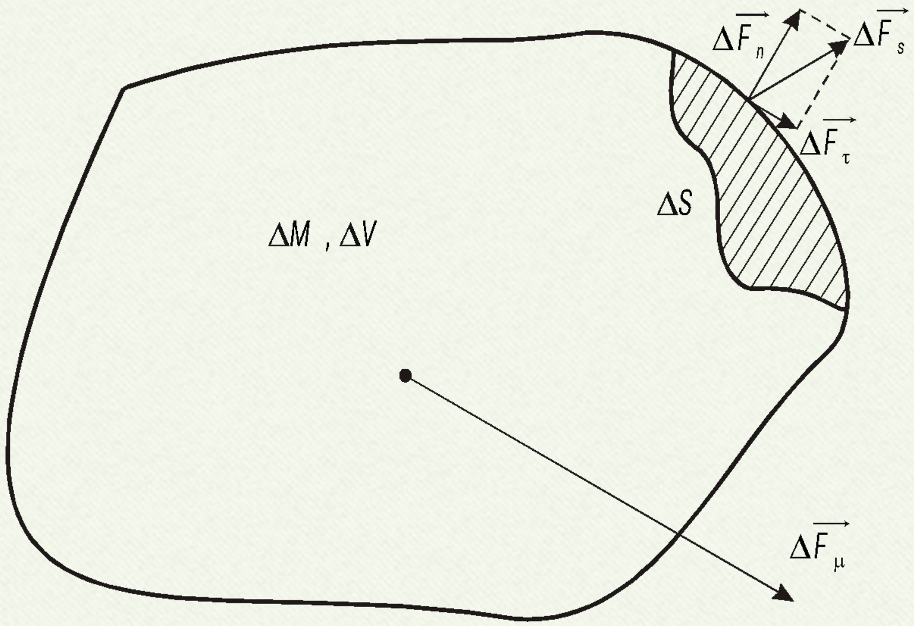
- ***Сплошность*** – жидкости и газы движутся без образования разрывов и пустот
- ***Текучесть*** - способность совершать непрерывное, неограниченное движение в пространстве и времени под действием приложенных сил или по инерции.

Следствия:

1. Жидкости и газы не имеют собственной формы и принимают форму сосуда, в который они помещены.
2. Газ занимает весь предоставленный ему объём.

1.2. Физические свойства жидкостей и газов

- ***Плотность*** – масса единицы объёма вещества, $\rho, \frac{кг}{м^3}$
- ***Удельный объём*** – объём, занимаемый 1 кг вещества, (υ , м^3/кг).



$$\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V} \qquad \upsilon = \frac{\Delta V}{\Delta M} \qquad \boxed{\upsilon = \frac{1}{\rho}}$$

Под плотностью жидкости в данной точке понимается :

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

1.2. Физические свойства жидкостей и газов

- ***тепловое расширение*** – способность жидкостей и газов изменять свою плотность (удельный объём) при изменении температуры

Характеризуется коэффициентом теплового расширения β_t, K^{-1} :

$$\beta_t = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p; \quad (1) \qquad \beta_t = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial \nu}{\partial T}\right)_p$$

Он равен относительному изменению плотности (объёма) при изменении температуры на один Кельвин (К) при постоянном давлении

1.2. Физические свойства жидкостей и газов (тепловое расширение)

Проинтегрируем выражение (1) :

$$\int_T \beta_t \partial T = -\int_\rho \frac{\partial\rho}{\rho}; \longrightarrow \beta_t \Delta T\Big|_{T_0}^{T_1} = -\ln\rho\Big|_{\rho_0}^{\rho_1} \longrightarrow \ln\frac{\rho_0}{\rho_1} = \beta_t(T_1 - T_0)$$

$$\longrightarrow \rho_1 = \rho_0 e^{-\beta_t \Delta T}$$

Если плотность меняется незначительно, можно использовать упрощённые формулы:

$$\beta_t = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta T}\right)_p; \quad \beta_t = \frac{1}{\upsilon_0}\left(\frac{\Delta\upsilon}{\Delta T}\right)_p; \longrightarrow \boxed{\rho_1 = \rho_0(1-\beta_t\Delta T)} \quad \boxed{\upsilon_1 = \upsilon_0(1+\beta_t\Delta T)}$$

1.2. Физические свойства жидкостей и газов

- ***Объёмное сжатие***– способность жидкостей и газов изменять свою плотность (удельный объём) при изменении давления.

Характеризуется коэффициентом объёмного сжатия β_p, Па$^{-1}$:

$$\beta_p = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_t \quad (2)$$

$$\beta_p = -\frac{1}{\upsilon}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial p}\right)_t .$$

Он равен относительному изменению плотности (объёма) при изменении давления на один Паскаль при постоянной температуре.

1.2. Физические свойства жидкостей и газов (*Объёмное сжатие*)

Проинтегрируем выражение (2) :

$$\int\limits_{p} \beta_p \partial p = \int\limits_{\rho} \frac{\partial \rho}{\rho}; \quad \longrightarrow \quad \beta_p \Delta p \Big|_{p_0}^{p_1} = \ln \rho \Big|_{\rho_0}^{\rho_1} \quad \longrightarrow \quad \rho_1 = \rho_0 e^{\beta_p \Delta p}$$

Если плотность меняется незначительно, можно использовать упрощённые формулы:

$$\beta_p = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\Delta \rho}{\Delta p}\right)_{T=const}; \quad \beta_p = -\frac{1}{\upsilon_0}\left(\frac{\Delta \upsilon}{\Delta p}\right)_{T=const}; \quad \longrightarrow \quad \boxed{\rho_1 = \rho_0 (1 + \beta_p \Delta p)} \quad \boxed{\upsilon_1 = \upsilon_0 (1 - \beta_p \Delta p)}$$

1.2. Физические свойства жидкостей и газов

Сжимаемость

Обратная коэффициенту β_p величина называется модулем объёмной упругости Е, Па.

Для воды при атмосферном давлении модуль Е составляет приблизительно 2000 МПа. Такого же порядка он и для других капельных жидкостей, например, для минеральных масел он равен приблизительно 1200 МПа.

Поэтому для многих задач сжимаемостью жидкостей можно пренебречь.

1.2. Физические свойства жидкостей и газов

Вязкость – способность жидкостей и газов к возникновению сил трения между слоями, движущимися с разной скоростью (или способность оказывать сопротивление относительному смещению слоев).

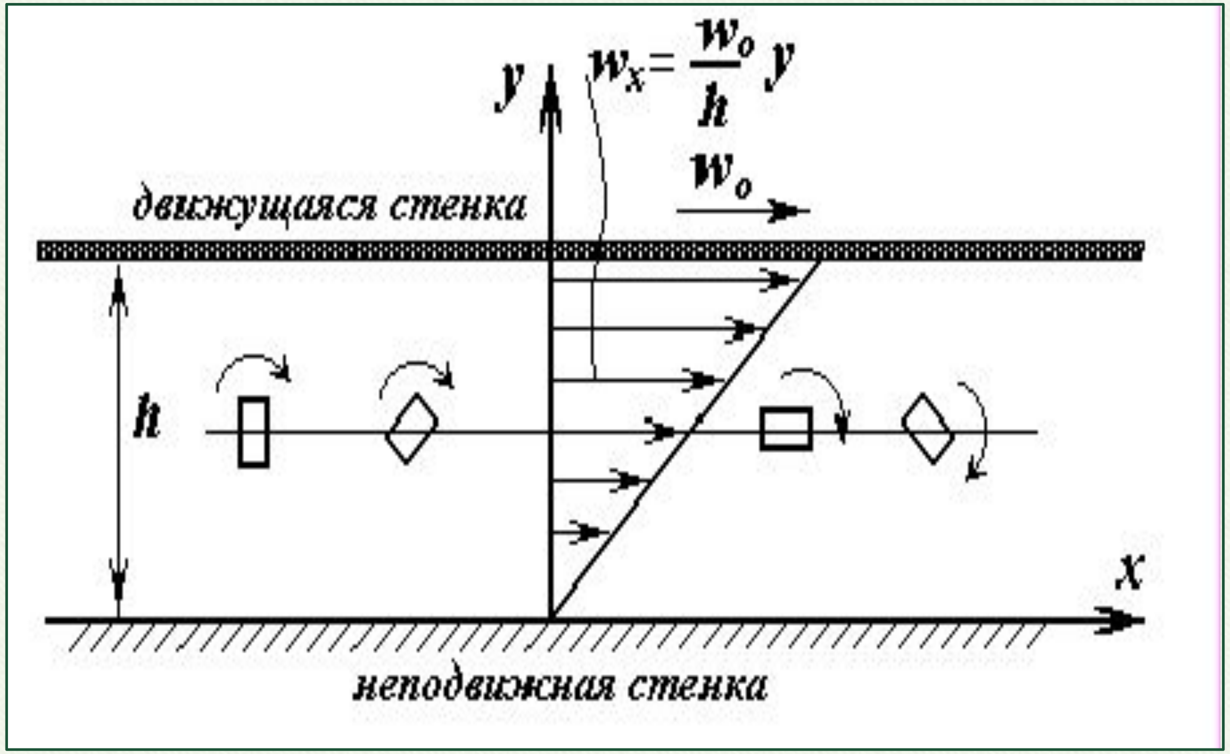
При прямолинейном слоистом движении жидкости сила внутреннего трения F между смещающимися слоями выражается формулой Ньютона:

$$F = \pm \mu S \frac{\partial w}{\partial n},$$

где μ - динамический коэффициент вязкости, *кг/(м ·с)= Па· с*,

$\frac{\partial w}{\partial n}$ - величина градиента скорости.

1.2. Физические свойства жидкостей и газов (вязкость)



Сила внутреннего трения F между смещающимися слоями выражается формулой Ньютона

$$F = \pm \mu S \frac{\partial w}{\partial n},$$

Касательные напряжения:

$$\boxed{\vec{\tau} = \lim_{S \to 0} \frac{\vec{F}}{S} = \pm \mu \frac{dw}{dn}}$$

1.2. Физические свойства жидкостей и газов (вязкость)

μ - динамический коэффициент вязкости, $\left[\frac{(H\cdot c)}{м^2}=\frac{кг}{(м\cdot c)}=Па\cdot c\right]$

$\boxed{\nu=\mu/\rho}$ - кинематический коэффициент вязкости , $м^2/с$ или $мм^2/с$ (сантиСтокс).

	СГС	СИ
μ	$\left[\frac{дин}{(см^2)}\cdot c=1Пуаз\right]$	1 Пуаз=0,1 Па .с
ν	1 $см^2/с$=1 *Стокс*	1 Ст=10^{-4} $м^2/с$ 1 сСт=10^{-6} $м^2/с$

Условная вязкость жидкости

Условная вязкость жидкости (ВУ) измеряется в градусах Энглера, ° Е. <u>Условная вязкость </u>- отношение времени истечения жидкости $\Delta\tau$ из объёма V=200 мл через калиброванное отверстие диаметром d=6,2 мм ко времени истечения в тех же условиях пресной воды $\Delta\tau_в$ при температуре t = 20° С (ВУ=$\Delta\tau/\Delta\tau_в$).

$$\nu = \left(0.073\,ВУ - \frac{0.063}{ВУ}\right)\cdot 10^{-4},\ м^2/с$$

У жидкостей вязкость понижается при нагреве, а у газов - повышается.

Идеальная жидкость

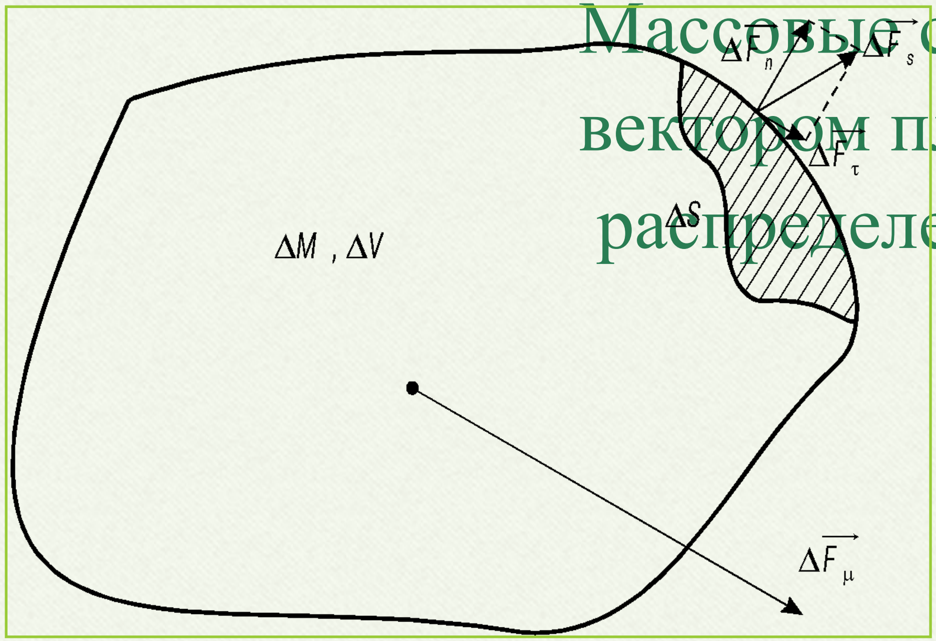
В гидромеханике ***идеальной называется невязкая и несжимаемая жидкость (ρ=const).***

Идеальных жидкостей не существует, но в некоторых случаях этими свойствами можно пренебречь.

1.3. Силы, действующие на жидкость

Массовыми называются силы, приложенные ко всем точкам объёма жидкости.

К ним относятся, например, сила тяжести и силы инерции.



Массовые силы характеризуются вектором плотности распределения массовых сил:

$$\vec{f}_м = \lim_{\Delta M \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_м}{\Delta M} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_м}{\Delta V} = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{F}_м}{dV}$$

Массовые силы

Вектор плотности распределения массовых сил – это сила, действующая на единицу массы жидкости или газа.

Например, если на рассматриваемый объём действует сила тяжести:

$$\vec{f}_g = \lim_{\Delta M \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_g}{\Delta M} = \lim_{\Delta M \to 0} \frac{\Delta M \cdot \vec{g}}{\Delta M} = \vec{g}$$

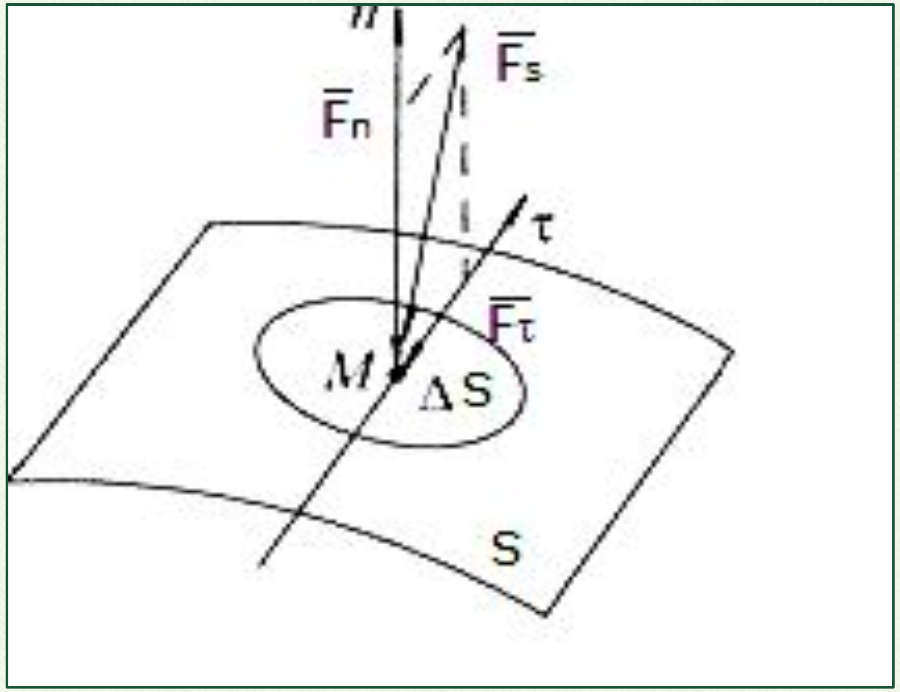
Если известна величина вектора плотности распределения массовых сил, то легко определить массовую силу, действующую на выделенный объем:

$$F = \int (f \cdot \rho \cdot dV)$$

Поверхностные силы

В случаях, когда частицы жидкости, на которые действуют силы, расположены в столь тонком слое, что его можно свести к материальной поверхности, такие силы называются ***поверхностными*** (силы трения, давления, поверхностного натяжения).

Поверхностные силы



Поверхностные силы характеризуются ***напряжением.***

Касательное напряжение: $\vec{\tau} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta \vec{F}_\tau}{\Delta S}$

Нормальное напряжение: $\vec{p} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta S}.$

Напряжение – это сила, действующая на единицу поверхности.

Силы, действующие на жидкость

Основное различие между вектором плотности распределения массовых сил f и напряжениями заключается в том, что вектор f является однозначной функцией координат и времени, т.е. образует векторное поле, тогда как направление векторов напряжения в выбранной точке зависит от ориентации площадки ΔS, к которой приложено напряжение, и потому их направление не определено однозначно в каждой точке, следовательно, они векторного поля не образуют.

Силы, действующие на жидкость

Нормальные (по отношению к площадке ΔS) и касательные напряжения можно представить в виде:

$$\vec{p} = p \cdot \vec{n} \qquad \vec{\tau} = \tau \cdot \vec{\varsigma}$$

где $\vec{n}$ и $\vec{\varsigma}$ - орты нормали и касательной к площадке ΔS соответственно.

Скалярные величины p и τ не зависят от положения площадки ΔS и образуют скалярные поля.

