ЛЕКЦІЯ 5

Методи розрахунку параметрів при обслуговуванні по системі з втратами і очікуванням

План

1. Способи включення обслуговуючих приладів і каналів в комутаційних центрах.
2. Розрахунок параметрів повнодоступної системи з втратами при надходженні найпростішого потоку викликів.
3. Розрахунок параметрів повнодоступної системи з втратами при надходженні примітивного потоку викликів.
4. Розрахунок параметрів повнодоступної системи з очікуванням.
5. Розрахунок параметрів неповнодоступної системи.

1. Способи включення обслуговуючих приладів і каналів в комутаційних центрах

Одним з факторів який істотно впливає на характер і показники функціонування ТКМ, є спосіб включення каналів і приладів в КЦ.

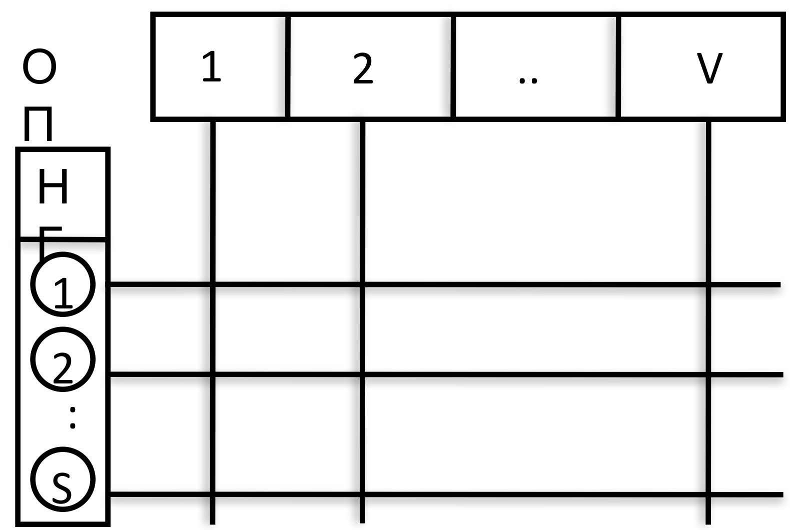
У загальному випадку можна виділити два способи включення:

-повнодоступне;

-непонодоступне.

Повнодоступне включение

При повнодоступному включенні обслуговуючих приладів (ОП) кожен з них може бути надано будь-якому джерелу інформації. На малюнку показано повнодоступне включення V обслуговуючих приладів, кожен з яких може бути підключений для обслуговування будь-якого з S джерел інформації. Відмова в обслуговуванні заявки настає в разі зайнятості всіх V приладів.



Неповнодоступне включення

У разі неповнодоступного включення ОП вони поділяються на ізольовані групи.

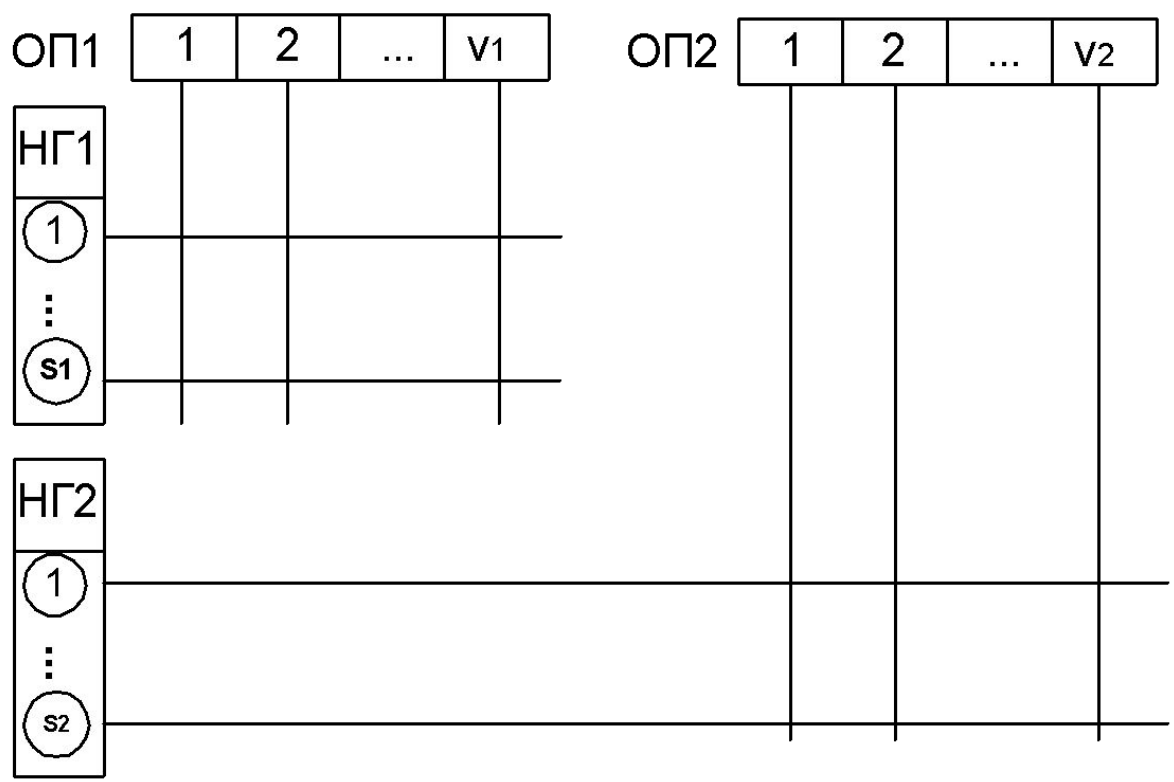
На групи, які називають навантажувальними групами (НГ), поділяються також джерела інформації.

Розрізняють декілька способів неповнодоступного включення обслуговуючих приладів:

- ідеальне неповнодоступне включення,
- ступінчасте,
- рівномірне.

Ідеальне неповнодоступне включення

При ідеальному неповнодоступному включенні число груп обслуговуючих приладів дорівнює числу навантажувальних груп, причому, кожна група ОП закріплюється за однією навантажувальної групою.