Контрольные вопросы

1. Что такое средняя плотность?
2. Что такое вязкость?
3. Какими коэффициентами оценивается вязкость и как они связаны?
4. Какая жидкость называется идеальной?
5. Какие виды сил действуют в жидкости?
6. Что такое вектор плотности распределения массовых сил?
7. Что такое напряжение?

Глава 2.
ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика изучает равновесие жидкостей и газов, находящихся в состоянии покоя.

Состояние покоя – это такое состояние, когда частицы среды не перемещаются относительно друг друга.

В покоящейся жидкости не происходит относительного перемещения слоев, следовательно (по гипотезе Ньютона), в ней ***отсутствуют касательные напряжения.***

2.1. Гидростатическое давление и его свойства

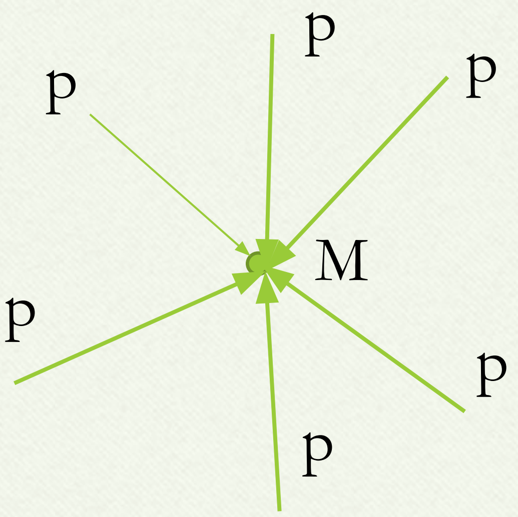
Нормальные напряжения в покоящейся жидкости называются **гидростатическим давлением**.

Свойства гидростатического давления:

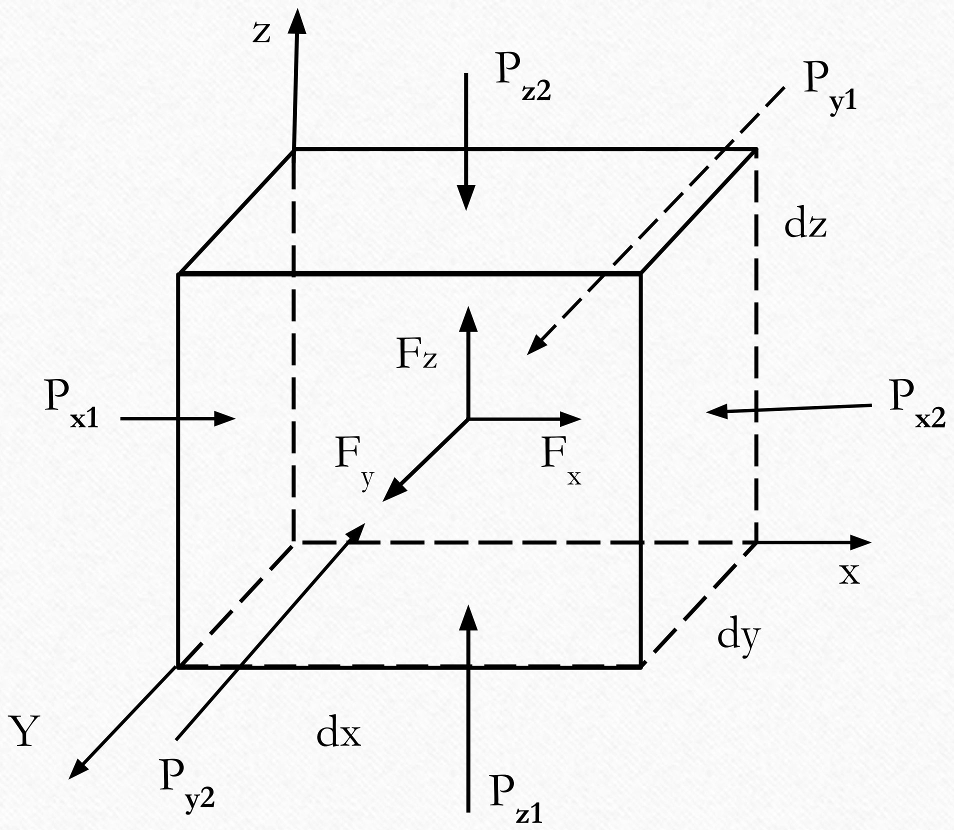
- Давление всегда направлено по нормали к площадке, на которую оно действует;
- Давление всегда стремится сжать выделенный объём;
- Величина гидростатического давления в данной точке жидкости со всех сторон одинакова.

Свойства гидростатического давления:

- Величина гидростатического давления в данной точке жидкости со всех сторон одинакова.



2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера).



$$p = p(x,y,z)$$

Пусть, давление в центре параллелепипеда равно р.

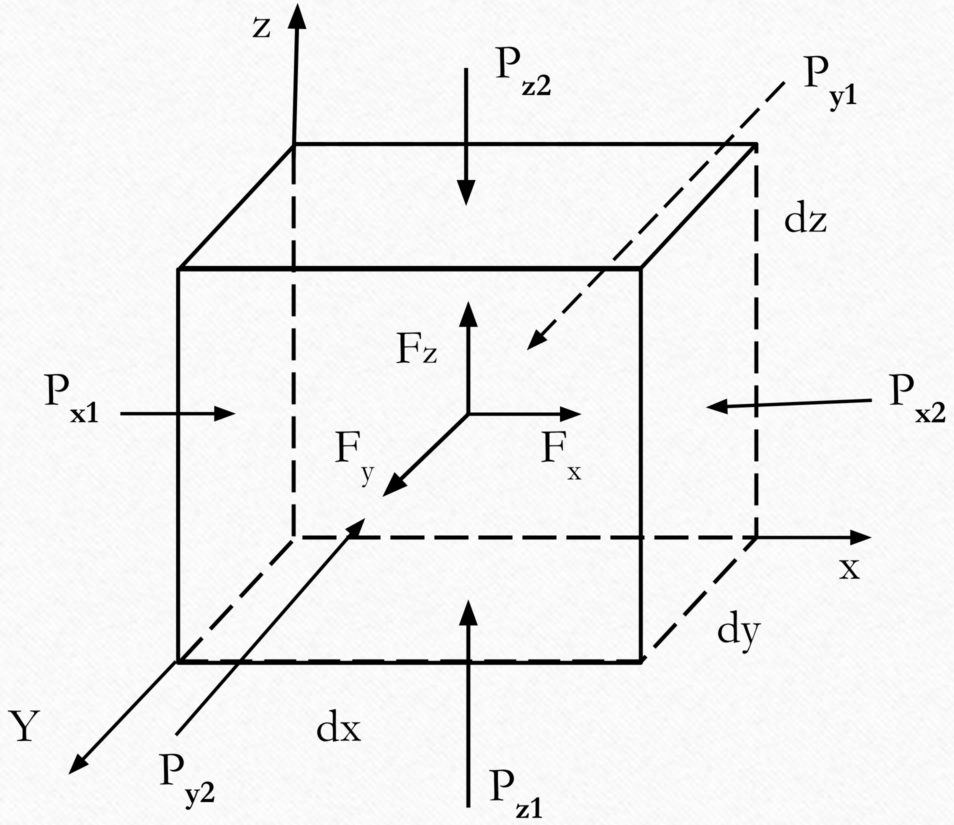
Тогда, давление на левой грани будет:

$$p_{x1} = (p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2})$$

Давление на правой грани будет:

$$p_{x2} = (p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2})$$

2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера).



Силы давления на левую и правую грани:

$$\vec{P}_{x1} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2}\right)dydz$$

$$\vec{P}_{x2} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2}\right)dydz$$

Проекция массовой силы на ось x:

$$F_x = f_x \rho \cdot dxdydz$$

где fx - вектор плотности распределения массовых сил

Уравнения Эйлера выражают 1-й закон Ньютона применительно к жидкостям и газам

Условие равновесия выделенного объема жидкости в проекции на ось x :

$$\vec{F}_x - \vec{P}_{x1} + \vec{P}_{x2} = 0$$

$$\rho f_x dxdydz + (p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2})dydz - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2})dydz = 0 \Big| : \rho dxdydz \quad \Rightarrow$$

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Аналогично:

$$f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера).

$$\begin{cases} f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{f} = \frac{1}{\rho} grad\mathrm{p}}$$

$$\vec{f} = f_x \cdot \vec{i} + f_y \cdot \vec{j} + f_z \cdot \vec{k}$$

$$grad\mathrm{p} = \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

2.3. Основное уравнение гидростатики

Рассмотрим частный случай равновесия жидкости, когда из массовых сил на неё действует только сила тяжести. Ось z направим вертикально вниз. Тогда $f_x = f_y = 0,\ f_z = g$

В этом случае уравнения Эйлера упрощаются:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = g \end{cases}$$

$\longrightarrow$ **p=const(x)**

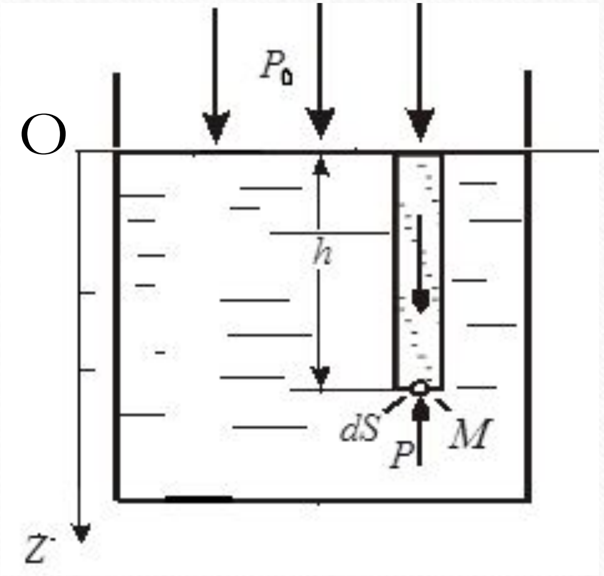
$\longrightarrow$ **p=const(y)**

$\longrightarrow$ ***В покоящейся жидкости давление меняется только по вертикали, т.е. в любом горизонтальном слое жидкости давление во всех точках одинаково***

2.3. Основное уравнение гидростатики

Интегрируя третье уравнение системы, получим:

$p - \rho g z = C$, или $p = \rho g z + C$.



Граничные условия:

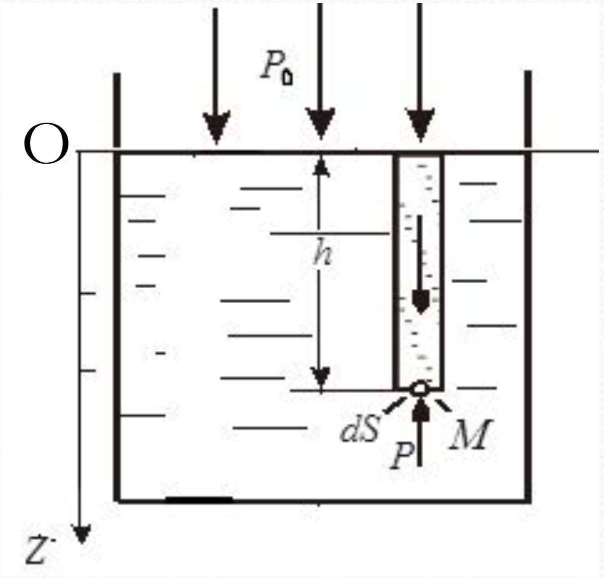
при $z=0$ $p=p_0$ $C=p_0$.

$$\boxed{p = p_0 + \rho g z}$$

или

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

2.3. Основное уравнение гидростатики



$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

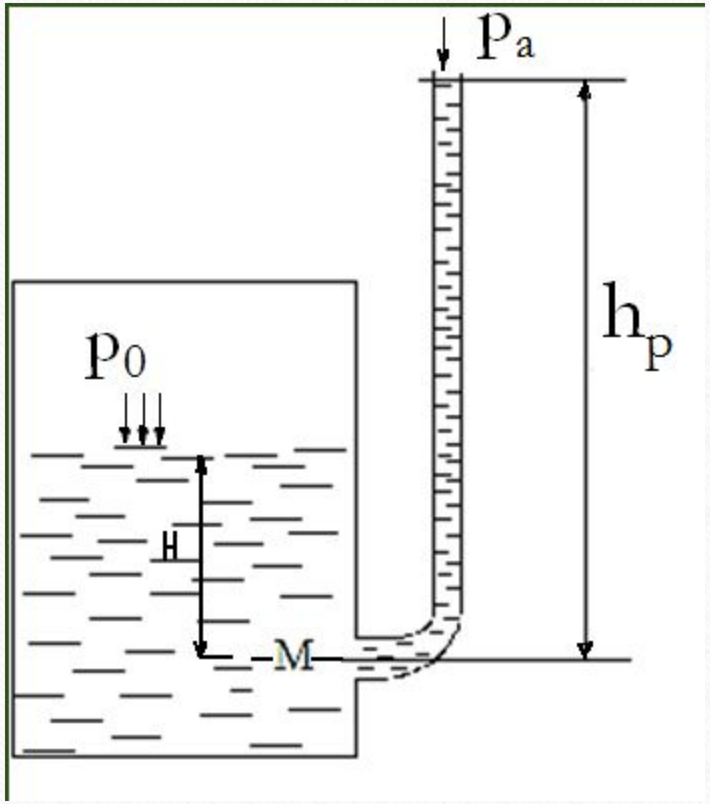
Следствие

Закон Паскаля: ***давление, приложенное к свободной поверхности жидкости p_0, одинаково передается всем точкам жидкости по всем направлениям***

$\boldsymbol{p - p_o = p_и = \rho g h}$ называется манометрическим или, избыточным давлением

2.4. Способы измерения давления и вакуума

1. Пьезометр



$$\boxed{p_м = p_0 + \rho g H}$$

$$\boxed{p_м = p_a + \rho g h_p}$$

$$h_p = \frac{p_M - p_a}{\rho g} = \frac{p_и}{\rho g}$$

$$p_0 + \rho g H = p_a + \rho g h_p$$

$$p_0 = p_a + \rho g (h_p - H)$$

где $p_и$ - избыточное давление на уровне присоединения пьезометра

2.4. Способы измерения давления и вакуума

1. Пьезометр

$$h_p = \frac{p_M - p_a}{\rho g} = \frac{p_u}{\rho g}$$ - пьезометрическая высота

Избыточному давлению в 1бар=10^5 Па соответствует пьезометрическая высота:

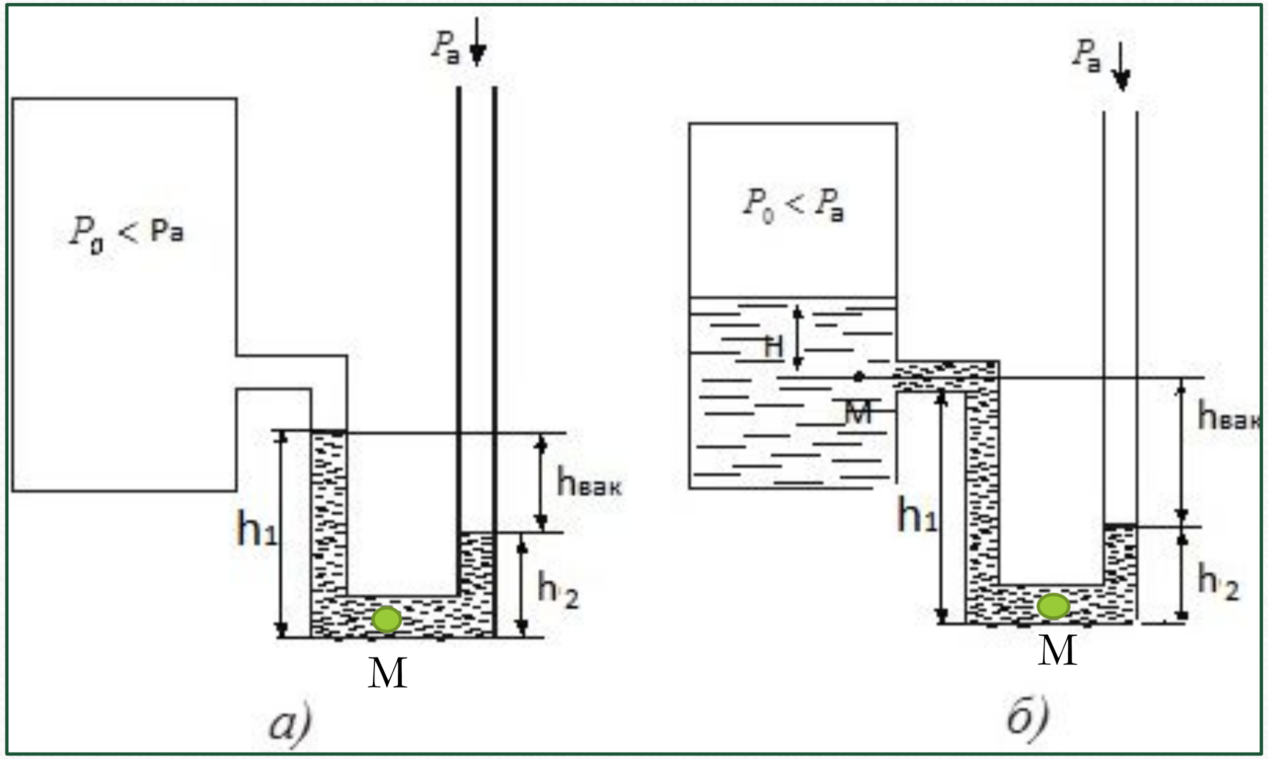
$$h_1 = \frac{p}{\gamma_{H_2O}} = \frac{10^5}{9{,}81 \cdot 1000} = 10{,}2$$ *м* водяного столба;

$$h_2 = \frac{p}{\gamma_{Hg}} = \frac{10^5}{9{,}81 \cdot 13595{,}1} = 750{,}1$$ *мм* ртутного столба;

γ=ϱg – удельный вес жидкости.