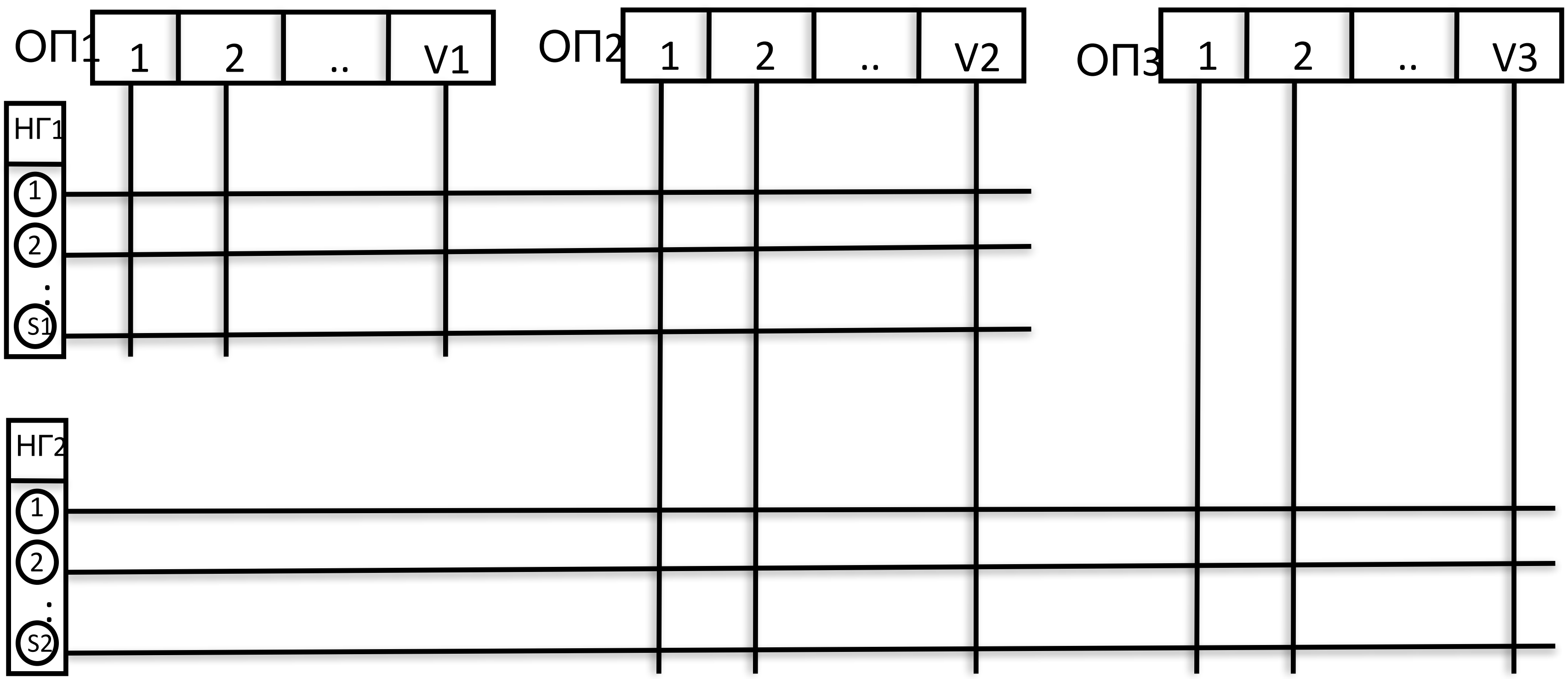


Обслуговування будь-якого джерела інформації певної навантажувальної групи може здійснюватися тільки приладами, закріпленими за цією групою.

Відмовлення в обслуговуванні заявки при даному способі об’єднання ОП настає у випадку одночасної зайнятості всіх обслуговуючих приладів, закріплених за навантажувальною групою. В інших групах ОП у цей час може бути будь-яке число вільних приладів.

Ступінчасте включення

При ступінчастому включенні поряд з групами ОП, закріпленими за однією навантажувальною групою, створюються групи ОП, закріплені за двома, трьома і т.д. навантажувальними групами. У цьому випадку відмова в обслуговуванні заявки, що надійшла, настає при одночасній зайнятості всіх приладів всіх груп, які обслуговують дану навантажувальну групу.

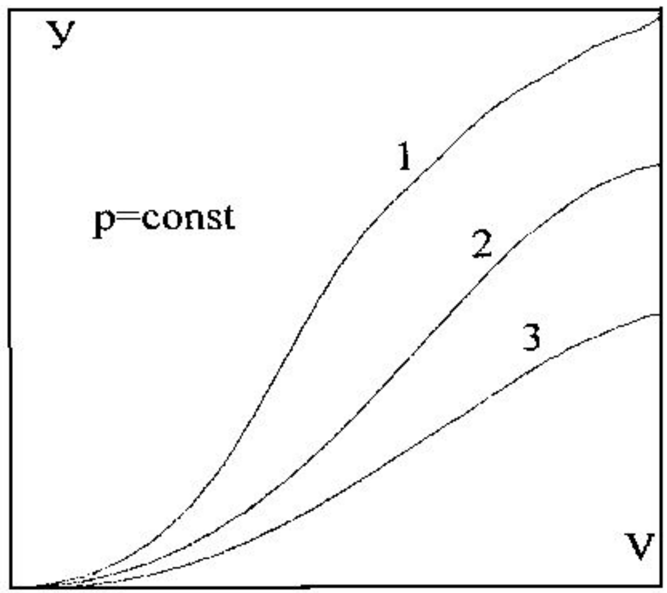


Для кількісної оцінки впливу способу включення обслуговуючих приладів (каналів) на показники комутаційних центрів і ТКМ в цілому використовується спеціальний параметр, який отримав назву **доступність**. Під доступністю d розуміється число обслуговуючих приладів (каналів) доступних для будь-якого джерела однієї навантажувальної групи (групи джерел інформації).

При повнодоступному включенні V обслуговуючих приладів (каналів) має місце рівність $V = d$. У разі розбиття джерел інформації на g навантажувальних груп при ідеальному неповнодоступному включенні загальне число приладів $V = \sum_{i=1}^{q} V_i$ і $d_i = V_i$

а при ступінчастому - знайдеться хоча б одна (j - тая) навантажувальна группа, для якої $V > d_i > V_i$

Різні умови обслуговування заявок в розглянутих типах групування ОП обумовлюють різну величину виконаного навантаження рівним числом приладів при однаковій фіксованій імовірності втрат. На малюнку показана залежність Y = f (V, p = const).



Крива 1 відповідає повнодоступному включенню, крива 3 - ідеальному неповнодоступному включенню, і крива 2 - неповнодоступному ступенчастому включенню обслуговуючих приладів.

2. Розрахунок параметрів повнодоступної системи з втратами при надходженні найпростішого потоку заявок

Вибір методу розрахунку систем визначається цілою низкою чинників і умов:

- прийнятим способом обслуговування заявок;
- видом включення обслуговуючих приладів (каналів);
- типом потоку заявок, що визначаються, наприклад, складом групи джерел інформації;
- переліком вихідних даних.

В даний час широке застосування в практиці вирішення прикладних завдань знайшли наступні два методи:

1. Метод розрахунку параметрів повнодоступних систем з втратами при надходженні найпростішого потоку заявок.
2. Метод розрахунку параметрів повнодоступних систем з втратами при надходженні примітивного потоку заявок.

Розглянемо перший метод.

Задача зводиться до встановлення однозначної відповідності між параметрами системи: *Z* – величиною навантаження, що надходить (чи виконаного навантаження – *Y*); *V* – кількістю обслуговуючих приладів (каналів) і *p* – ймовірністю втрат, як показником якості обслуговування. Для рішення поставленої задачі широке застосування знайшов метод Ерланга. Метод ґрунтується на використанні відомої з теорії масового обслуговування першої формули Ерланга :

$$W_v = \frac{\dfrac{Z^v}{V!}}{\sum\limits_{i=1}^{V} \dfrac{Z^i}{i!}} \qquad (6.1)$$

Показник W_V визначає ймовірність зайнятості всіх *V* обслуговуючих приладів при надходженні на них навантаження *Z*.

Втрати можуть виникати лише при збігу двох подій:

- усі V приладів зайняті (з імовірністю W_V);
- надходить хоча б ще одна заявка на передачу повідомлення (із ймовірністю W_1).

За умови незалежності цих подій, можна визначити ймовірність втрат як $p = W_V W_1$. Перша ймовірність розраховується по виразу (6.1). Друга ймовірність W_1 *може* бути визначена як відношення числа вільних джерел $S–V$ до загального числа джерел виклику

$$W_1=(S–V)/S = 1–V/S \qquad (6.2)$$

Однак, при надходженні в систему найпростішого потоку заявок характерно що $S\to\infty$, це обумовлює значення відношення $V / S \to 0$, а $W_1 \to 1$. Звідси з достатньою для практичних розрахунків точністю можна записати

$$p = W_V \cdot 1 = W_V. \qquad (6.3)$$

Отже, перша формула Ерланга (6.1) з врахуванням (6.3) встановлює жорстку залежність між параметрами *Z*, *V* і *p.* Розрахунок зводиться до визначення невідомого параметра по двох відомим. Однак по формулі (6.1) можливо лише рішення прямої задачі $p = f(Z, V)$. Умовний запис, прийнятий для позначення цієї залежності, має вид $E_V(Z)$. Для задач, обумовлених залежностями виду $V = \Phi(Z, p)$ і $Z = \Psi(V, p)$, використовуються чисельні методи рішення. З цією метою вираз (6.1) протабульовано. Таблиці, що дістали назву на прізвище їхнього автора - таблиці Пальма, для діапазону значень розглянутих параметрів, які найбільше зустрічаються в прикладних задачах, приведені в книзі [4]. По таблицях Пальма побудовані номограми. У ряді випадків становить інтерес співвідношення між параметрами *Y, V, p,* де $Y = Z(1 - p)$. Такі співвідношення також розкриті номограмами і таблицями.

Додаток Ш

Таблиці

для розрахунку параметрів систем з втратами при необмеженій кількості джерел та повнодоступному ввімкненні обслуговуючих приладів /каналів/

Z=0.02-1 V=1-10

Z\V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	V/Z
0.02	0196	0002									0.02
0.04	0385	0008									0.04
0.06	0566	0017									0.06
0.08	0741	0030	0001								0.08
0.10	0909	0045	0002								0.10
0.12	1071	0064	0003								0.12
0.14	1228	0085	0004								0.14
0.16	1379	0109	0006								0.16
0.18	1525	0135	0008								0.18
0.20	1667	0164	0011	0001							0.20
0.22	1803	0195	0014	0001							0.22
0.24	1935	0227	0018	0001							0.24
0.26	2063	0261	0023	0001							0.26
0.28	2187	0297	0028	0002							0.28
0.30	2308	0335	0033	0003							0.30
0.32	2424	0373	0040	0003							0.32
0.34	2537	0414	0047	0004							0.34
0.36	2647	0455	0054	0005							0.36
0.38	2754	0497	0063	0006							0.38
0.40	2857	0541	0072	0007	0001						0.40

Z=15.0-20 V=1-10

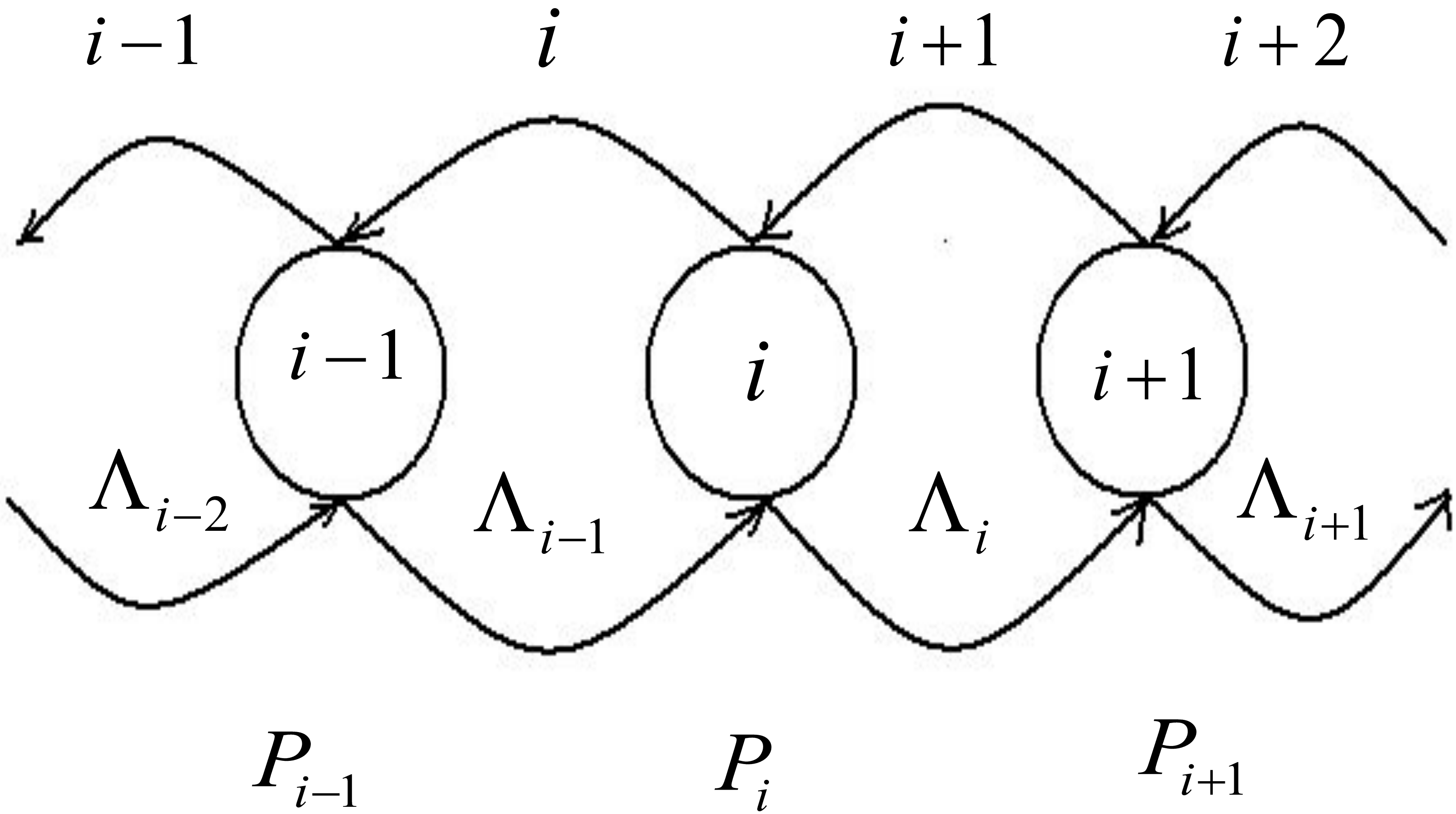
Z\V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	V/Z
15.00	9375	8755	8140	7532	6932	6341	5761	5193	4639	4103	15.00
15.10	9379	8763	8152	7547	6951	6363	5785	5220	4669	4135	15.10
15.20	9383	8770	8163	7562	6969	6384	5809	5247	4698	4166	15.20
15.30	9387	8778	8174	7577	6987	6405	5833	5273	4727	4197	15.30
15.40	9390	8785	8185	7591	7004	6426	5857	5300	4756	4228	15.40
15.50	9394	8792	8196	7605	7022	6446	5880	5326	4784	4258	15.50
15.60	9398	8800	8207	7619	7039	6467	5904	5351	4812	4288	15.60
15.70	9401	8807	8217	7633	7056	6487	5926	5377	4840	4318	15.70
15.80	9405	8814	8228	7647	7073	6507	5949	5402	4068	4347	15.80
15.90	9408	8821	8238	7661	7090	6526	5972	5427	4895	4377	15.90
16.00	9412	8828	8248	7674	7106	6546	5994	5452	4922	4406	16.00
16.10	9415	8834	8258	7687	7123	6565	6016	5477	4949	4434	16.10
16.20	9419	8841	8268	7700	7139	6584	6038	5501	4975	4463	16.20
16.30	9422	8848	8278	7713	7155	6603	6059	5525	5002	4491	16.30
16.40	9425	8854	8288	7726	7171	6622	6080	5549	5028	4519	16.40
16.50	9429	8861	8297	7739	7186	6640	6102	5572	5053	4547	16.50
16.60	9432	8867	8307	7751	7202	6658	6122	5596	5079	4574	16.60
16.70	9435	8674	8316	7764	7217	6676	6143	5619	5104	4602	16.70
16.80	9438	8880	8326	7776	7232	6694	6164	5641	5129	4629	16.80
16.90	9441	8886	8335	7788	7247	6712	6184	5664	5154	4655	16.90