2.4. Способы измерения давления и вакуума

2. Вакуумметры



а)

$$p_м = p_a + \rho g h_2$$

$$p_м = p_0 + \rho g h_1$$

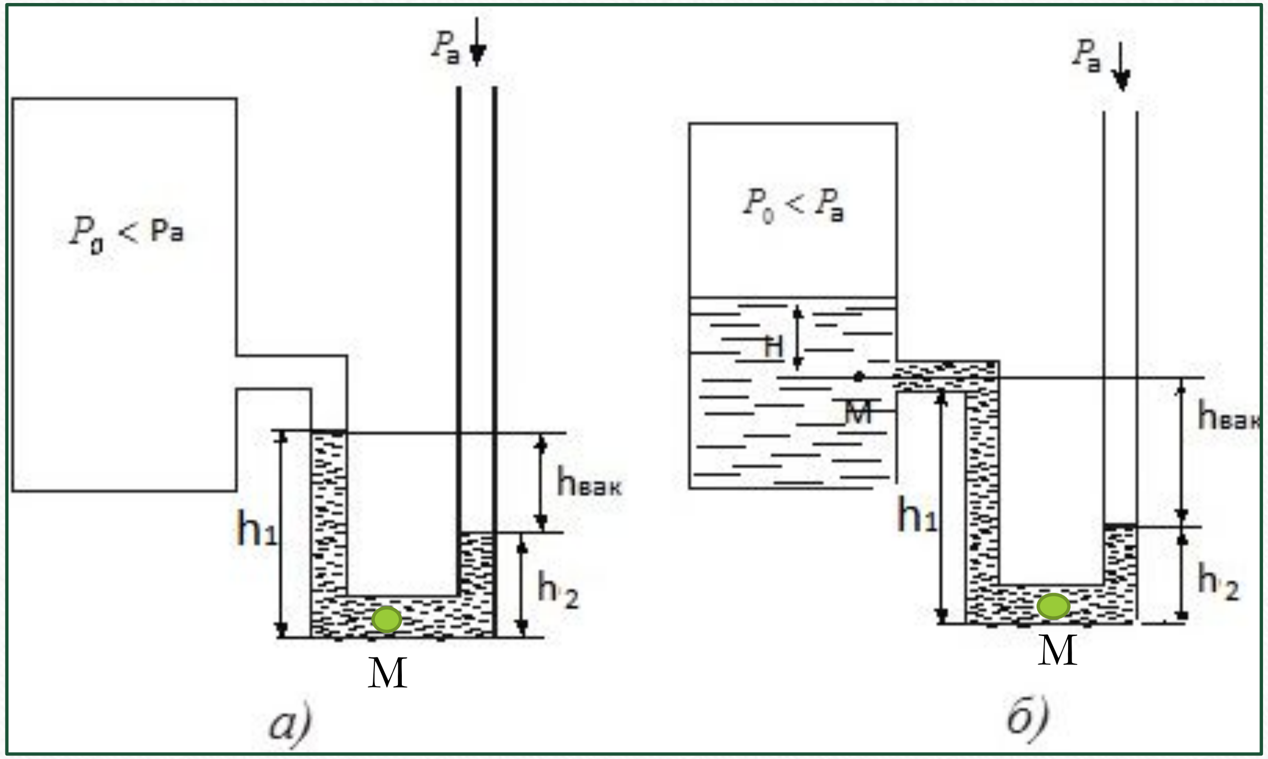
$$p_a + \rho g h_2 = p_0 + \rho g h_1$$

$$h_{вак} = \frac{p_a - p_0}{\rho g}$$

где $h_{вак}$ – вакуумметрическая высота

2.4. Способы измерения давления и вакуума

2. Вакуумметры



б)

$$p_м = p_a + \rho g h_2$$

$$p_м = p_0 + \rho g h_1 + \rho g H$$

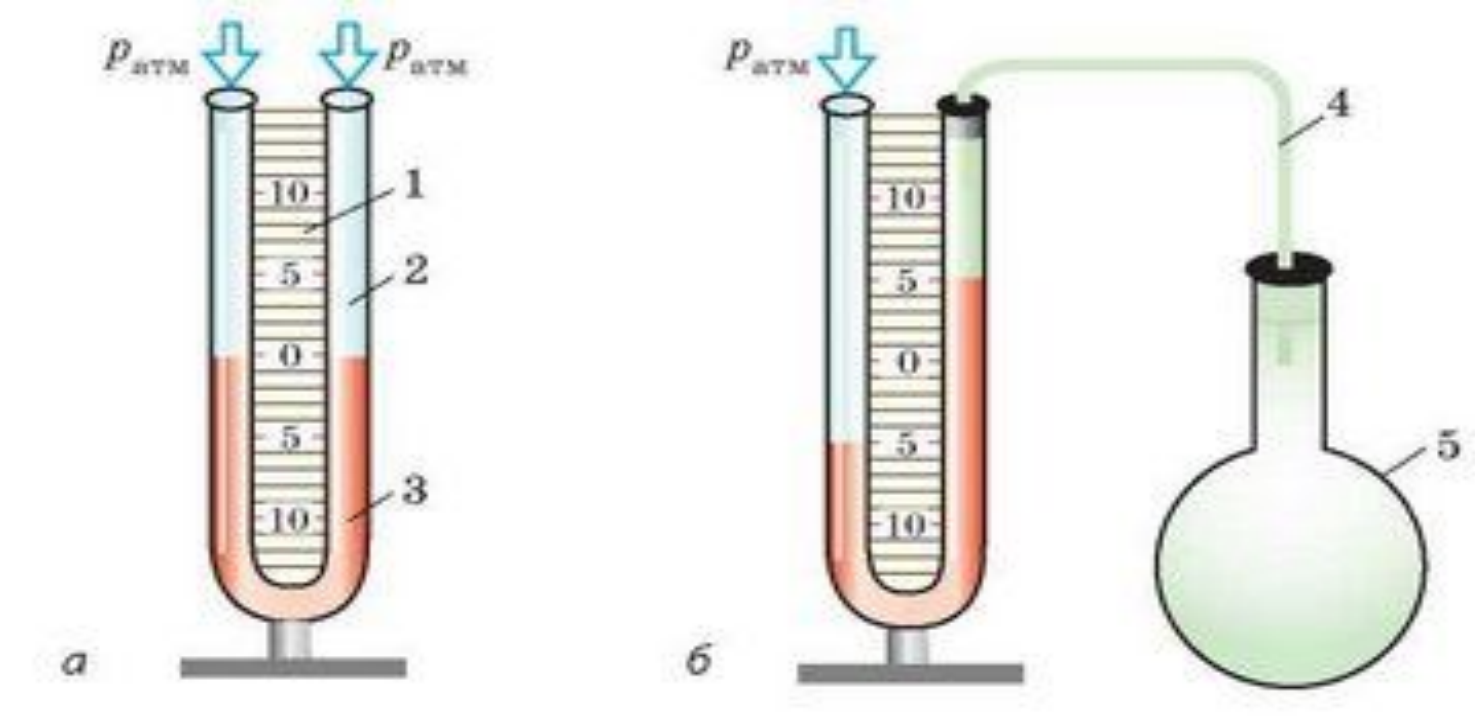
$$p_a + \rho g h_2 = p_0 + \rho g h_1 + \rho g H$$

$$p_a - p_0 = \rho g (h_{вак} + H)$$

где $h_{вак}$ – вакуумметрическая высота

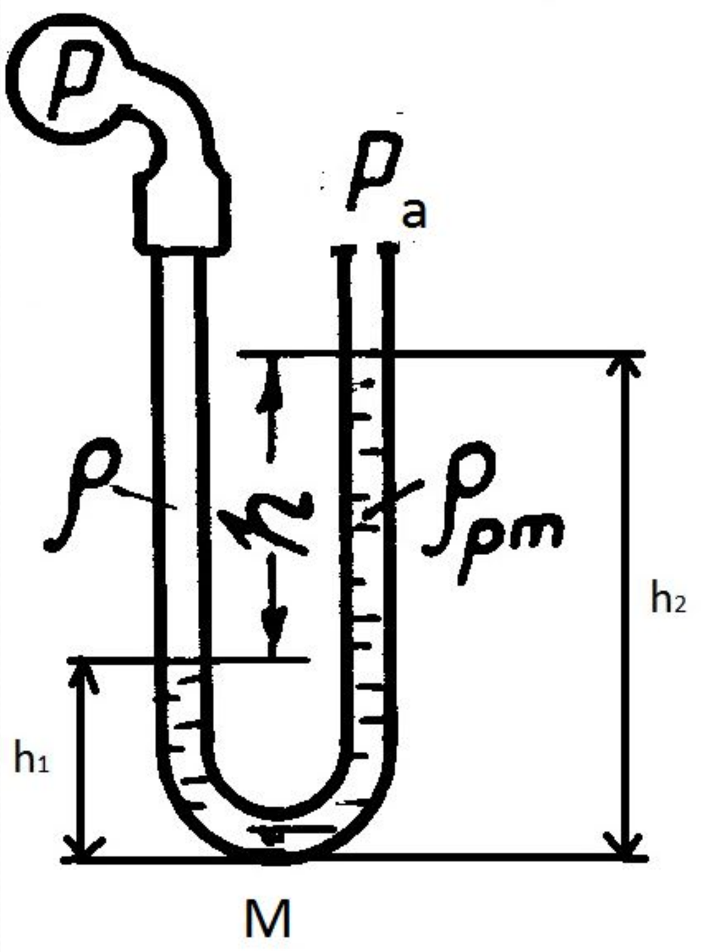
2.4. Способы измерения давления и вакуума

3. Манометр



2.4. Способы измерения давления и вакуума

3. Манометр



$$p_м = p_a + \rho_{pm} g h_2$$

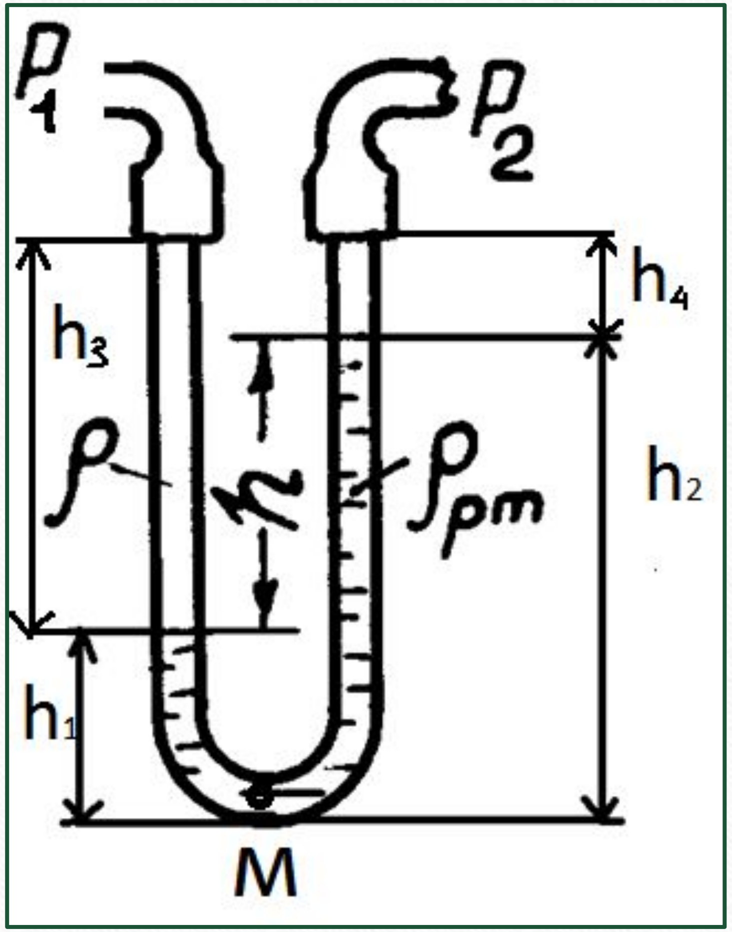
$$p_м = p + \rho g h + \rho_{pm} g h_1$$

$$p_a + \rho_{pm} g h_2 = p + \rho g h + \rho_{pm} g h_1$$

$$p - p_a = gh(\rho_{pm} - \rho)$$

2.4. Способы измерения давления и вакуума

3. Дифференциальный манометр



$$p_м = p_1 + \rho g h_3 + \rho_{рт} g h_1$$

$$p_м = p_2 + \rho g h_4 + \rho_{рт} g h_2$$

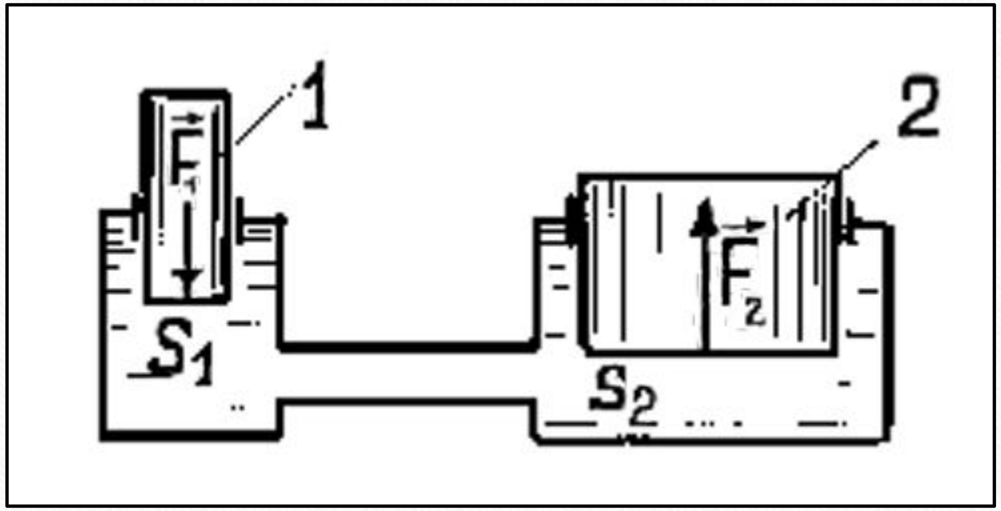
$$p_1 + \rho g h_3 + \rho_{рт} g h_1 = p_2 + \rho g h_4 + \rho_{рт} g h_2$$

$$\boxed{p_1 - p_2 = gh(\rho_{рт} - \rho)}$$

2.5. Простейшие гидравлические машины

Гидравлический пресс

Если к поршню 1 с площадью S_1 прикладывается сила F_1, то жидкость будет передавать усилие на поршень 2 с площадью S_2.



Гидростатическое давление на поверхностях поршней одинаково: $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p;$

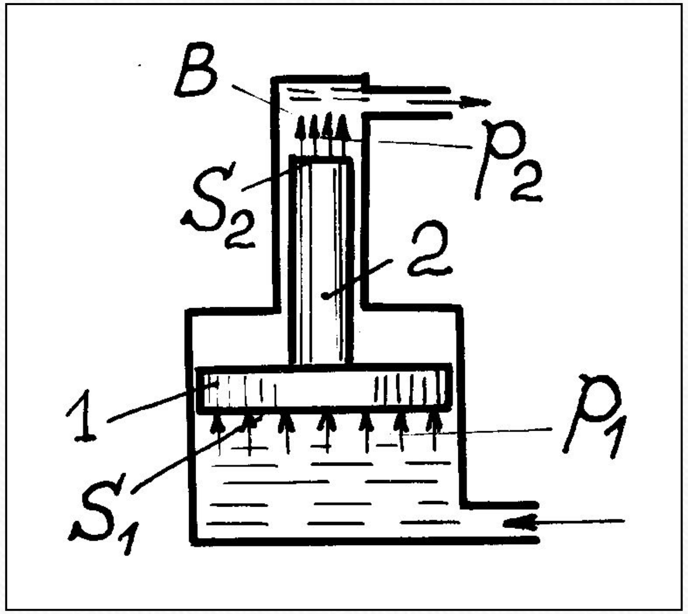
$$F_2 = pS_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}.$$

Тогда сила F_2 будет больше силы F_1 в $\frac{S_2}{S_1}$ раз

2.5. Простейшие гидравлические машины

Мультипликатор

В камере 1 к поршню площадью S_1 приложена сила, созданная гидростатическим давлением p_1 .

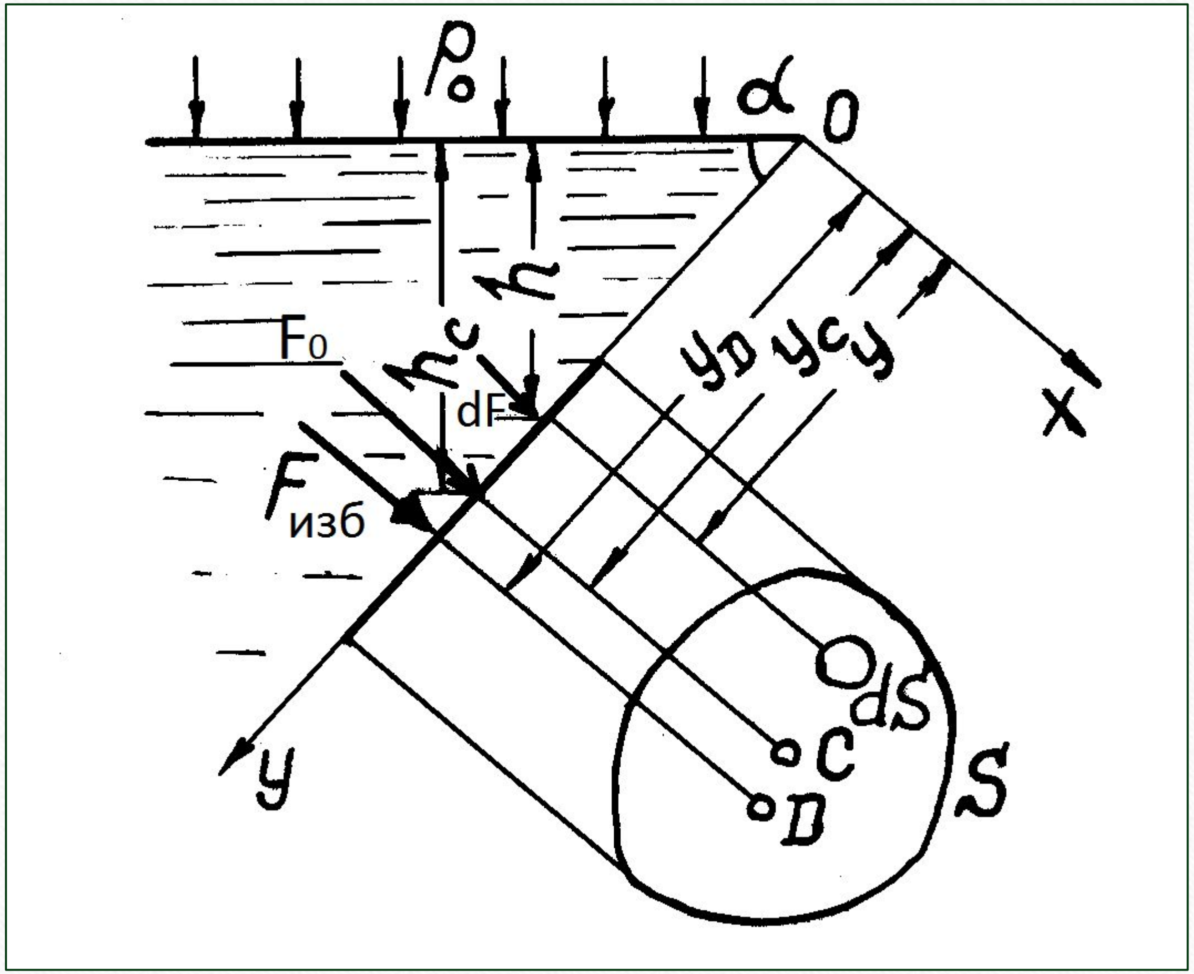


Так как поршень камеры *2* площадью S_2 воспринимает такую же силу, то он будет создавать гидростатическое давление p_2 большее, чем p_1 :

$$p_2 = p_1 \frac{S_1}{S_2}.$$

Тогда давление p_2 будет больше давления p_1 в $\frac{S_1}{S_2}$ раз.

2.6. Сила давления на плоскую стенку



К бесконечно малой площадке *dS* приложена элементарная сила давления *dF*:

$$dF = pdS$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

2.6. Сила давления на плоскую стенку

$$dF = (p_0 + \rho g h) \cdot dS = p_0 \cdot dS + \rho g h \cdot dS.$$

$$F = p_0 \int_s dS + \rho g \int_s h \cdot dS = p_0 S + \rho g \cdot \sin\alpha \int_s y \cdot dS$$

$\int_s y \cdot dS$ - статический момент площади S относительно оси x.

Известно, что: $\int_s y \cdot dS = y_c S$

Тогда: $F = p_0 S + \rho g \cdot \sin\alpha \cdot y_c \cdot S = (p_0 + \rho g h_c) S$

2.6. Сила давления на плоскую стенку

$$\boxed{F = (p_0 + \rho g h_c) S}$$

Где $h_c = y_c \cdot \sin\alpha$ - глубина погружения центра тяжести площади S, y_c - координата центра тяжести площади S

$$F = F_0 + F_{изб}$$

где F_0 - сила внешнего давления $p_{0,}$

$F_{изб.} = \rho g h_c \cdot S$ - сила избыточного давления

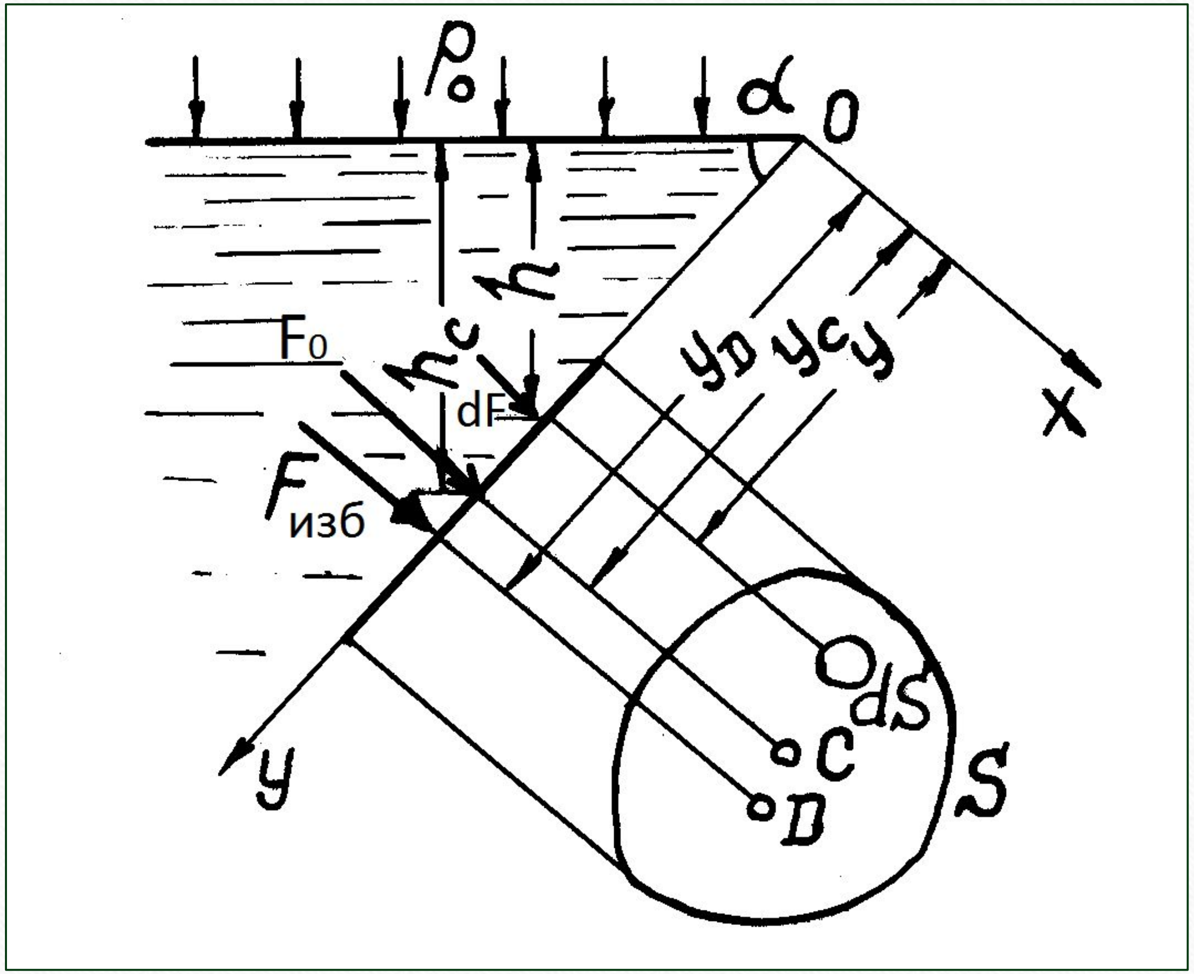
2.6. Сила давления на плоскую стенку

Давление это распределённая нагрузка, которая мысленно заменяется сосредоточенной силой F. Для упрощения расчётов распределённую нагрузку мысленно заменяют сосредоточенной силой F *(равной по величине* суммарной силе давления). Точка приложения этой силы называется ***центром давления*** жидкости на заданную площадку

2.6. Сила давления на плоскую стенку

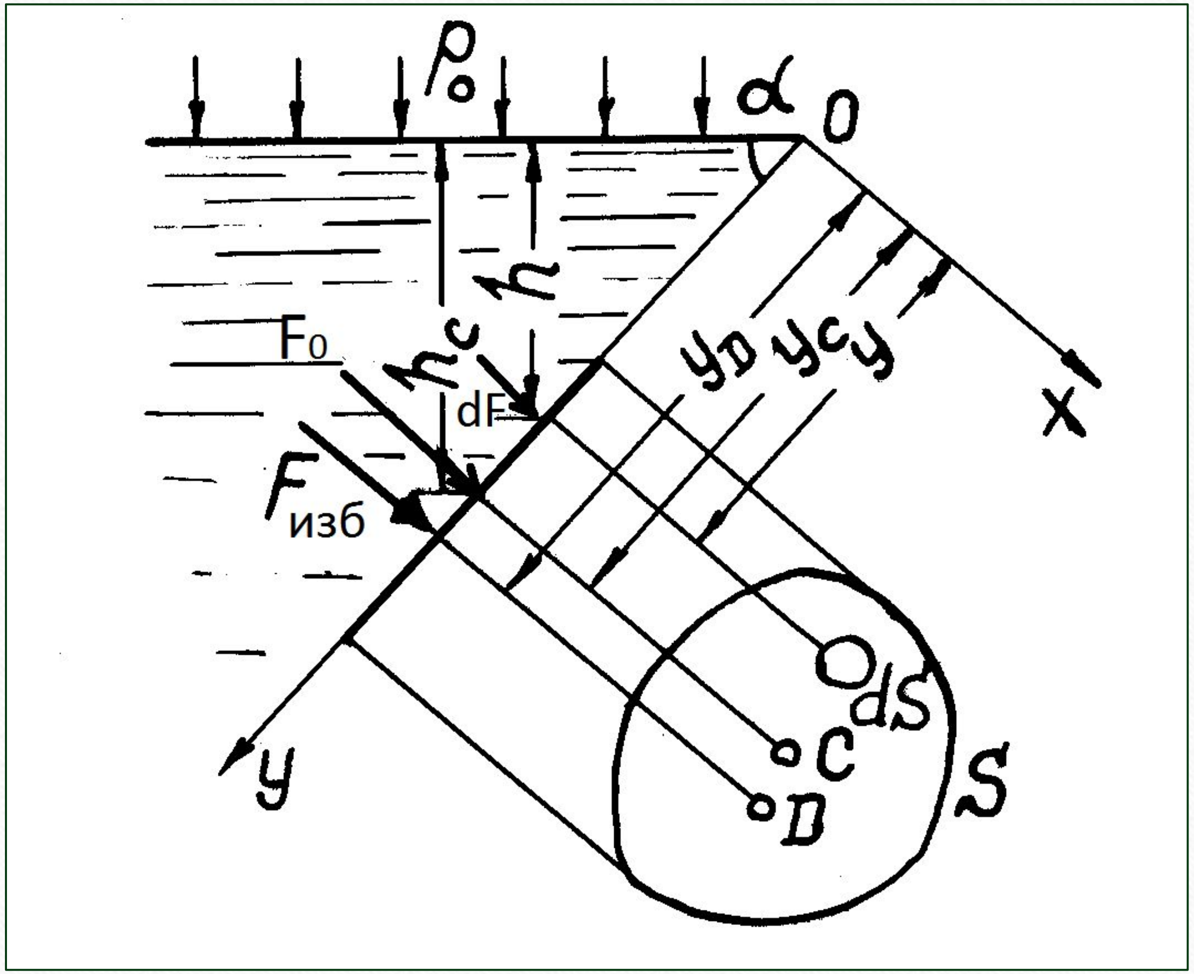
Поскольку суммарная сила F складывается из двух сосредоточенных сил F_0 и $F_{изб}$, можно отдельно найти центры давления этих сил. Внешнее давление p_0 передается всем точкам площади одинаково, поэтому его равнодействующая сила F_0 будет приложена в центре тяжести площади S (точка C).

2.6. Сила давления на плоскую стенку



Для нахождения точки приложения силы избыточного давления $F_{изб}$ (точки *Д*) применяется теорема механики: момент равнодействующей силы относительно оси *x* равен моменту, создаваемому распределённой нагрузкой).

2.6. Сила давления на плоскую стенку



Уравнение моментов:

$$F_{изб} y_D = \int y \cdot dF_{изб}$$

где y_D - координата точки приложения силы $F_{ж.}$

Учитывая, что:

$$dF_{изб} = \rho g \cdot \sin\alpha \cdot ydS$$

и $$F_{изб.} = \rho g h_c \cdot S$$

2.6. Сила давления на плоскую стенку

Получим:

$$\rho g h_c \cdot S \cdot y_D = \rho g \cdot \sin\alpha \cdot \int y^2 dS$$

$$y_D = \frac{\rho g \cdot \sin\alpha \int\limits_s y^2 \cdot ds}{\rho g \cdot \sin\alpha \cdot y_c S} = \frac{J_x}{y_c S}$$

$J_x = \int\limits_s y^2 \cdot ds$ - момент инерции площади S относительно оси x ($м^4$).

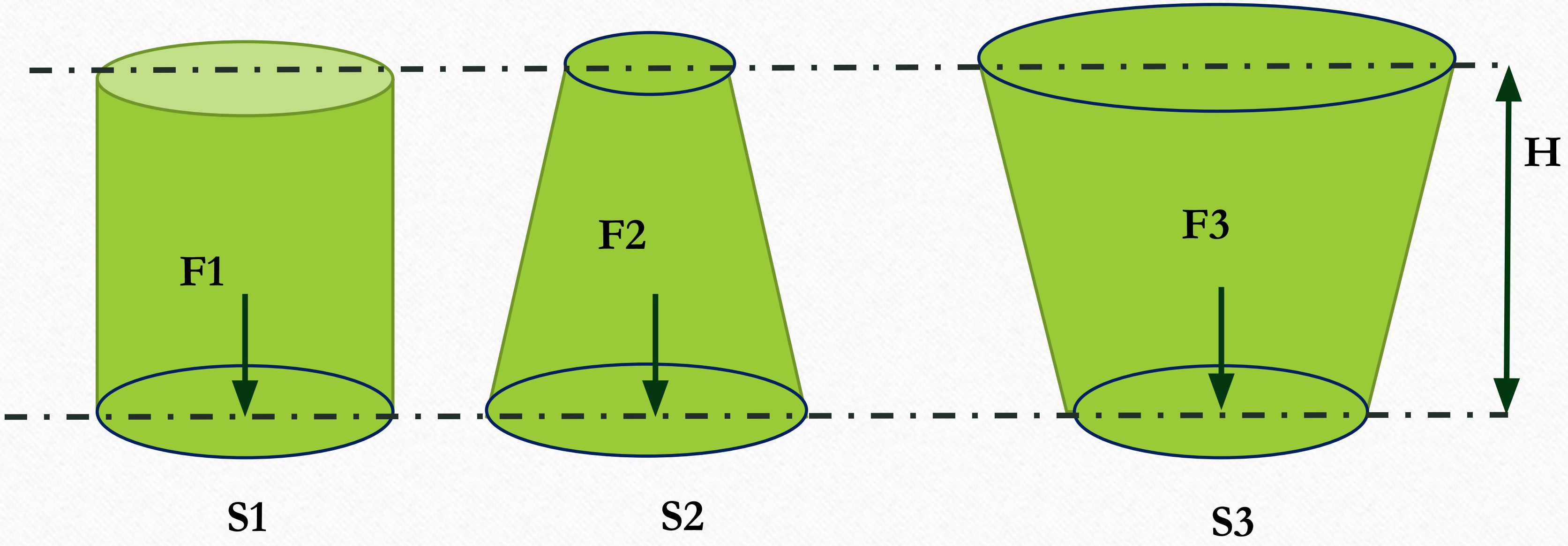
2.6. Сила давления на плоскую стенку

Известно, что: $J_x = J_{xc} + y_c^2 \cdot S$

$J_{x}c$ - момент инерции площади S относительно центральной оси, параллельной ox ($м^4$). Тогда координата точки приложения силы избыточного давления Fизб :

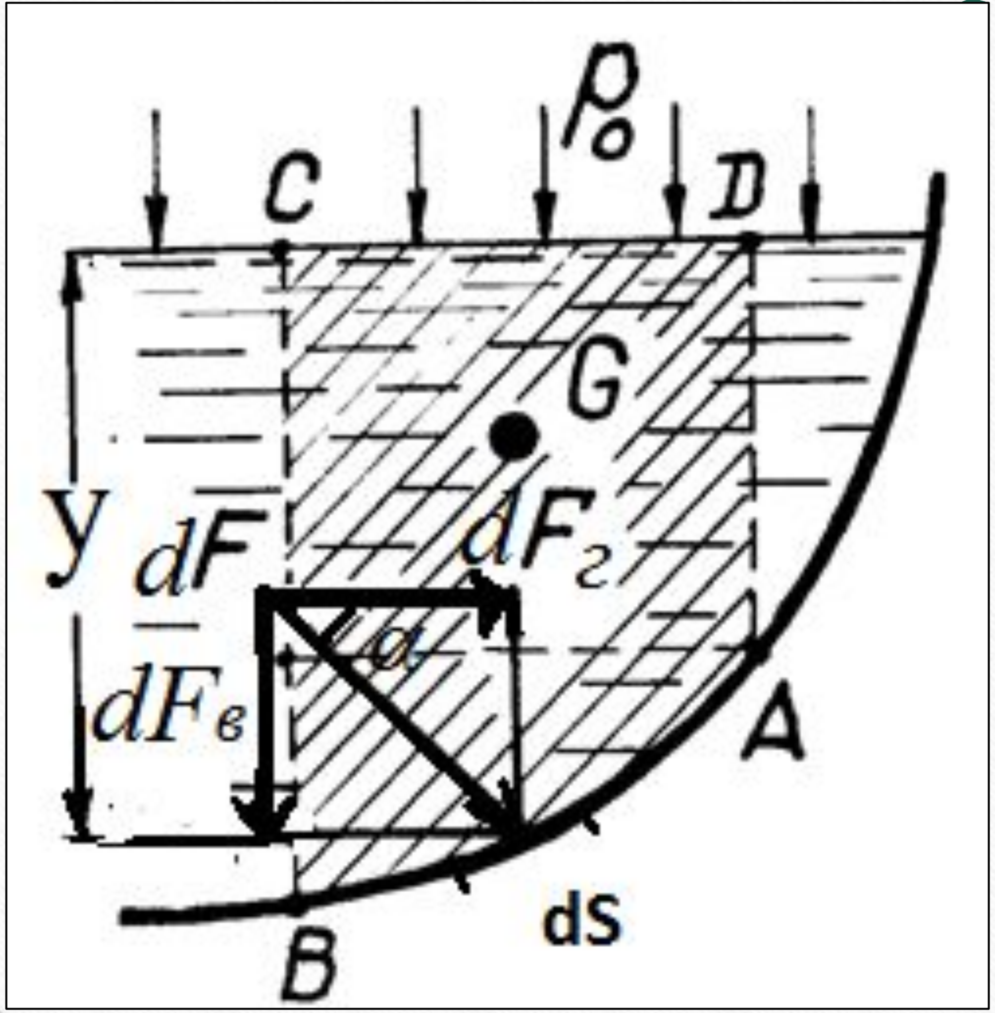
$$y_D = y_c + \frac{J_{xc}}{y_c \cdot S}$$