РІВНЯННЯ СТАТИСТИЧНОЇ РІВНОВАГИ
Визначення ймовірності знаходження повнодоступної комутаційної системи в і-му стані при надходженні на неї потоку з простою післядією

СУМА ІНТЕНСИВНОСТЕЙ ВИХОДУ З ДАНОГО СТАНУ i, ЗВАЖЕНА ВІДПОВІДНОЮ ВІРОГІДНІСТЮ P_I, ДОРІВНЮЄ СУМІ ЗВАЖЕНИХ ВІДПОВІДНИМИ ВІРОГІДНОСТЯМИ ІНТЕНСИВНОСТЕЙ ВХОДУ В ДАНИЙ СТАН

СУММА ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ВЫХОДА ИЗ ДАННОГО СОСТОЯНИЯ i, ВЗВЕШЕННАЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ P_I, РАВНА СУММЕ ВЗВЕШЕННЫХ СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ВЕРОЯТНОСТЯМИ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ВХОДА В ДАННОЕ СОСТОЯНИЕ:

$$(\lambda_i + i)\cdot P_i = \lambda_{i-1}\cdot P_{i-1} + (i+1)P_{i+1}$$


$i-1$
i
$i+1$
$i+2$
$i-1$
i
$i+1$
Λ_{i-2}
Λ_{i-1}
Λ_i
Λ_{i+1}
P_{i-1}
P_i
P_{i+1}

$$\lambda_i P_i + i \cdot P_i = \lambda_{i-1} \cdot P_{i-1} + (i+1) P_{i+1}$$

$$i \cdot P_i - \lambda_{i-1} \cdot P_{i-1} = (i+1) P_{i+1} - \lambda_i P_i$$

при i=o

$$(i+1) P_{i+1} = \lambda_i P_i$$

$$1 \cdot P_1 = \lambda_0 \cdot P_0 \qquad P_1 = \lambda_0 \cdot P_0$$

При i=1

$$2 \cdot P_2 = \lambda_1 \cdot P_1; \quad P_2 = \frac{\lambda_1}{2} \cdot P_1 = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{1 \cdot 2} \cdot P_0;$$

При I=0,1,2,..,

$$P_i = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1} \cdot}{i!} \cdot P_0;$$

$$\boxed{P_i = \frac{\prod\limits_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{i!} \cdot P_0}$$

- **Умова нормування :**

$$\sum_{i} P_i = 1$$

$$\sum_{j=0}^{v} P_i = 1$$

$$\sum_{j=0}^{v} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{i!} \cdot P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{v} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k}{j!}}$$

- Остаточно, ймовірність зайнятості в довільний момент часу *i* виходів повнодоступної не блокованої системи з простою післядією :

$$P_i = \frac{\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{i!}}{\sum\limits_{j=0}^{V} \dfrac{\prod\limits_{k=0}^{j-1} \lambda_k}{j!}} \qquad (6.3\text{а})$$

- Імовірність *Pi* можна трактувати як частку часу (на нескінченному інтервалі часу), протягом якої в системі зайнято *i* виходів.
- Розподіл справедливий при будь-якому законі розподілу часу обслуговування з кінцевим математичним очікуванням.

Розглянемо чотири окремих випадки.

1. Потік викликів примітивний, дисципліна обслуговування з явними втратами (обслуговування повнодоступної комутаційної системою примітивного потоку викликів з втратами).

$$\lambda_i = \alpha(N - i)$$

$$\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k = \alpha(N-0)\cdot\alpha\cdot(N-1)\cdot\alpha\cdot(N-2)\cdot\ldots\cdot\alpha(N-(i-1)) = \alpha^i\cdot N\cdot(N-1)\ldots(N-(i-1))$$

$$\frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{i!} = \frac{\alpha^i\cdot N\cdot(N-1)\ldots(N-(i-1))}{i!}$$

$$C_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!}$$

$$\frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{i!} = \frac{\alpha^i\cdot N\cdot(N-1)\ldots(N-(i-1))}{i!} = C_N^i\cdot\alpha^i$$

- **Підставляючи отриманий вираз в (6.3а), отримуємо** ***розподіл Енгсета*** **(*усічений розподіл Бернуллі*):**

$$\boxed{P_i = \frac{C_N^i \cdot \alpha^i}{\sum\limits_{j=0}^{v} C_N^j \cdot \alpha^j}}$$

2. Потік викликів найпростіший, дисципліна обслуговування з явними втратами (обслуговування повнодоступною комутаційною системою найпростішого потоку викликів з втратами).

Тоді $$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_i = \lambda = const$$

$$\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k = \lambda^i$$

При підстановці в (6.3а) отримуємо *перший розподіл Ерланга* (*усічений розподіл Пуассона*):

$$\boxed{P_i = \frac{\dfrac{\lambda^i}{i!}}{\sum\limits_{j=0}^{V} \dfrac{\lambda^j}{j!}}}$$

3. Потік викликів примітивний, дисципліна обслуговування без втрат (N джерел викликів обслуговуються без втрат при числі виходів в системі v = N). Розглянемо біном Ньютона:

$$(a+b)^N = \sum_{i=0}^{N} C_N^i \cdot a^i \cdot b^{N-i}$$

при b=1

$$(a+1)^N = \sum_{i=0}^{N} C_N^i \cdot a^i$$

V=N

$$P_i = \frac{C_N^i \cdot \alpha^i}{\sum\limits_{j=0}^{v} C_N^j \cdot \alpha^j} = \frac{C_N^i \cdot \alpha^i}{(1+\alpha)^N} = C_N^i \cdot \frac{\alpha^i}{(1+\alpha)^i} \cdot \frac{1}{(1+\alpha)^{N-i}} = C_N^i \cdot \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \cdot \left(\frac{1+\alpha-\alpha}{1+\alpha}\right)^{N-i} =$$

$$= C_N^i \cdot \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i \cdot \left(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{N-i} \Bigg|_{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = C_N^i \cdot a^i (1-a)^{N-i}$$

Отримуємо розподіл Бернуллі :

$$\boxed{P_i = C_N^i \cdot a^i (1-a)^{N-i}}$$

При числі виходів в системі v = N кожне джерело як би закріплюється за певним виходом і заняття будь-якого виходу відбувається незалежно від інших. Якщо в довільний момент досліджується стан виходів системи обслуговування, то кожен зайнятий вихід можна розглядати як чергове успішне випробування із загального числа N незалежних випробувань. Цим пояснюється, що в даному випадку розподіл ймовірностей числа зайнятих виходів збігається з відомим розподілом Бернуллі для незалежних випробувань. Величина *a* <u>визначає ймовірність одного успішного випробування, тобто заняття певного виходу</u>.