2.6. Сила давления на плоскую стенку



Сравните между собой силы давления на дно сосудов, если S1=S2=S3

2.7. Сила давления на криволинейную поверхность



$$dF_{изб.} = \rho g y \cdot dS$$

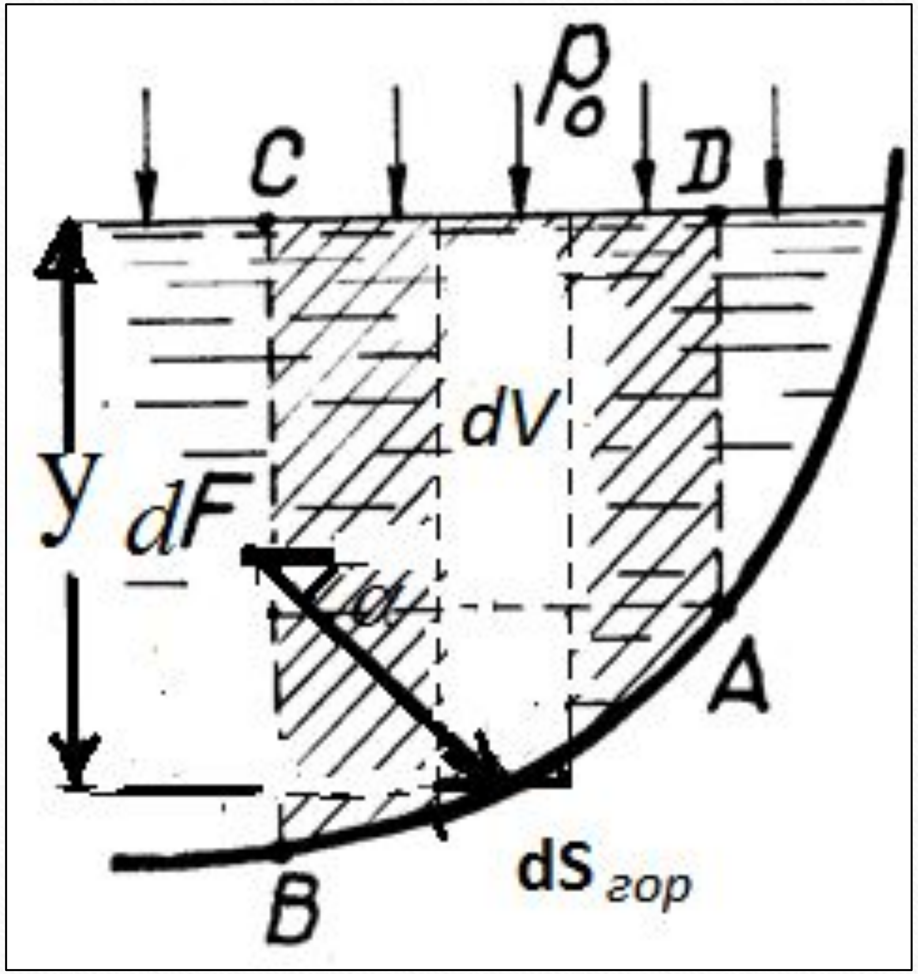
$$dF_{верт.} = \rho g y \cdot dS \cdot \sin\alpha$$

$$dF_{верт.} = \rho g y \cdot dS_{гор}$$

$$dF_{гор.} = \rho g y \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

$$dF_{гор.} = \rho g y \cdot dS_{верт}$$

2.7. Сила давления на криволинейную поверхность

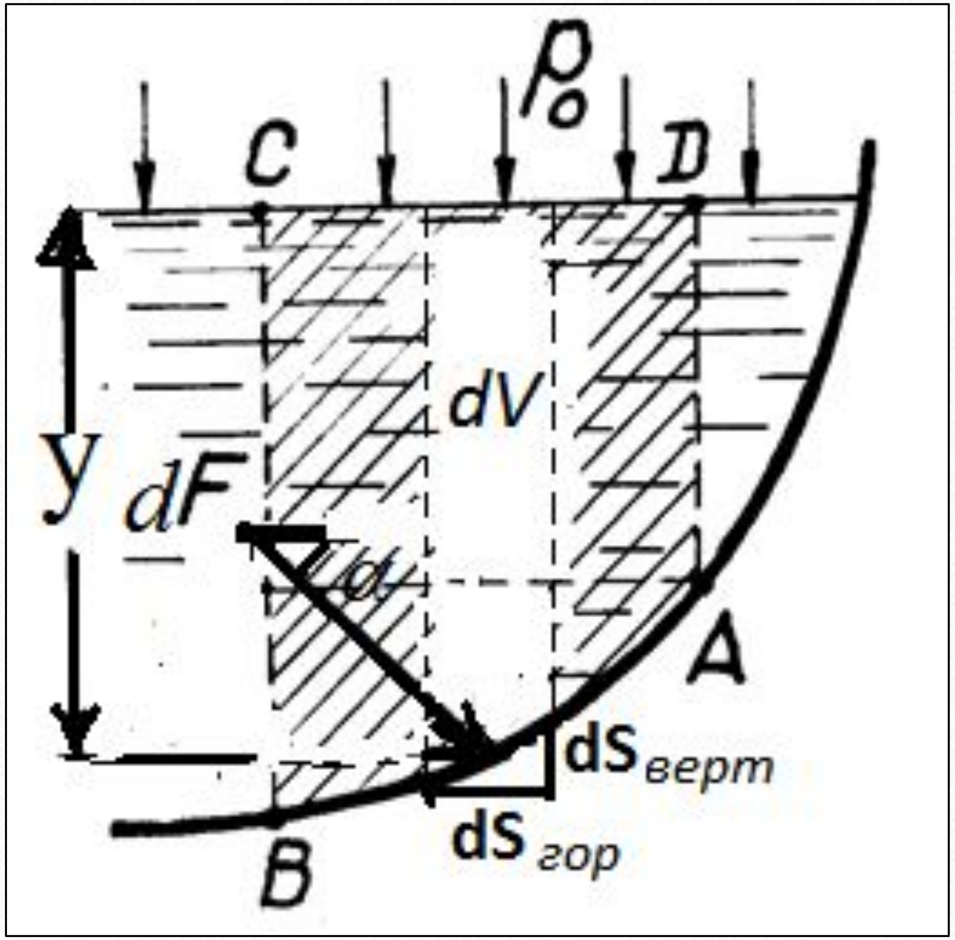


$$F_{верт.} = \int \rho g y \cdot dS_{гор} = \rho g V_m$$

где V_m – *объём тела давления.*

Это объём, ограниченный самой криволинейной поверхностью, свободной поверхностью жидкости (или её мысленным продолжением) и вертикальными поверхностями, проведёнными через края криволинейной поверхности.

2.7. Сила давления на криволинейную поверхность



$$dF_{гор.} = \rho g y \cdot dS_{верт}$$

$$F_{гор.} = \int \rho g y \cdot dS_{верт} = \rho g y_c \cdot S_{верт}$$

$$\int_s y \cdot dS_{верт} = y_c S_{верт}$$

где $S_{верт}$ – вертикальная проекция криволинейной поверхности;

y_c.- глубина погружения центра тяжести вертикальной проекции

2.7. Сила давления на криволинейную поверхность

$$F_{верт.} = \rho g V_{т}$$

$$F_{гор.} = \rho g y_{c} \cdot S_{верт}$$

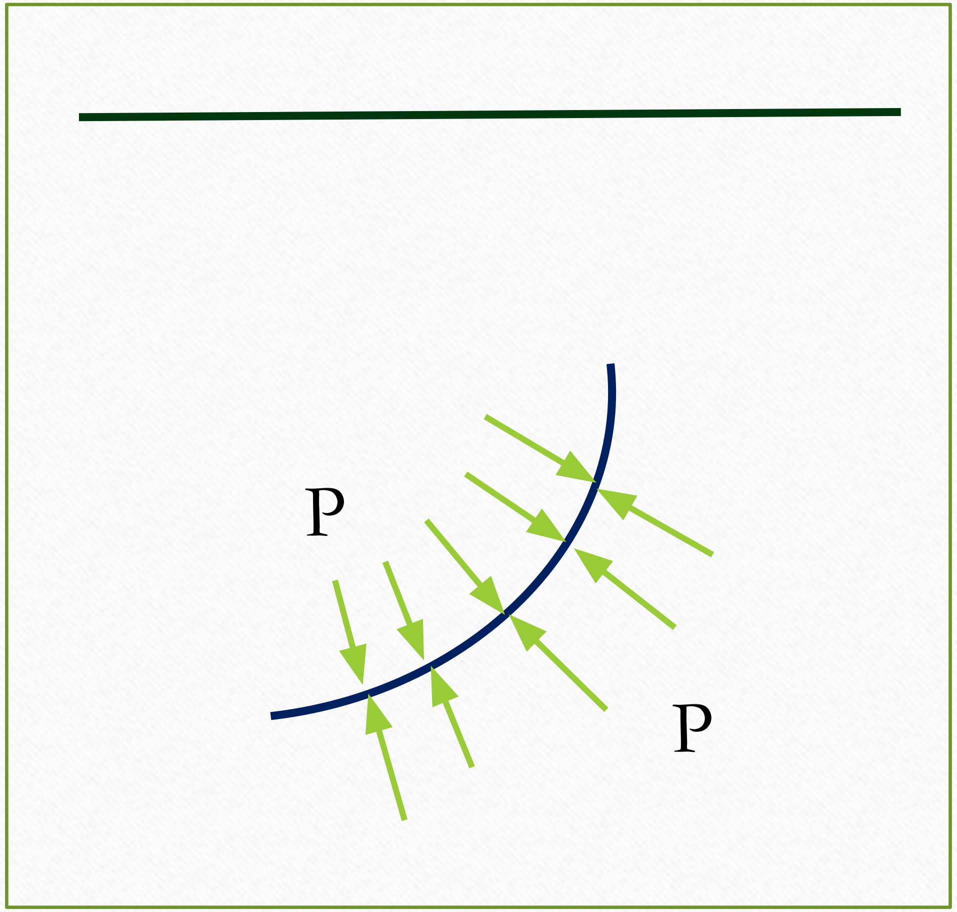
$$F_{рез} = \sqrt{F_{гор}^{2} + F_{верт}^{2}}$$

$$tg\alpha = \frac{F_{верт}}{F_{гор}}$$

где α – угол наклона результирующей силы избыточного давления к горизонту.

2.7. Сила давления на криволинейную поверхность

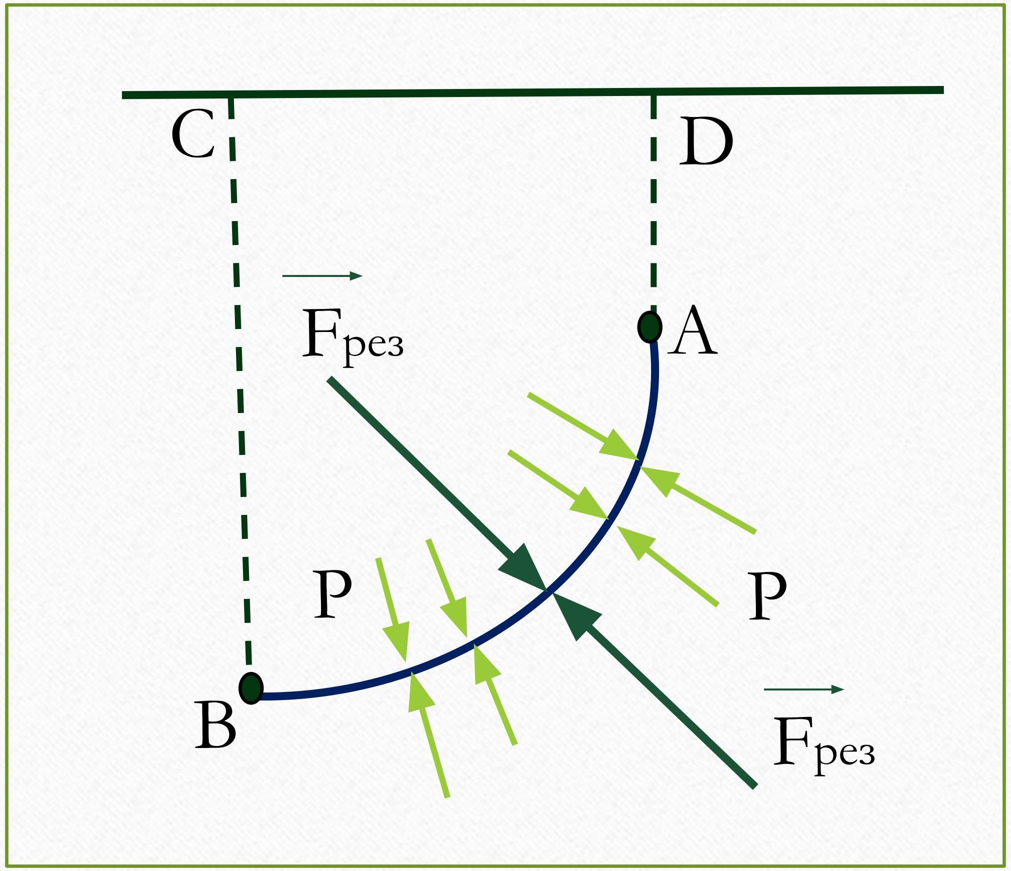
Если жидкость находится с обеих сторон от стенки, то в каждой точке давление слева и справа на стенку будет одинаково.



А, следовательно, и результирующая сила давления с выпуклой и вогнутой стороны будет одинаковой .

2.7. Сила давления на криволинейную поверхность

Поэтому результирующая сила давления с выпуклой стороны определяется по тем же формулам, что и с вогнутой стороны.



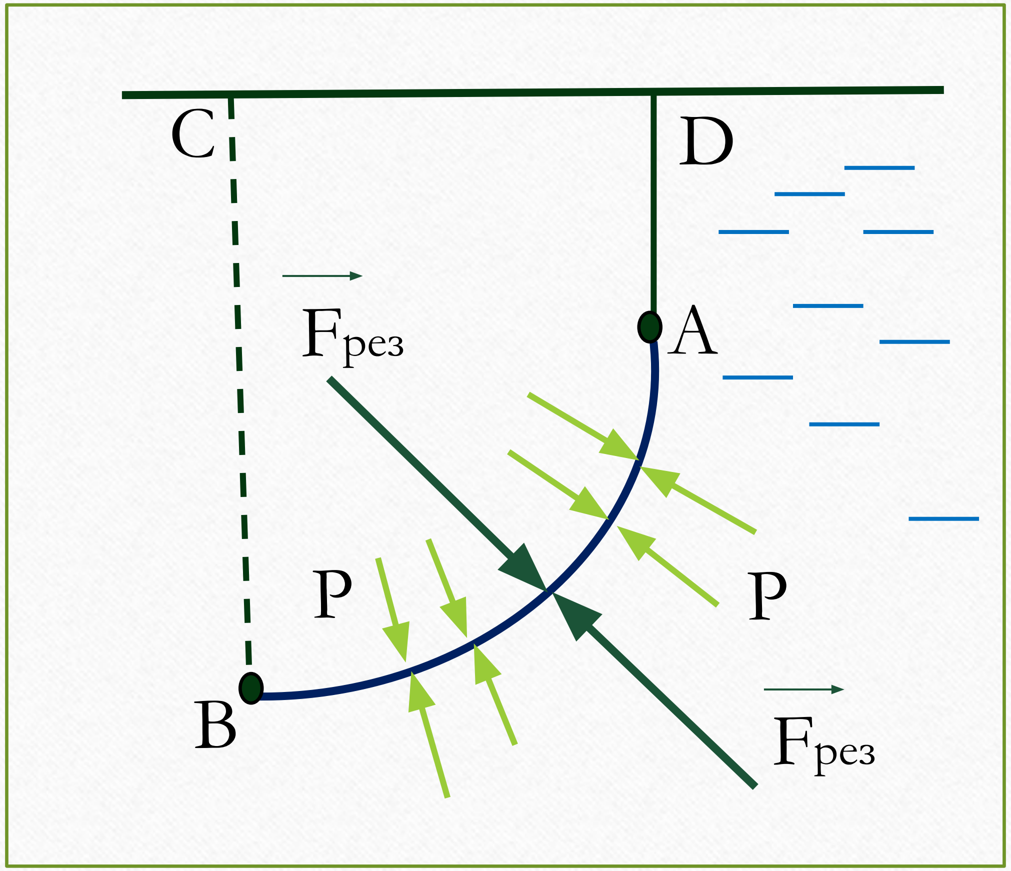
$$F_{верт.} = \rho g V_{т}$$

$$F_{гор.} = \rho g y_c \cdot S_{верт}$$

Где $V_{Т} = V_{ABCD}$, как с выпуклой, так и с вогнутой стороны стороны

2.7. Сила давления на криволинейную поверхность

Представим теперь, что жидкость находится только с выпуклой стороны, а с вогнутой стороны находится воздух.



$$F_{верт.} = \rho g V_m$$

$$F_{гор.} = \rho g y_c \cdot S_{верт}$$

Где Vт = VABCD , хотя жидкости в этом объёме нет!

2.7. Сила давления на криволинейную поверхность

$$F_{верт.} = \rho g V_m$$

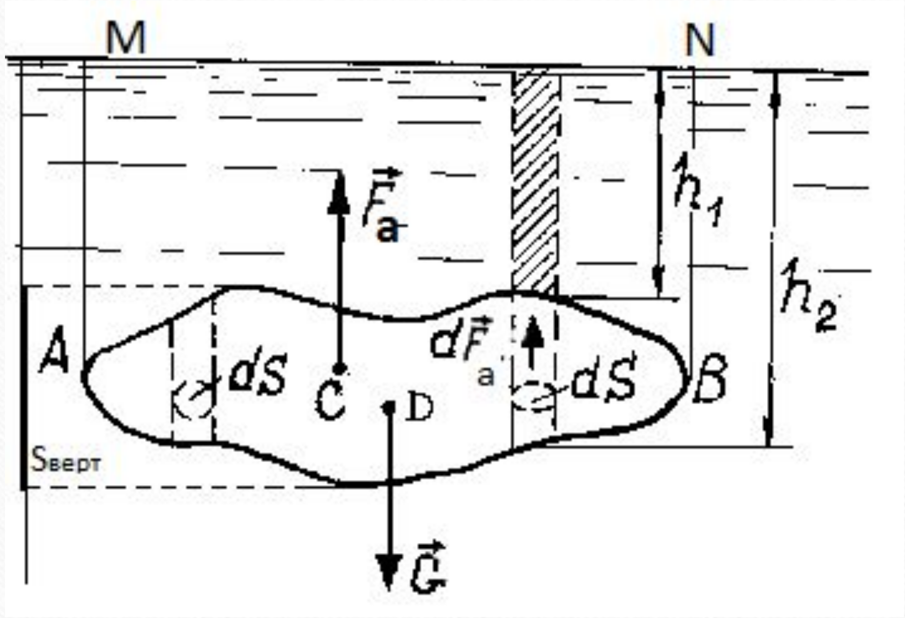
$$F_{гор.} = \rho g y_c \cdot S_{верт}$$

$$tg\alpha = \frac{F_{верт}}{F_{гор}}$$

$$F_{рез} = \sqrt{F_{гор}^2 + F_{верт}^2}$$

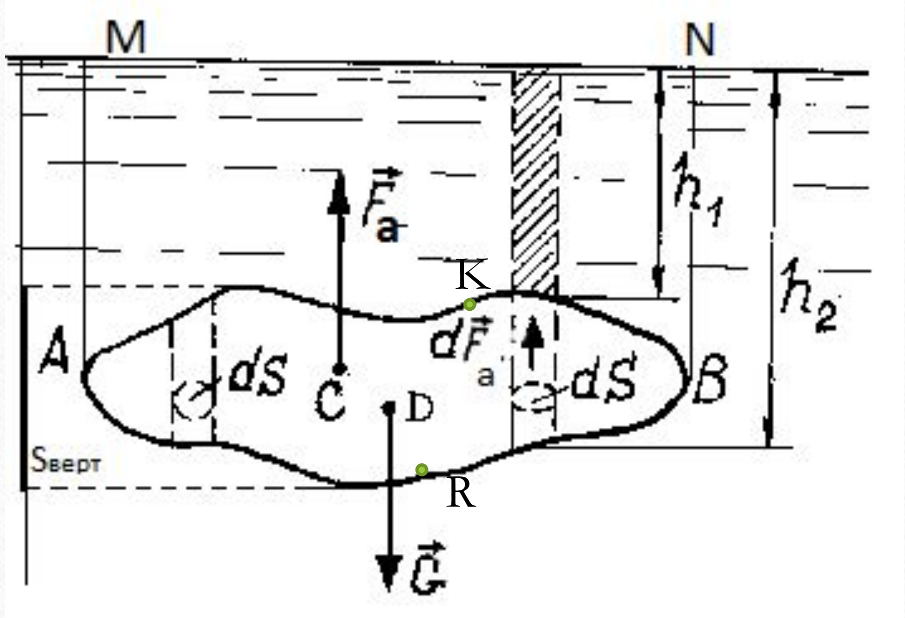
где α – угол наклона результирующей силы избыточного давления к горизонту.

2.8. Закон Архимеда



На погруженное в жидкость или газ тело действует выталкивающая сила, равная ***весу*** вытесненной им жидкости и приложенная в центре тяжести тела.

2.8. Закон Архимеда



$$F_{гор.}\Big|_{слева} = F_{гор.}\Big|_{справа}$$

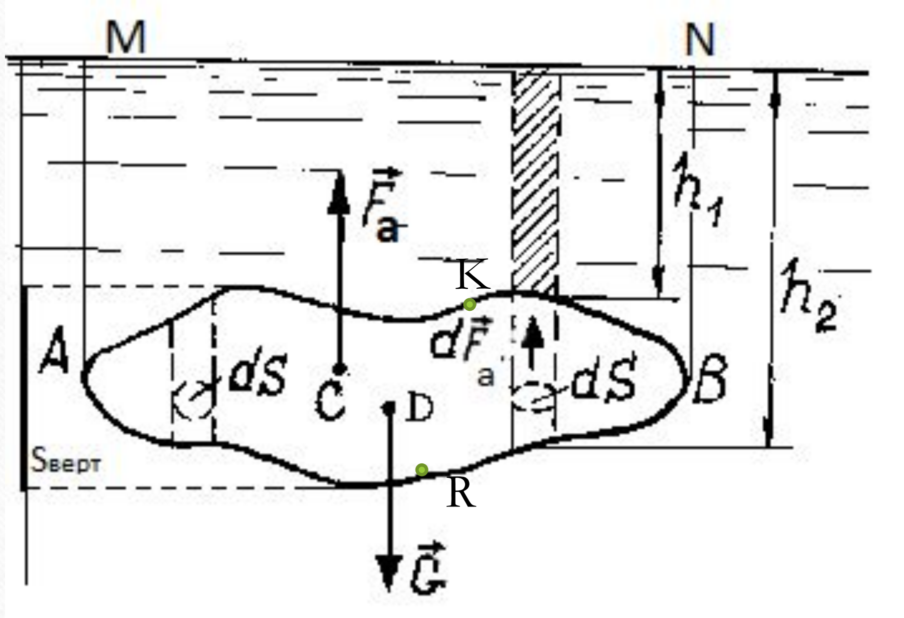
т.к. $S_{верт}$ одинаковы

На поверхность АКВ действует сила: $F_{AKB} = \rho g V_{MAKBN}$

На поверхность ARB действует сила: $F_{ARB} = \rho g V_{MARBN}$

Результирующая сила, действующая на тело со стороны жидкости или газа: $F_A = \rho_{ж} g (V_{MARBN} - V_{MAKBN}) = \rho_{ж} g V_{тела} = m_{ж} \cdot g$

2.9. Плавание тел



Собственный вес твердого тела G приложен в центре тяжести тела D:

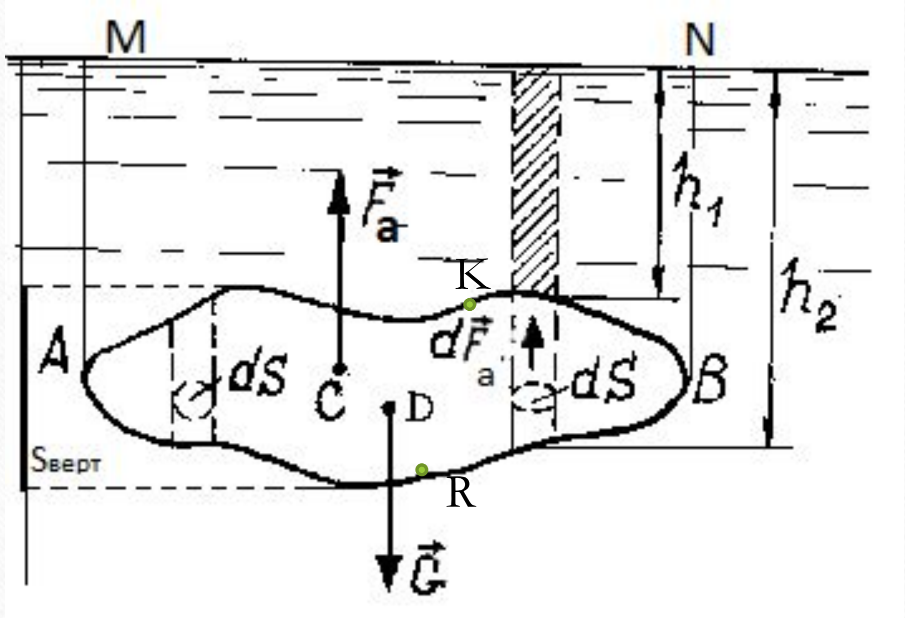
$$G = \rho_m g V$$

Сила Архимеда приложена в геометрическом центре тяжести тела $F_A = \rho_ж g V_{тела}$

Результирующая сила, действующая на тело:

$$F_{рез} = \rho_ж g V_{тела} - \rho_m g V_{тела} = g V_{тела} (\rho_ж - \rho_m)$$

2.9. Плавание тел



Если $\rho_{ж} > \rho_{т}$

$F_{рез} > 0$ ⟶ Тело всплывает

Если $\rho_{ж} < \rho_{т}$

$F_{рез} < 0$ ⟶ Тело тонет

Если: $\rho_{ж} = \rho_{т}$ ⟶ $F_{рез} = 0$ ⟶ Тело в равновесии

Контрольные вопросы

1. Что такое гидростатическое давление?
2. Какими свойствами обладает гидростатическое давление?
3. Основное уравнение гидростатики
4. Закон Паскаля
5. Как определить силу гидростатического давление на плоскую стенку?
6. Как определить силу гидростатического давления на криволинейную поверхность?
7. Сформулируйте закон Архимеда.

Глава 3.
ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ

Кинематика описывает движение жидкости без связи с силами, определяющими его.

3.1. Способы задания движения жидкости

Существует два основных способа задания движения жидкости:

метод Лагранжа и метод Эйлера

Метод Лагранжа

Для каждой мысленно выделенной i-й частицы жидкости определяется траектория её движения:

$$x_i = x_i(t) \longrightarrow w_x = x'_t \longrightarrow a_x = x''_t$$

$$y_i = y_i(t) \longrightarrow w_y = y'_t \longrightarrow a_y = y''_t$$

$$z_i = z_i(t) \longrightarrow w_z = z'_t \longrightarrow a_z = z''_t$$

Метод Эйлера

Метод Эйлера, заключается в задании поля скоростей:

$$w_x = w_x(x, y, z, t)$$

$$w_y = w_y(x, y, z, t)$$

$$w_z = w_z(x, y, z, t)$$

(т.е. в задании зависимостей трёх проекций скорости от координат и времени)

Основное отличие в методах Лагранжа и Эйлера заключается в том, что в первом случае *x*, *y*, *z* – переменные координаты движущейся частицы, а во втором – это координаты фиксированных точек пространства, через которые в данный момент времени проходят частицы жидкости.

Метод Эйлера

Метод Эйлера, заключается в задании поля скоростей:

$$w_x = w_x(x, y, z, t)$$

$$w_y = w_y(x, y, z, t)$$

$$w_z = w_z(x, y, z, t)$$

$$\Longrightarrow \quad a_x = \frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z\frac{\partial w_x}{\partial z};$$

Проекции ускорения на координатные оси:

$$a_x = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z};$$

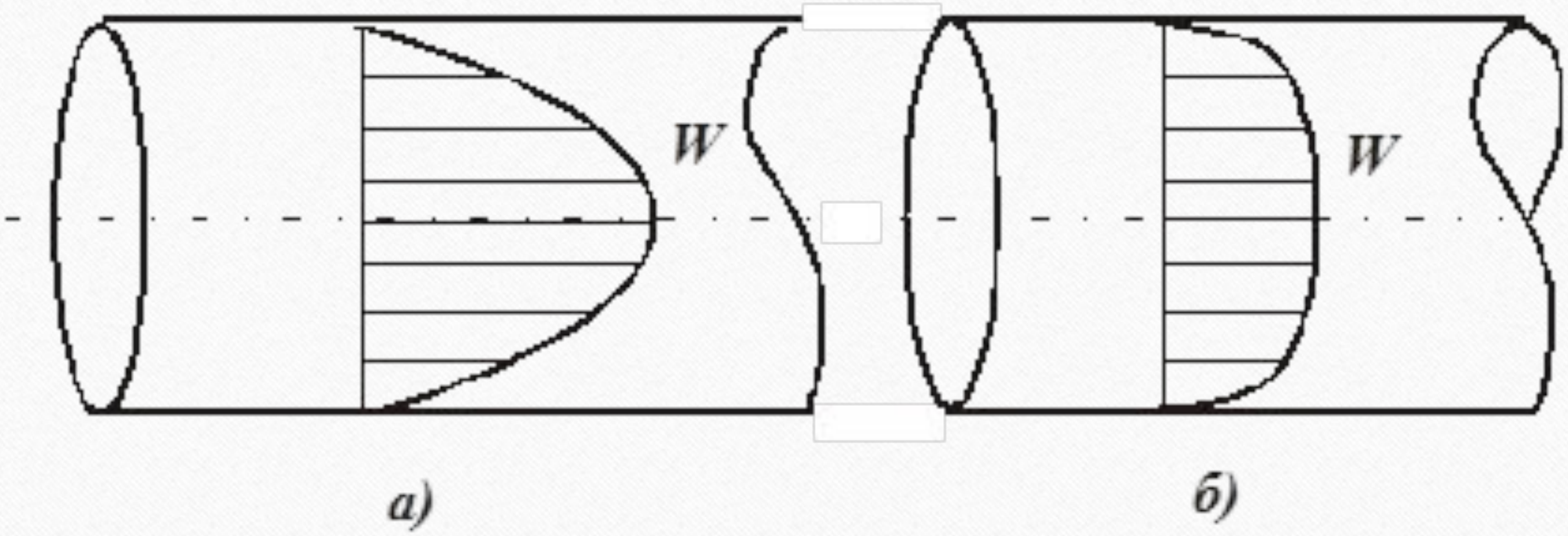
$$a_y = \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Члены $\dfrac{\partial w_x}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w_y}{\partial t}$, $\dfrac{\partial w_z}{\partial t}$

показывают интенсивность изменения скорости во времени для частицы, проходящей точку с координатами *x, y, z* в момент времени *t* – это ***локальные или местные*** **ускорения .**

Остальные три члена в каждом уравнении показывают интенсивность изменения скорости в пространстве, т.е. определяют ускорение частицы в связи с её переходом в соседнюю точку с другим значением скорости - это *конвективные ускорения* частиц.



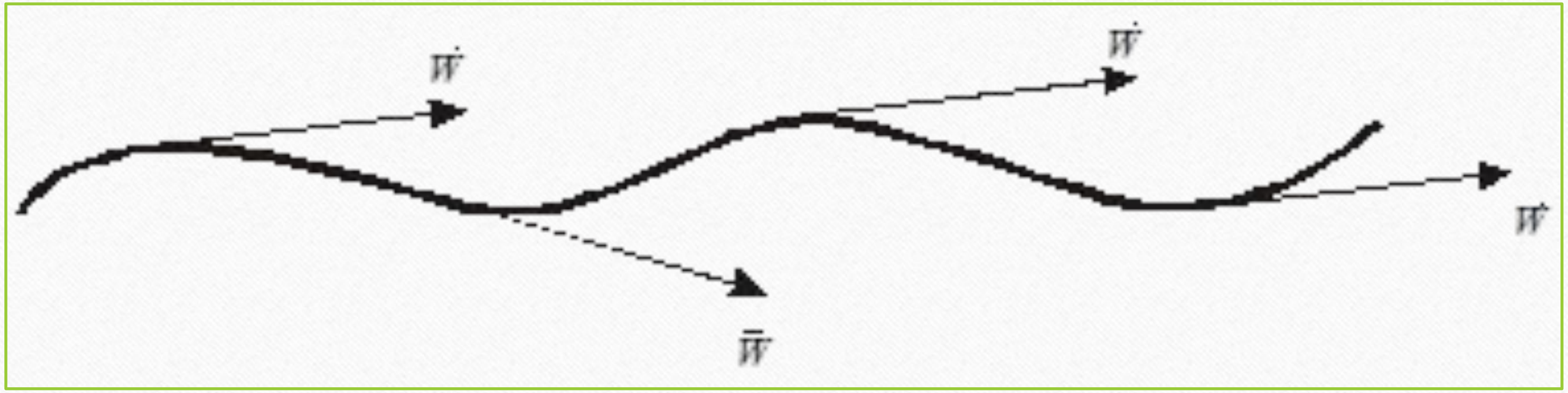
Конвективные ускорения показывают интенсивность изменения скорости **в пространстве**, тогда как локальные ускорения показывают интенсивность изменения скорости **во времени**

3.2. Поток жидкости и его характеристики

Если параметры движения не зависят от времени, то такое движение называется ***стационарным***.

Если параметры движения зависят от времени, то такое движение называется ***нестационарным***.