4. Потік викликів найпростіший, дисципліна обслуговування без втрат. У цьому випадку число виходів в системі має бути необмеженим v = ∞. З розподілу Ерланга з урахуванням розкладання показової функції в ряд Маклорена отримуємо розподіл Пуассона:

$$P_i = \frac{\dfrac{\lambda^i}{i!}}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^j}{j!}} = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

Розподіл Пуассона може бути також отримано з розподілу Бернуллі при N -> ∞ і a-> 0, але так, що Na = λ. Таким чином, найбільш загальним з розглянутих чотирьох розподілів є розподіл Енгсета. З нього випливає, з одного боку, перший розподіл Ерланга, а з іншого - розподіл Бернуллі. З останніх двох можна отримати розподіл Пуассона. У всіх розглянутих розподілах параметри λ, a, що характеризують потік викликів, виражені в виклик/ у.о.ч. (Ерл).

у.о.ч. – умовна одиниця часу

3. Розрахунок параметрів повнодоступних систем із втратами при надходженні примітивного потоку заявок

Особливістю задачі розрахунку параметрів елементів ТКМ із повнодоступним включенням обслуговуючих приладів, які реалізують спосіб обслуговування з втратами при *надходженні* на них потоку заявок від обмеженого числа джерел, є вплив чисельності S навантажувальної групи на значення інших параметрів. У результаті чого постановка розглянутої задачі обумовлює встановлення співвідношень між чотирма параметрами *S, Z, V, p.* В основі методу розрахунку лежить відома формула датського дослідника Енгсета:

$$w_V = \frac{C_S^V z^V (1-z)^{S-V}}{\sum_{i=0}^{V} C_S^i z^i (1-z)^{S-i}} \qquad (6.4)$$

де: W_V – ймовірність зайнятості всіх *V* обслуговуючих приладів при надходженні на них від кожного з *S* джерел навантаження *z*;
$C_S^V\,(C_S^i)$ – число сполучень "з *S* по *V*" ("з *S* по *i*").

Аналогічно попередньому випадку для переходу до втрат як показнику якості обслуговування необхідно визначити ймовірність одночасного виникнення двох подій: зайнятості всіх *V* приладів із ймовірністю W_V і надходження хоча б одного виклику з ймовірністю W_1. Перша ймовірність визначається виразом (6.4), друга – виразом (6.2). Необхідна величина втрат при цьому може бути отримана перемножуванням значень зазначених ймовірностей, тобто

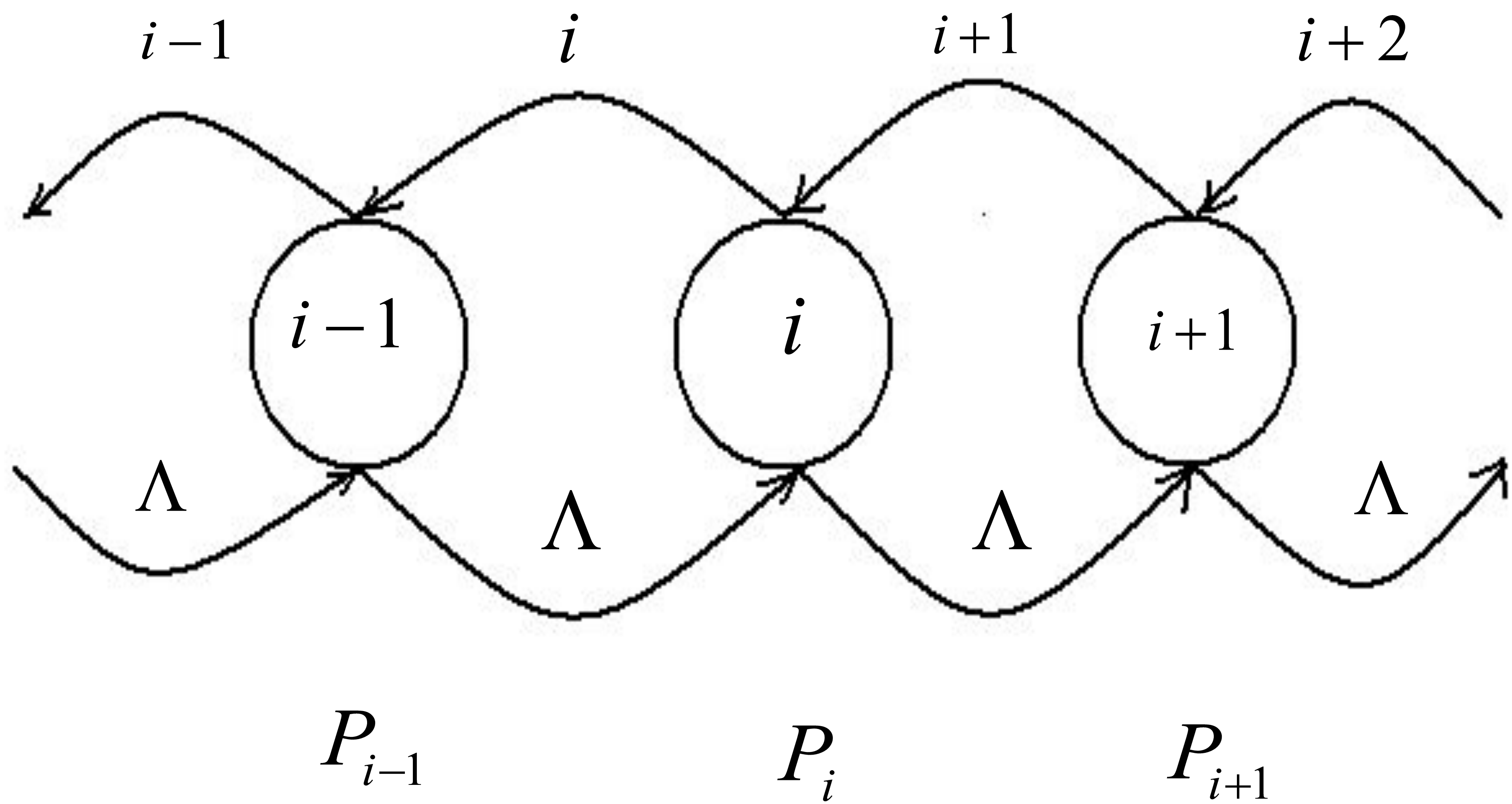
$$p = W_V W_1 = \frac{C_{S-1}^{V} z^{V} (1-z)^{S-V}}{\sum_{i=0}^{V} C_S^i z^i (1-z)^{S-i}} \tag{6.5}$$