Линией тока называется такая линия в потоке жидкости, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к этой линии

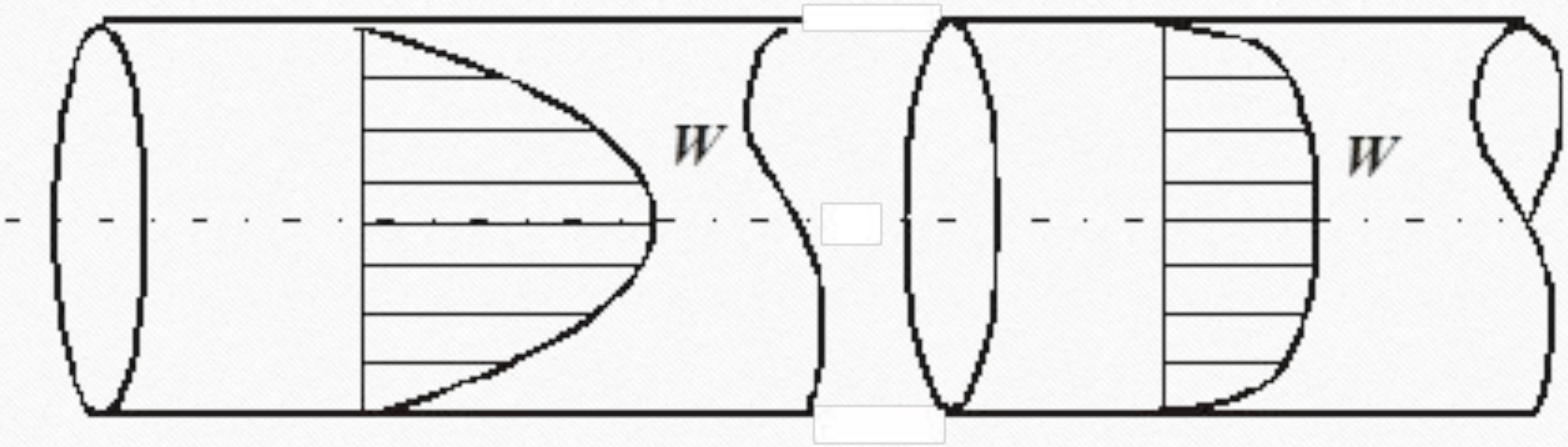


След движения частицы называется ее ***траекторией.***
В случае стационарного поля скоростей линии тока и траектории совпадают.
Скорость жидкости в данной точке потока называется **местной скоростью.**

$$\overline{w} = \frac{\int_t w\,dt}{\Delta t}$$

- средняя по времени скорость в данной точке

Распределение векторов скорости по нормальному сечению потока называется ***профилем скорости.***

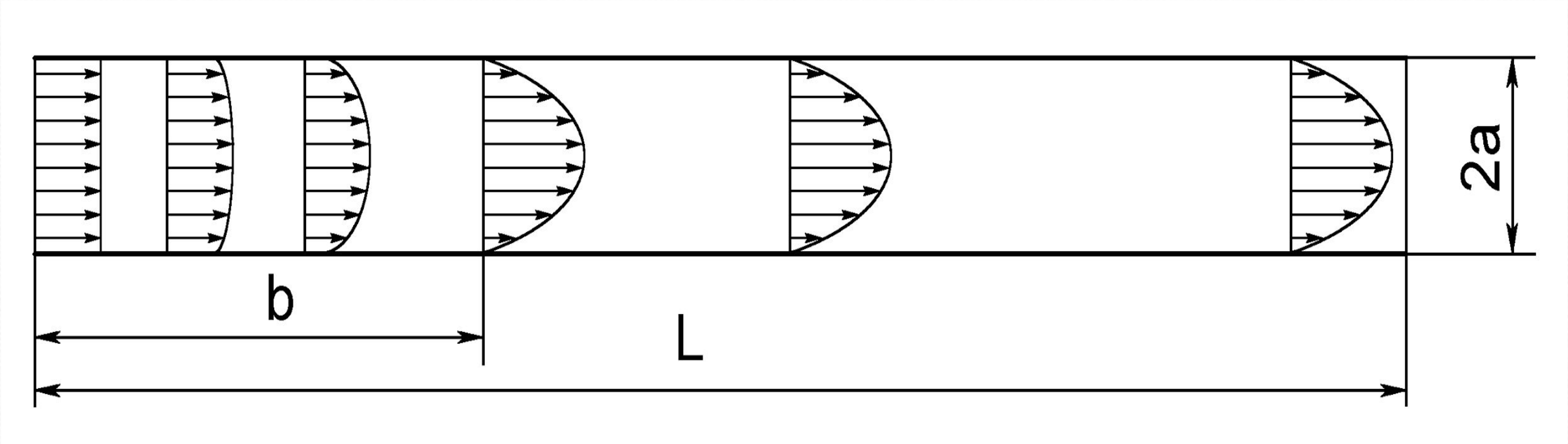


а)

б)

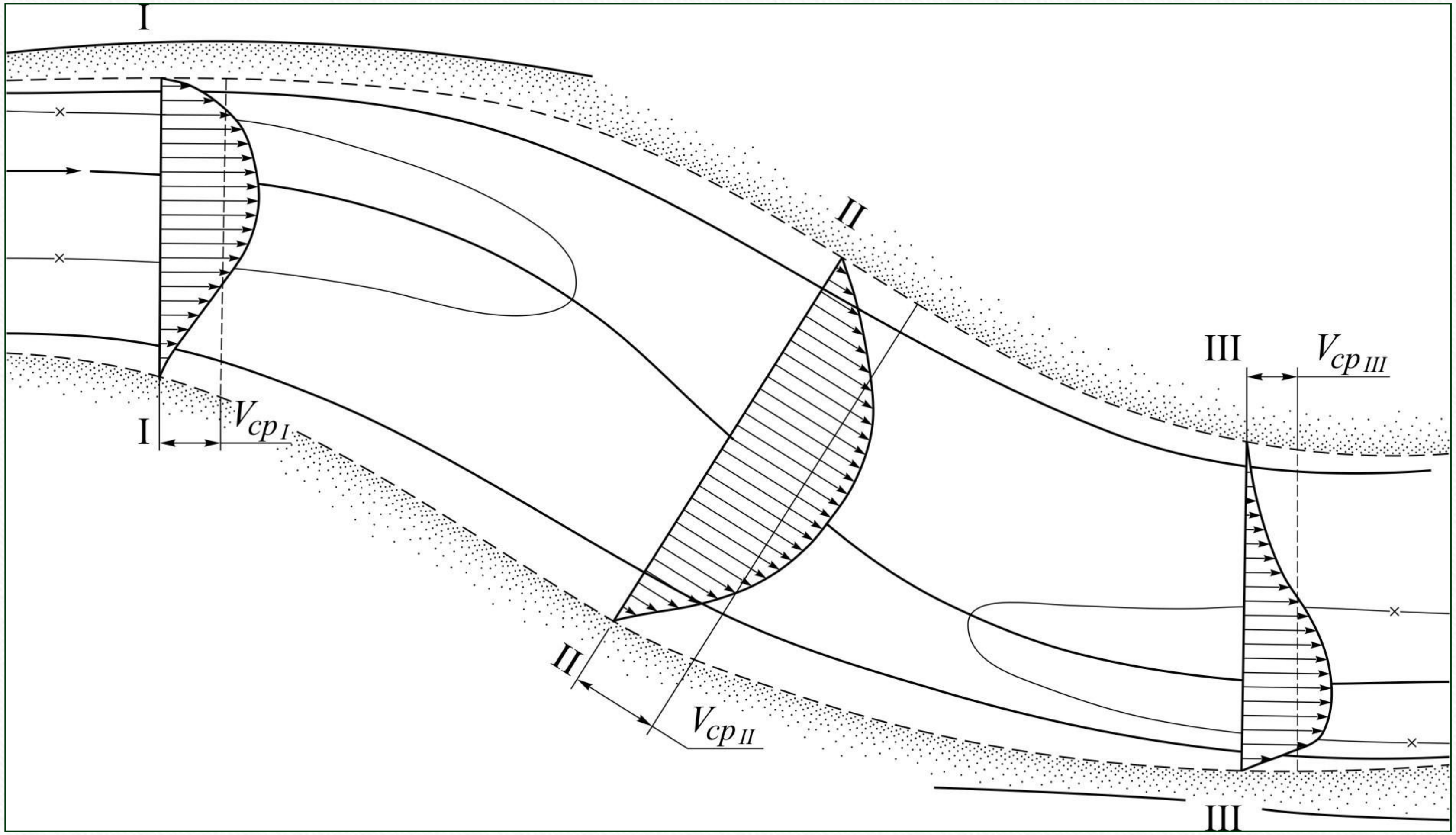
Движение, при котором профиль скоростей во всех сечениях одинаков, называется ***установившимся.***

Установившееся и неустановившееся движение



Вблизи входного участка трубы движение неустановившееся, а в основной части трубы - установившееся движение

Установившееся и неустановившееся движение



Расход – это количество жидкости или газа, протекающее в единицу времени через поперечное сечение потока.

Различают ***объёмный Q***, *м³/с* и ***массовый G***, *кг/с* расход жидкости:

$$Q = \frac{V}{t}; \qquad G = \frac{M}{t}$$

$$Q = \int_S w \cdot dS = w_{cp} \cdot S$$

$$w_{cp} = \frac{\int_S w dS}{S}$$ - ***средняя по сечению*** скорость потока

- **Пространственным** называется движение жидкости, параметры которого зависят от трех координат. **Плоским** называется движение жидкости, параметры которого зависят от двух координат. **Линейным** называется движение жидкости, параметры которого зависят лишь от одной координаты.

Движение, при котором отсутствует перемешивание между слоями жидкости, линии тока плавные параллельные друг другу, называется **ламинарным** или слоистым.

Движение, при котором происходит перемешивание слоёв, частицы жидкости движутся хаотически, параметры потока пульсируют относительно своих средних значений, называется **турбулентным**

3.3. Уравнение неразрывности движения жидкости

Уравнение неразрывности выражает закон сохранения массы применительно к потоку движущейся жидкости или газа .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} = 0$$

Для частных случаев движения жидкости уравнение неразрывности будет упрощаться.

- для стационарного движения несжимаемой жидкости:

$$div(\vec{w}) = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

- для плоского стационарного движения несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

- Для линейного стационарного движения сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} = 0$$

Для стационарного потока жидкости в непроницаемом канале (все частицы жидкости движутся в одном направлении) интегрирование уравнения неразрывности даёт уравнение сплошности в гидравлической форме:

$$\boxed{G = \int_S \rho w \cdot dS = (\rho w)_{cp} \cdot S = const}$$

Следовательно, массовый расход жидкости G через любое нормальное сечение потока S – **величина постоянная**.

Для несжимаемой жидкости объёмный расход через любое нормальное сечение потока - также величина постоянная:

$$Q=w_{ср}S=const$$

Откуда, для любых двух сечений потока: $w_1S_1= w_2S_2$

Следовательно, $w_2= w_1S_1/ S_2.$

Контрольные вопросы

1. Какое движение называется стационарным?
2. Какое движение называется нестационарным?
3. Какое движение называется установившимся?
4. Что такое линия тока?
5. Что такое профиль скорости?
6. Какое движение называется плоским?
7. Что такое расход?
8. Что такое местная скорость?
9. Напишите уравнение сплошности в гидравлической форме

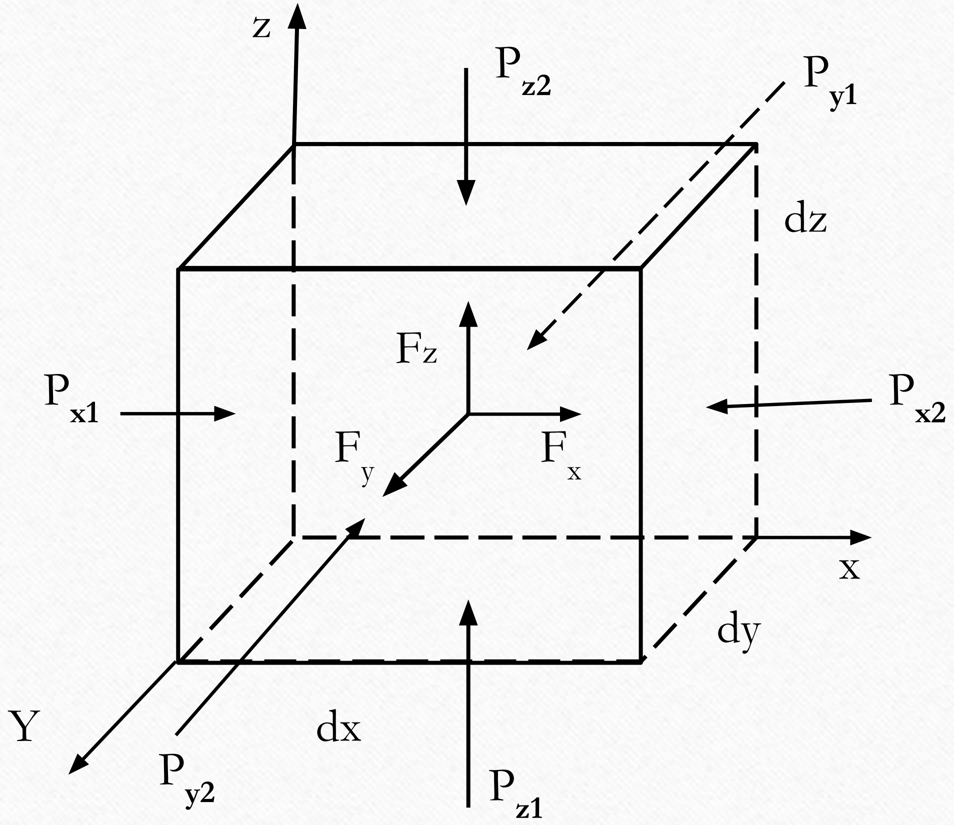
4. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Идеальной называется невязкая и несжимаемая жидкость.

4.1. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)

Уравнения движения Эйлера выражают 2-й закон Ньютона применительно к потоку идеальной жидкости.

Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера).



Силы давления на левую и правую грани:

$$\vec{P}_{x1} = (p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2})dydz$$

$$\vec{P}_{x2} = (p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2})dydz$$

Проекция массовой силы на ось x:

$$F_x = f_x \rho \cdot dxdydz$$

где f_x - вектор плотности распределения массовых сил

Уравнения Эйлера выражают 2-й закон Ньютона применительно к жидкостям и газам

Уравнение движения выделенного объема жидкости в проекции на ось x :

$$\vec{F}_x - \vec{P}_{x1} + \vec{P}_{x2} = \rho dxdydz \frac{d\vec{w}_x}{dt}$$

$$\rho f_x dxdydz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2}\right)dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{2}\right)dydz = \rho dxdydz \frac{dw_x}{dt} \Big| : \rho dxdydz \Rightarrow$$

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dw_x}{dt}$$

Аналогично:

$$f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dw_y}{dt}$$

$$f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw_z}{dt}$$

Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера).

$$\begin{cases} f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{dw_x}{dt} \\[2ex] f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{dw_y}{dt} \\[2ex] f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{dw_z}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial w_x}{\partial t} + w_x\dfrac{\partial w_x}{\partial x} + w_y\dfrac{\partial w_x}{\partial y} + w_z\dfrac{\partial w_x}{\partial z}; \\[2ex] f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial w_y}{\partial t} + w_x\dfrac{\partial w_y}{\partial x} + w_y\dfrac{\partial w_y}{\partial y} + w_z\dfrac{\partial w_y}{\partial z} \\[2ex] f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial w_z}{\partial t} + w_x\dfrac{\partial w_z}{\partial x} + w_y\dfrac{\partial w_z}{\partial y} + w_z\dfrac{\partial w_z}{\partial z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{dw_x}{dt} \\ f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{dw_y}{dt} \\ f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{dw_z}{dt} \end{cases} \Rightarrow \vec{f} - \frac{1}{\rho}\,grad\,p = \frac{d\vec{w}}{dt}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0$$

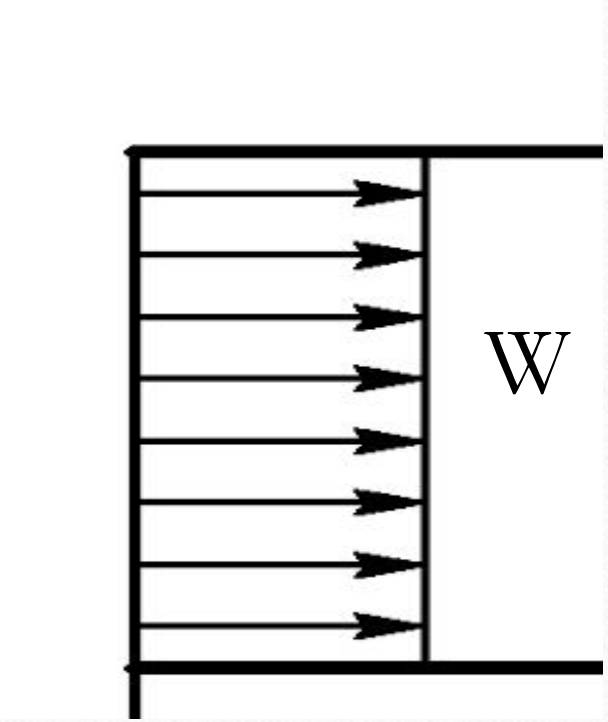
Уравнение неразрывности идеальной жидкости нужно присоединить к системе, чтобы она была замкнута.

Для того, чтобы система была замкнутой, к ней необходимо присоединить уравнение неразрывности.

Граничные условия при обтекании невязкой жидкостью твердых поверхностей :

- условие скольжения - на твёрдой стенке касательная к поверхности составляющая скорости жидкости равна скорости в потоке (т.е. стенка не оказывает тормозящего влияния на идеальную жидкость)
- условие непротекания - равенство нулю на стенке нормальной составляющей скорости.

Условие скольжения



на твёрдой стенке касательная к поверхности составляющая скорости жидкости равна скорости в потоке

4.2. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Пусть идеальная жидкость движется в потенциальном поле массовых сил с потенциалом П.