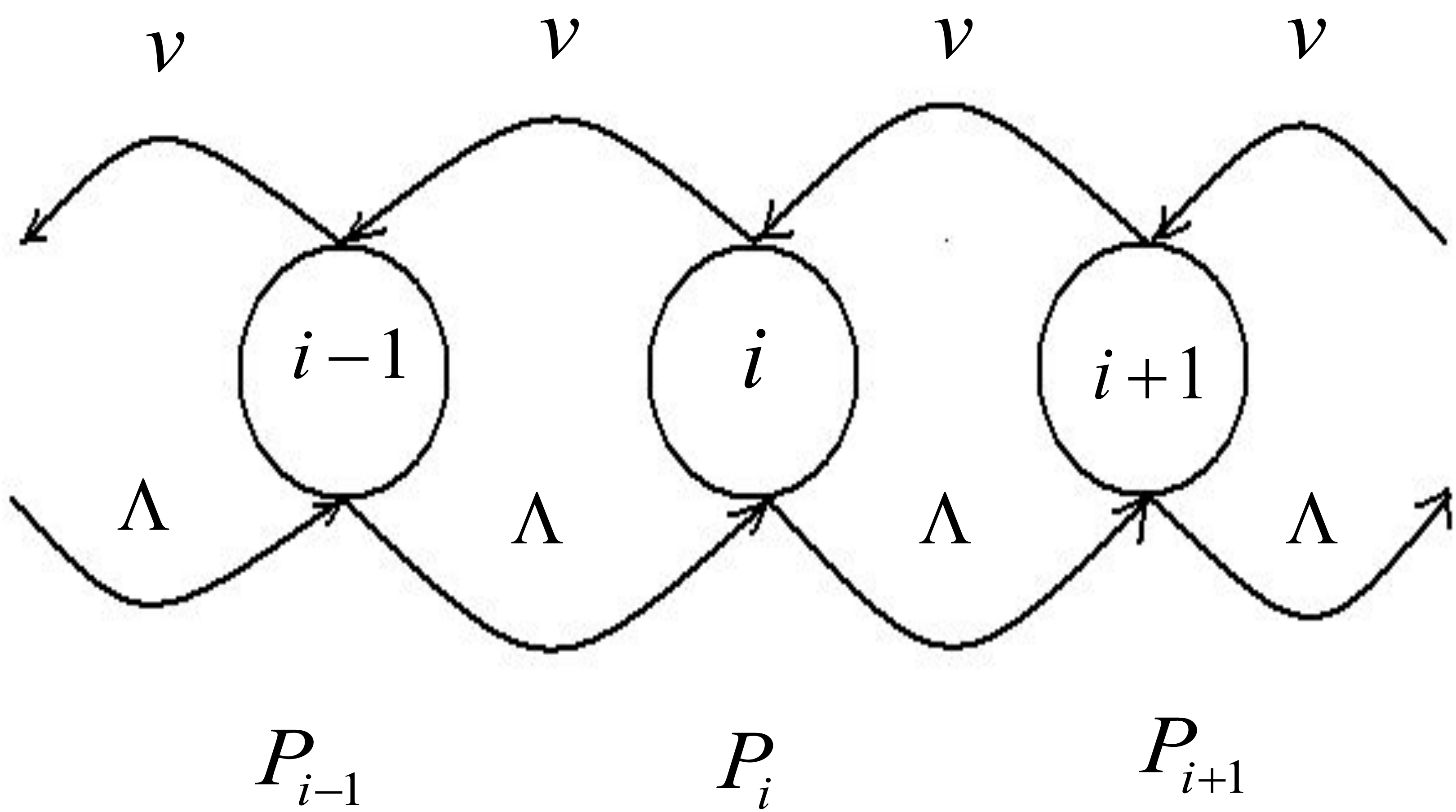
Вираз (6.5) протабульований. Для практичних розрахунків можуть бути рекомендовані таблиці в [4], складені для великої області значень параметрів.
Точність результатів розрахунку, отриманих методами Ерланга й Енгсета, істотно залежить від параметра *S*.

4.1. ПОВНОДОСТУПНА СИСТЕМА
З ОЧІКУВАННЯМ.
НАЙПРОСТІШИЙ ПОТІК

Повнодоступна комутаційна система, що має *v* виходів, обслуговує найпростіший потік викликів. Час обслуговування одного виклику - випадкова показово-розподілена величина з середнім значенням, прийнятим за умовну одиницю часу (*h* = 1у.о.ч.). Параметр потоку викликів Λ, виражений в Ерлангах, можна розглядати як інтенсивність навантаження яке надходить.

При зайнятості всіх v виходів виклик, який надійшов, ставиться в чергу і обслуговується після деякого очікування. Загальна кількість викликів, які перебувають в системі на обслуговуванні та в черзі, позначимо i ($i=\overline{0,\infty}$) і назвемо станом системи. При $i=\overline{0,v}$ величина i характеризує число зайнятих виходів в системі, при $i=\overline{v,\infty}$ число зайнятих виходів дорівнює v, а різниця i-v є довжина черги.


$i-1$
i
$i+1$
$i+2$
$i-1$
i
$i+1$
Λ
Λ
Λ
Λ
P_{i-1}
P_i
P_{i+1}


v
v
v
v
$i-1$
i
$i+1$
Λ
Λ
Λ
Λ
P_{i-1}
P_i
P_{i+1}

- При $i = \overline{0, v}$ отримуємо:

$$\left(\Lambda + i\right) \cdot P_i = \Lambda \cdot P_{i-1} + \left(i+1\right) P_{i+1};$$

$$\Lambda P_i + i \cdot P_i = \Lambda \cdot P_{i-1} + \left(i+1\right) P_{i+1};$$

$$i \cdot P_i - \Lambda \cdot P_{i-1} = \left(i+1\right) P_{i+1} - \Lambda P_i;$$

$$\left(i+1\right) P_{i+1} = \Lambda P_i;$$

- при i=o => $$P_1 = \frac{\Lambda}{1} \cdot P_0;$$

- при i=1 => $$P_2 = \frac{\Lambda \cdot \Lambda}{1 \cdot 2} \cdot P_0;$$

- при i => $$P_i = \frac{\Lambda^i}{i!} \cdot P_0;$$

- При $i = \overline{v, \infty}$ і довжині черги *n = i-v* (другий ланцюг Маркова) можна записати

$$(\Lambda + v) \cdot P_i = \Lambda \cdot P_{i-1} + vP_{i+1};$$

$$\Lambda P_i + v \cdot P_i = \Lambda \cdot P_{i-1} + vP_{i+1};$$

$$v \cdot P_i - \Lambda \cdot P_{i-1} = vP_{i+1} - \Lambda P_i;$$

$$v \cdot P_i - \Lambda \cdot P_{i-1} = 0,$$

$$vP_{i+1} = \Lambda P_i;$$

при i=o => $vP_1 = \Lambda P_0$ => $P_1 = \dfrac{\Lambda}{v} \cdot P_0;$

при i=1 => $vP_2 = \Lambda P_1$ => $P_2 = \dfrac{\Lambda^2}{v^2} \cdot P_0;$

можна записати

$$P_n = \frac{\Lambda^n}{v^n} \cdot P_0;$$

при $P_0 = P_v$ и $n = i - v$ отримуємо

$$P_{i-v} = \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{i-v} \cdot P_v = P_i = \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{i-v} \frac{\Lambda^v}{v!} P_0;$$

Остаточно

$$P_i = \left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{i-v} \frac{\Lambda^v}{v!} P_0;$$

Значення P_0 можна визначити з умови нормування:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1;$$

Підставляємо значення P_0 для $j = \overline{0, v}$ та $j = \overline{v, \infty}$

$$\sum_{j=0}^{v-1} P_j + \sum_{j=v}^{\infty} P_j = \left(\sum_{j=0}^{v-1} \frac{\Lambda^j}{v!} + \sum_{j=v}^{\infty} \left(\frac{\Lambda}{v} \right)^{j-v} \frac{\Lambda^v}{v!} \right) P_0 = 1;$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{v-1} \frac{\Lambda^j}{v!} + \sum_{j=v}^{\infty} \left(\frac{\Lambda}{v} \right)^{j-v} \frac{\Lambda^v}{v!}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{v-1} \frac{\Lambda^j}{v!} + \frac{\Lambda^v}{v!} \cdot \sum_{j=v}^{\infty} \left(\frac{\Lambda}{v} \right)^{j-v}};$$

$$\sum_{j=v}^{\infty}\left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{j-v}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{j};$$

При Λ>*v* и Λ=*v* ряд розходиться, при Λ<*v* ряд збігається і його сума дорівнює

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{j}=\frac{v}{v-\Lambda};$$

Тоді

$$P_0=\frac{1}{\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\Lambda^j}{v!}+\frac{\Lambda^v}{v!}\cdot\frac{v}{(v-\Lambda)}};$$

Підставляючи значення P_0 в формули для P_i, отримуємо другий розподіл Эрланга:

$$P_i = \frac{\dfrac{\Lambda^i}{i!}}{\sum\limits_{j=0}^{v-1}\dfrac{\Lambda^j}{v!}+\dfrac{\Lambda^v}{v!}\cdot\dfrac{v}{(v-\Lambda)}}$$ при $i=\overline{0,v}$;

$$P_i = \frac{\left(\dfrac{\Lambda}{v}\right)^{i-v}\dfrac{\Lambda^v}{v!}}{\sum\limits_{j=0}^{v-1}\dfrac{\Lambda^j}{v!}+\dfrac{\Lambda^v}{v!}\cdot\dfrac{v}{(v-\Lambda)}}$$ при $i=\overline{v,\infty}$;

- **Імовірність очікування для виклику який надійшов**

$$P(\gamma>0)=P_t=\sum_{k=v}^{\infty}P_k=\sum_{k=v}^{\infty}\frac{\left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{i-v}\frac{\Lambda^v}{v!}}{\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\Lambda^j}{v!}+\frac{\Lambda^v}{v!}\cdot\frac{v}{(v-\Lambda)}}=\frac{\sum_{k=v}^{\infty}\left(\frac{\Lambda}{v}\right)^{k-v}\frac{\Lambda^v}{v!}}{\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\Lambda^j}{v!}+\frac{\Lambda^v}{v!}\cdot\frac{v}{(v-\Lambda)}}=\frac{\frac{\Lambda^v}{v!}\cdot\frac{v}{(v-\Lambda)}}{\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\Lambda^j}{v!}+\frac{\Lambda^v}{v!}\cdot\frac{v}{(v-\Lambda)}}.$$

Дана формула отримала назву другої формули Ерланга та має своє символічне позначення

$$P(\gamma>0)=\frac{\frac{\Lambda^v}{v!}\cdot\frac{v}{(v-\Lambda)}}{\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\Lambda^j}{v!}+\frac{\Lambda^v}{v!}\cdot\frac{v}{(v-\Lambda)}}=D_v(\Lambda).$$

Існують розрахункові співвідношення між першою і другою формулами Ерланга:

$$D_v(\Lambda) = vE_v(\Lambda) / \{v - \Lambda[1 - E_v(\Lambda)];$$

$$1 / D_v(\Lambda) = 1 / E_v(\Lambda) - 1 / E_{v-1}(\Lambda).$$

Завжди $D_v(\Lambda) > E_v(\Lambda)$, тобто при однаковій інтенсивності навантаження яке надходить ймовірність очікування в системі з очікуванням завжди вище, ніж вірогідність втрати виклику в системі з явними втратами. Пояснюється тим, що при звільненні виходу в системі з явними втратами він надається знову виклику який надходить, а в системі з очікуванням при наявності черги - очікує.

4.2. Розрахунок параметрів повнодоступних систем з чеканням

Розрахунок параметрів елементів ТКМ, що реалізують спосіб обслуговування з чеканням, розглянемо в припущенні, що потік заявок, який надходить – найпростіший, а число місць для чекання необмежено. Крім параметрів *Z = Y і V,* які вже використовувались при розрахунку варто враховувати показник якості обслуговування $p(t_{чек}>\tau)$ – максимальний час *τ* чекання обслуговування (із заданою ймовірністю), і відносний час *θ* чекання звільнення обслуговуючого приладу. Величина параметра *θ* залежить від середнього часу заняття ОП – і коефіцієнта варіації *v*, що враховує закон розподілу часу заняття обслуговуючих приладів. Значення параметра *θ* визначається таким чином:

$$\theta = \frac{\bar{t}_c(1+v)}{2}$$

$$F(\theta) = e^{-t_c}$$

де *v* = 1 при

v = 0 при *F(θ) = const*.

Тобто для найбільш розповсюдженого випадку експонентного розподілу часу заняття ОП: $\theta = t_c$

Широке поширення при розрахунку параметрів систем з очікуванням отримав метод, запропонований Бухманом Н.Е. В його основі лежить формула для визначення приведеного вище показника якості обслуговування:

$$P(t_{оч} > \tau) = P(t_{оч} > 0)P_v(t_{оч} > \tau) \qquad (6.6)$$

Перший співмножник правої частини виразу (6.6) являє ймовірність очікування для виклику який надійшов:

$$P(t_{оч} > 0) = \frac{\dfrac{Z^V}{V!}\dfrac{V}{(V-Z)}}{\sum_{i=0}^{V-1}\dfrac{Z^i}{i!} + \dfrac{Z^V}{V!}\dfrac{V}{(V-Z)}} \qquad (6.7)$$

Він визначає значення ймовірності того, що заявка надходить в момент зайнятості всіх V обслуговуючих приладів і ставиться на очікування. Другий співмножник виразу (6.6) визначає умовну ймовірність того, що заявка, яка перебуває на очікуванні, буде затримана понад часу τ ,

$$P_v(t_{оч} > \tau) = e^{-(V-Z)\tau / t_c} \qquad (6.8)$$

Підставивши у вираз (6.6) вирази (6.7) і (6.8), отримаємо формулу, що отримала назву формули Бухмана:

$$P(t_{оч} > \tau) = \frac{\dfrac{Z^V}{V!}\dfrac{V}{(V-Z)}}{\sum_{i=0}^{V-1}\dfrac{Z^i}{i!} + \dfrac{Z^V}{V!}\dfrac{V}{(V-Z)}} e^{-(V-|Z|)\tau / t_c} \qquad (6.9)$$

Формула (6.9) табульована. За результатами розрахунків побудовані номограми. Приклад таких номограм для $P(t_{оч} > \tau) = 0{,}1$ наведено в [4]. Процедура розрахунку зводиться до відшукання $P(t_{оч} > \tau)$ при заданій ймовірності одного невідомого параметра по іншим відомим. Окремо табульована формула (6.7). Відповідні їй таблиці також наведені в [4].

Даний метод використовується в основному для розрахунку параметрів в системах, де час заняття ОП розподілено по експонентному закону $(\theta = \bar{t}_c)$, але може також використовуватися при постійній тривалості заняття ОП $(\theta = 2\bar{t}_c)$, що характерно, наприклад, для обслуговуючих приладів, час заняття яких визначається виконанням однакового числа заздалегідь обумовлених операцій. Однак для другого випадку більшою мірою прийнятний метод Кромелліна.