Это означает, что существует такая функция П , что:

$$\vec{f} = -grad\Pi$$

$\vec{f}$ - вектор плотности распределения массовых сил

Это означает, что:

$$f_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \qquad f_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} \qquad f_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Подставим эти выражения в уравнения движения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dw_x}{dt} \\
-\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dw_y}{dt} \\
-\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw_z}{dt}
\end{aligned}\right]
\begin{aligned}
&\bullet dx \\ &+ \\ &\bullet dy \\ &+ \\ &\bullet dz
\end{aligned}
\Longrightarrow
\frac{d\vec{w}}{dt} = -grad\left(\Pi + \frac{p}{\rho}\right)$$

***Или*:**

$$d\left(\frac{w^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

Получим:

$$-\left(\frac{\partial \varPi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varPi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varPi}{\partial z}dz\right)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)=$$

$$=\frac{dw_x}{dt}dx+\frac{dw_y}{dt}dy+\frac{dw_z}{dt}dz$$ **; заметим, что:**

$$\frac{\partial \varPi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varPi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varPi}{\partial z}dz=d\varPi$$

$$\frac{dw_x}{dt}dx+\frac{dw_y}{dt}dy+\frac{dw_z}{dt}dz=d\left(\frac{w^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp$$

$$\Rightarrow\quad d\left(\frac{w^2}{2}+\Pi+\frac{p}{\rho}\right)=0$$

Обозначим $B = \frac{w^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho}$ - **трёхчлен Бернулли**

Тогда: $dB = 0$

Следовательно: $$B = \frac{w^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho} = const$$

Следовательно, *вдоль линии тока трехчлен Бернулли сохраняет постоянное значение.*

Это выражение представляет собой закон Бернулли для идеальной жидкости, движущейся в поле любых потенциальных сил с потенциалом П.

Рассмотрим частный случай, когда идеальная жидкость движется в поле сил тяжести, других массовых сил нет, ось z направлена вертикально вверх, тогда:

$$\vec{f} = -\vec{g}$$

С другой стороны: $f_z = -\frac{\partial П}{\partial z}$, **откуда:**

$$g = \frac{\partial П}{\partial z} \Rightarrow П = gz + C,$$

где С – константа интегрирования.

Подставим *П* в уравнение Бернулли:

$$\boxed{B = \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const}$$

- закон Бернулли для тяжёлой несжимаемой жидкости.

Закон Бернулли является частным случаем закона сохранения энергии применительно к потоку движущейся жидкости.

$\frac{w^2}{2}$ - **удельная (Дж/кг) кинетическая энергия потока;**

$\frac{p}{\rho}$ - **удельная (Дж/кг) потенциальная энергия сил давления;**

gz - **удельная (Дж/кг) потенциальная энергия положения жидкости в поле сил тяжести**

B - **полная удельная энергия потока (Дж/кг) - <u>величина постоянная</u>**

Уравнение Бернулли для потока идеальной жидкости

$$\boxed{B = \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const}$$

Для двух произвольных сечений потока идеальной жидкости на любой линии тока будет справедливо уравнение

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2$$

Уравнение Бернулли для потока идеальной жидкости

$$\boxed{B = \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const}$$

Умножим левую и правую часть уравнения на ρ:

$$\boxed{P^* = \frac{\rho w^2}{2} + p + \rho gz = const} \quad , \text{Па}$$

$$\frac{\rho w_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho w_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2$$

Здесь

$\dfrac{\rho w^2}{2}$ - **скоростной напор, Па;**

p - **гидростатическое давление, Па;**

$\rho g z$ - **давление столба жидкости высотой z, Па;**

P^* - **полный напор, Па.**

Уравнение Бернулли для потока идеальной жидкости

$$\boxed{B = \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const}$$

Разделим левую и правую часть уравнения на g:

$$\boxed{H^* = \frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = const} \quad \text{, м}$$

$$\frac{w_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

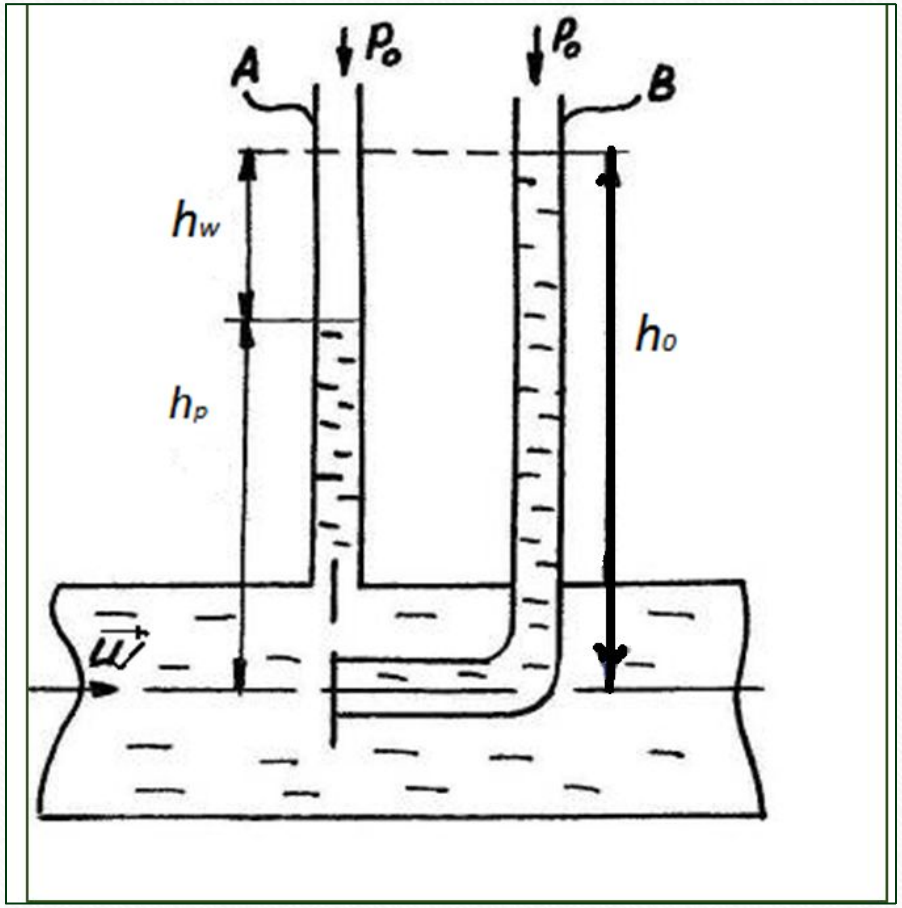
Здесь

$\frac{w^2}{2g}$ - Скоростная высота, м;

$\frac{p}{\rho g}$ - Пьезометрическая высота, м

z - Нивелирная высота, м (это расстояние от произвольной горизонтальной плоскости сравнения до данной линии тока);

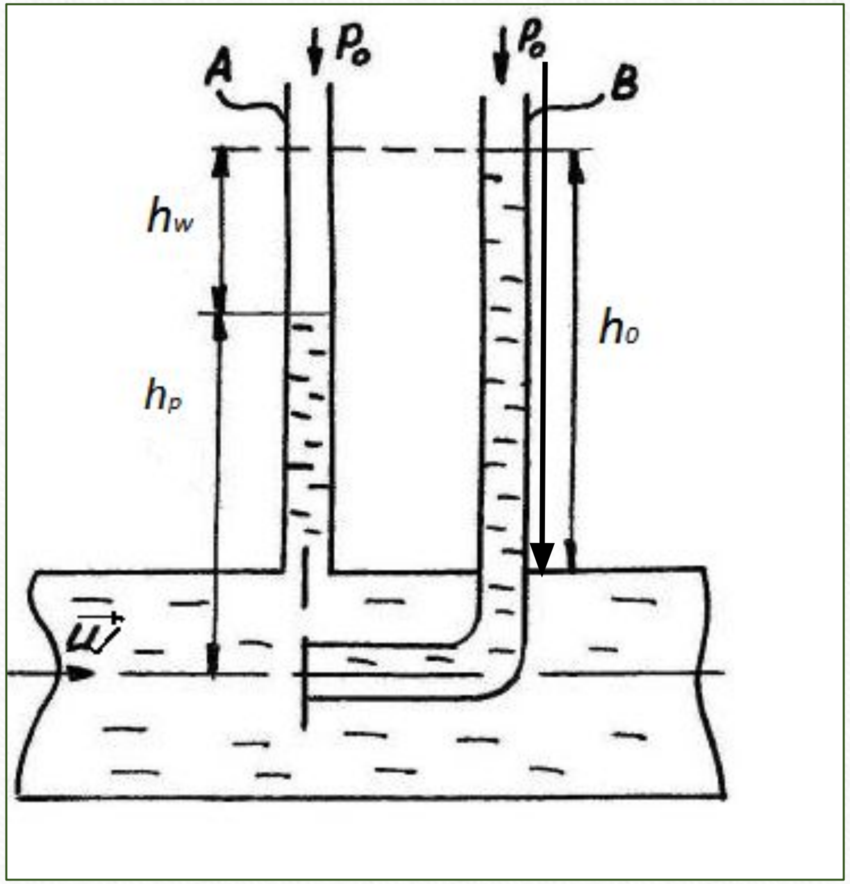
H^* - гидравлическая высота (полный напор в метрах).



$$h_w = \frac{w^2}{2g}$$ - Скоростная высота, м;

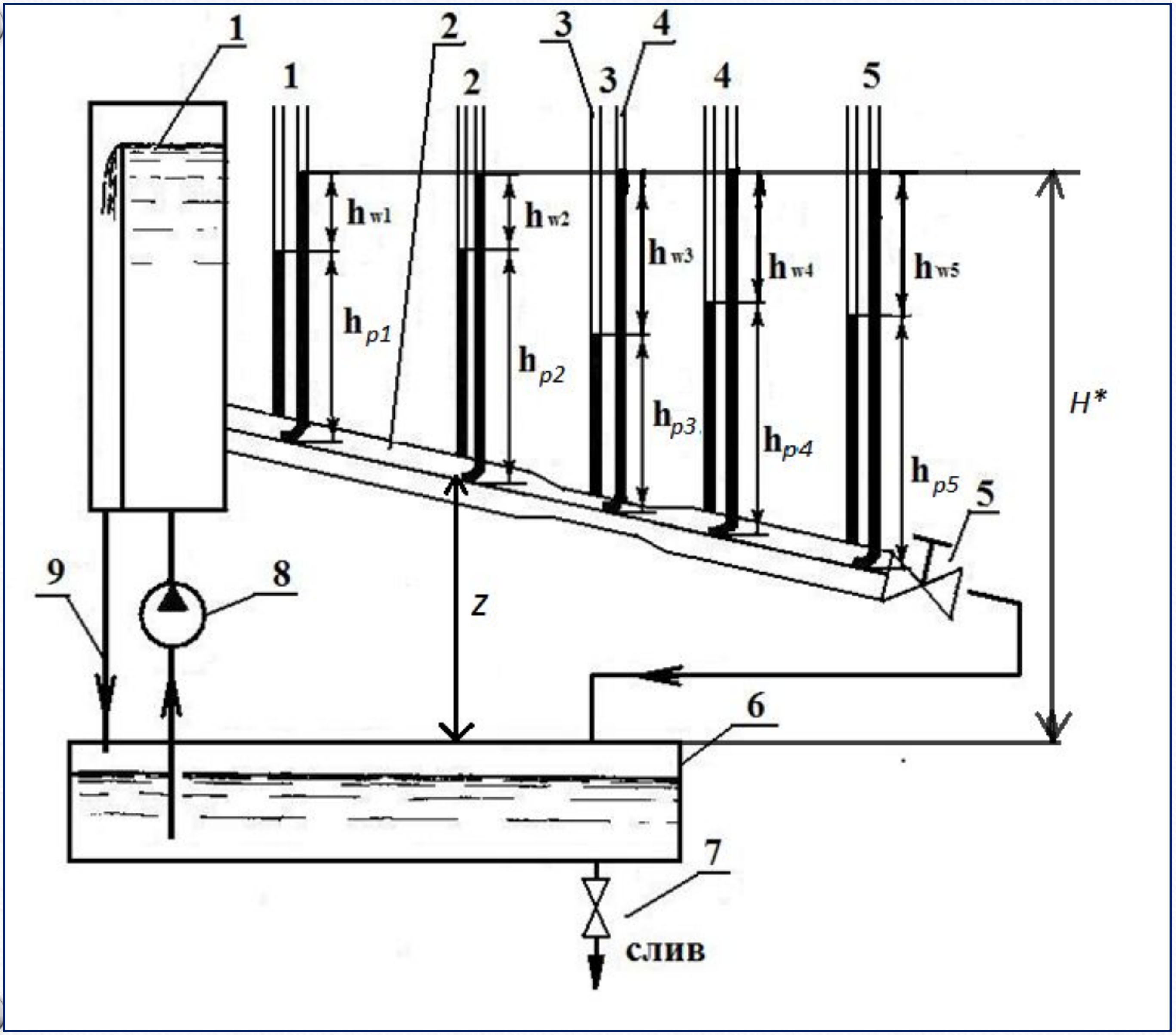
$$h_p = \frac{p}{\rho g}$$ - Пьезометрическая высота, м.

В движущейся жидкости величина давления зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.

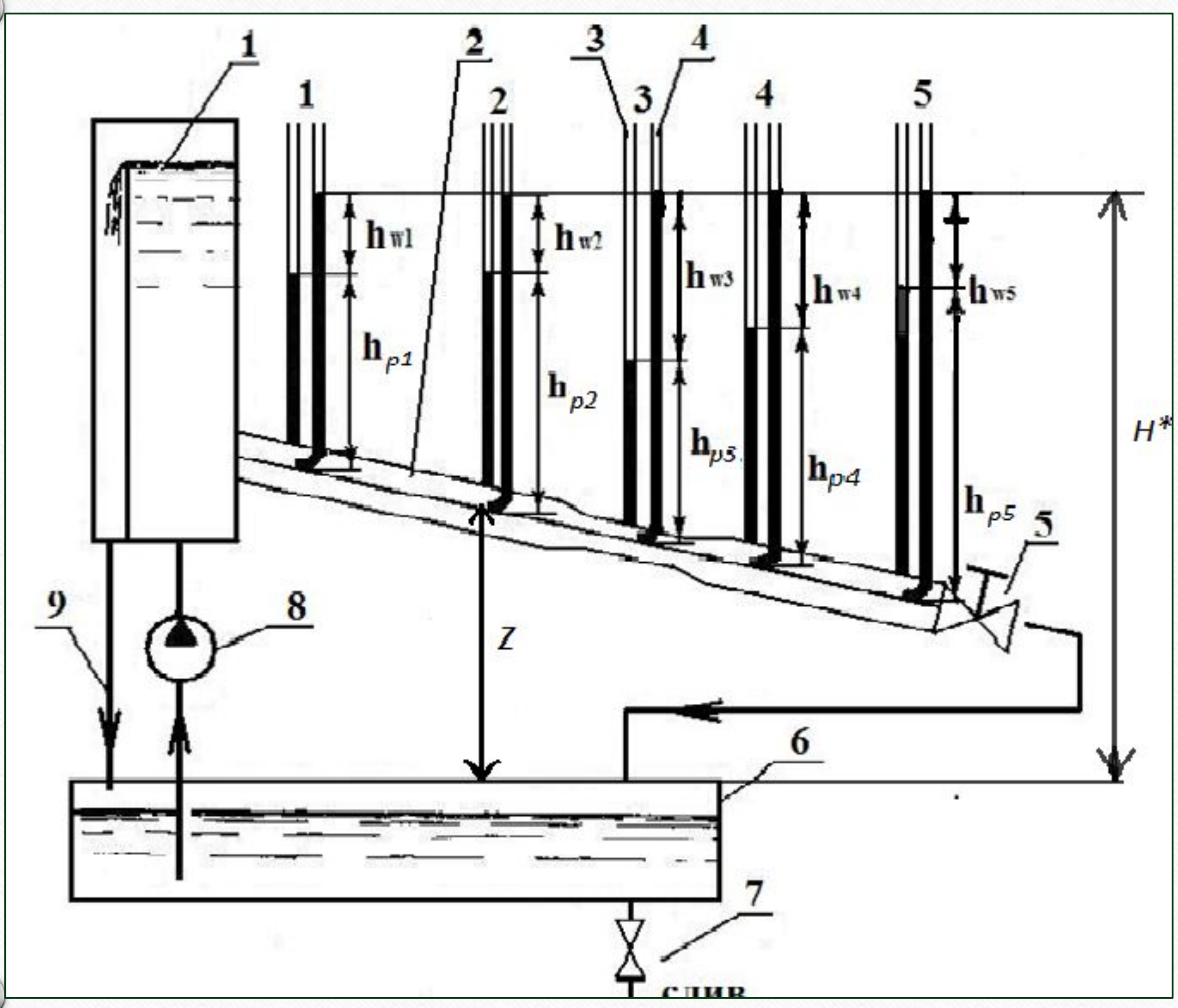


Скоростную высоту $h_w = \dfrac{w^2}{2g}$ можно определить по разнице показаний прямого пьезометра и изогнутого пьезометра, у которого площадка, воспринимающая давление, ориентирована перпендикулярно потоку жидкости и, следовательно, на нее действует и гидростатическое давление, и скоростной напор: $h_w = h_0 - h_p$, где

$$h_p = \frac{p}{\rho g}$$



1. Полный напор H* сохраняет своё значение;
2. В узком сечении увеличивается скорость потока, а гидростатическое давление жидкости уменьшается, (потенциальная энергия давления переходит в кинетическую энергию)



3. В сечении 4 уменьшается скорость потока, а гидростатическое давление жидкости увеличивается, (кинетическая энергия потока переходит в потенциальную энергию давления) ;

4. Нивелирная высота уменьшается - потенциальная энергия положения переходит в потенциальную энергию давления:

$$h_{p_5} \square h_{p_1}$$