Додаток IX

Таблиці
для розрахунку параметрів систем з очікуванням при експоненціальному законі розподілу часу заняття обслуговуючих приладів /каналів/

$Z = 0.1 \div 5.0 \qquad V = 1 \div 10 \qquad \frac{\tau}{t_c} = 0$

Z\V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	V/Z
0.1	1000	0047	0001								0.1
0.2	2000	0181	0011								0.2
0.3	3000	0391	0037	0002							0.3
0.4	4000	0666	0082	0007							0.4
0.5	5000	1000	0151	0018	0001						0.5
0.6	6000	1385	0246	0034	0004						0.6
0.7	7000	1815	0369	0060	0008						0.7
0.8	8000	2286	0520	0095	0014	0001					0.8
0.9	9000	2793	0700	0143	0024	0003					0.9
1.0		3333	0909	0204	0038	0006					1.0
1.1		3903	1146	0279	0057	0010	0001				1.1
1.2		4500	1412	0370	0082	0015	0002				1.2
1.3		5121	1704	0478	0113	0023	0004				1.3
1.4		5765	2024	0603	0153	0033	0006	0001			1.4
1.5		6429	2368	0745	0201	0047	0009	0001			1.5
1.6		7111	2738	0907	0258	0064	0013	0002			1.6
1.7		7811	3131	1087	0326	0085	0019	0004			1.7
1.8		8526	3547	1285	0405	0111	0027	0005	0001		1.8
1.9		9256	3985	1503	0495	0142	0036	0008	0001		1.9
2.0			4444	1739	0597	0180	0048	0011	0002		2.0

Z = 10.1÷15.0 V = 11÷20 $\frac{\tau}{t_c} = 0.5$

Z\V	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	V/Z
10.1	4533	1822	0705	0263	0094	0032	0010	0003	0001		10.1
10.2	4963	2006	0781	0293	0105	0036	0012	0003	0001		10.2
10.3	5430	2206	0865	0326	0118	0041	0013	0004	0001		10.3
10.4	5937	2425	0956	0363	0132	0046	0015	0005	0001		10.4
10.5	6487	2664	1057	0404	0148	0052	0017	0005	0001		10.5
10.6	7082	2923	1166	0448	0166	0059	0020	0006	0002		10.6
10.7	7728	3206	1286	0497	0185	0066	0022	0007	0002		10.7
10.8	8426	3513	1417	0551	0207	0074	0025	0008	0002		10.8
10.9	9182	3846	1560	0611	0230	0083	0029	0009	0003		10.9
11.0		4209	1716	0675	0256	0094	0033	0011	0003	0001	11.0
11.1		4602	1886	0747	0285	0105	0037	0012	0004	0001	11.1
11.2		5029	2071	0824	0317	0117	0041	0014	0004	0001	11.2
11.3		5492	2273	0910	0352	0131	0047	0016	0005	0001	11.3
11.4		5993	2492	1003	0390	0146	0053	0018	0006	0001	11.4
11.5		6537	2731	1105	0432	0163	0059	0020	0007	0002	11.5
11.6		7125	2991	1217	0478	0181	0066	0023	0007	0002	11.6
11.7		7762	3273	1338	0529	0202	0074	0026	0009	0002	11.7
11.8		8451	3579	1470	0584	0224	0083	0029	0010	0003	11.8
11.9		9195	3912	1615	0645	0249	0093	0033	0011	0003	11.9
12.0			4272	1772	0712	0276	0103	0037	0013	0004	12.0

Розрахункові співвідношення

Імовірність утворення черги заявок для обслуговування може бути визначена з виразу

$$P(t_{оч} > 0) = \frac{Y^V}{(V-1)!(V-Y)\left[\sum_{i=0}^{V-1} \frac{Y^i}{i!} + \frac{Y^V}{(V-1)!(V-Y)}\right]},$$

де Y - значення навантаження, яке виконується у системі телекомунікації; V - кількість приладів /каналів/, які обслуговують навантаження Y.

Цей вираз отримав назву другої формули Ерланга. Слід мати на увазі, що розрахунки параметрів системи з очікуванням проводять в усталеному режимі, тобто середня довжина черги в ГНН є величиною сталою, а величина навантаження Y чисельно менша за число приладів, які обслуговують це навантаження $(|Y| < V)$.

При заданні допускного часу τ очікування обслуговування параметра системи телекомунікації обчислюють за виразом

$$P(t_{оч} > \tau) = P(t_{оч} > 0)e^{-(V-Y)\frac{\tau}{t_c}} .$$

Програма та порядок обчислення параметрів за другою формулою Ерланга та її модифікацією - формулою Бухмана наведені в дод.УШ, а результати проведених за ними розрахунків зібрані до таблиці, яка наведена в дод.IX. Обчислення проведено в діапазоні значень V = = I...30 при навантаженнях $Z = Y$ = 0,I...25 Ерл та значеннях τ/t_c = 0; 0,5; I; I,5; 2,0; 2,5; 2,6; 3,0.

5. Розрахунок параметрів неповнодоступних систем

Для елементів ТКМ з ідеальним неповнодоступним включенням обслуговуючих приладів розрахунок ведеться окремо для кожної групи ОП і закріпленої за нею певної навантажувальної групи. Методи розрахунку для кожної групи використовуються ті ж, що і при повнодоступному включенні ОП; при реалізації способу обслуговування з чеканням - метод Бухмана (чи Кромеліна), при реалізації способу з втратами і надходженні на обслуговування найпростішого потоку заявок - метод Ерланга, а при надходженні потоку заявок від обмеженого числа джерел - метод Енгсета. Загальне число обслуговуючих приладів (каналів) у системі розподілу інформації визначається як сума

$$V_{заг} = \sum_{i=1}^{g} V_i$$

де g – число ізольованих груп ОП (каналів);
V – число ОП (каналів) в i-ій групі, визначене вищевказаними методами.

Аналогічно можна підсумовувати величини навантаження, виконаного кожною групою ОП. Показники якості обслуговування джерел різних навантажувальних груп (наприклад, ймовірності втрат), як правило, розглядаються окремо і характеризують умови обслуговування заявок кожної з цих груп.

При розрахунку параметрів елементів систем з неповнодоступним східчастим включенням обслуговуючих приладів, який реалізує спосіб обслуговування з втратами, крім уже використовуваних параметрів *Y, V* і *p* вводиться параметр доступності *d.* Орієнтована оцінка функціонування таких систем може проводитися по спрощеній формулі Ерланга (запропонованої їм для східчастих включень):

$$p = \left(\frac{Y}{V}\right)^d \tag{6.10}$$

З виразу (6.10) можуть бути отримані формули для розрахунку інших параметрів системи:

$$Y = V\sqrt[d]{p} \qquad V = \frac{Y}{\sqrt[d]{p}}$$

Більш точні результати дає застосування методу О'Дела - Берклея. У його основі лежить вираз

$$V = \alpha Y + \beta \qquad (6.11)$$

де $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[d]{p}}$ $\beta = d - \dfrac{Y_d}{\sqrt[d]{p}}$;

Y_d - еквівалентне навантаження, яке могло б бути виконане в системі з повнодоступно включеними *d* обслуговуючими приладами при тому же значенні ймовірності втрат *p*.

Вирази для визначення коефіцієнтів *α* і *β* протабульовані.

Широка область значень коефіцієнтів *α* і *β*, а також номограми, отримані за результатами рішення формули (6.11) для ряду значень параметрів, приведені в книзі [6].