

---

## Тема 2. Линейное программирование

1. Графическое решение ЗЛП
2. Особые случаи решения ЗЛП графическим методом
3. Основы симплекс-метода
4. Транспортная задача

# 1. Графическое решение задачи линейного программирования

1. Строится многоугольная допустимая область решений (**ОДР**), соответствующая ограничениям
2. Строится **вектор–градиент** линейной формы с координатами

$$\Delta = \left( \tilde{n}_1 = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_1}, \tilde{n}_2 = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}_2} \right)$$

3. Строится **прямая**, перпендикулярная вектору-градиенту. Прямая «передвигается» в направлении этого вектора в случае максимизации (в направлении, противоположном вектору - в случае минимизации) до тех пор, пока не покинет пределов многоугольной области.
4. Определяются координаты **предельной точки**.  
Подставляются значения координат в выражение целевой функции, тем самым находятся ее экстремальные значения.

## Пример решения ЗЛП графическим методом

Пример 1.

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2) \rightarrow \max$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 300$$

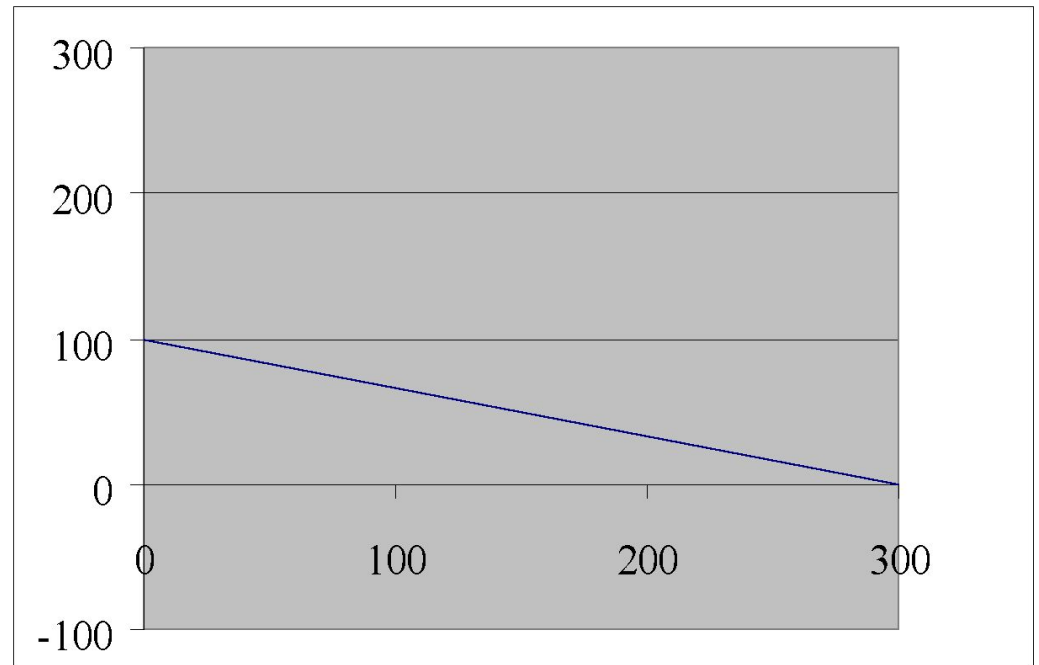
$$x_1 + x_2 \leq 150$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

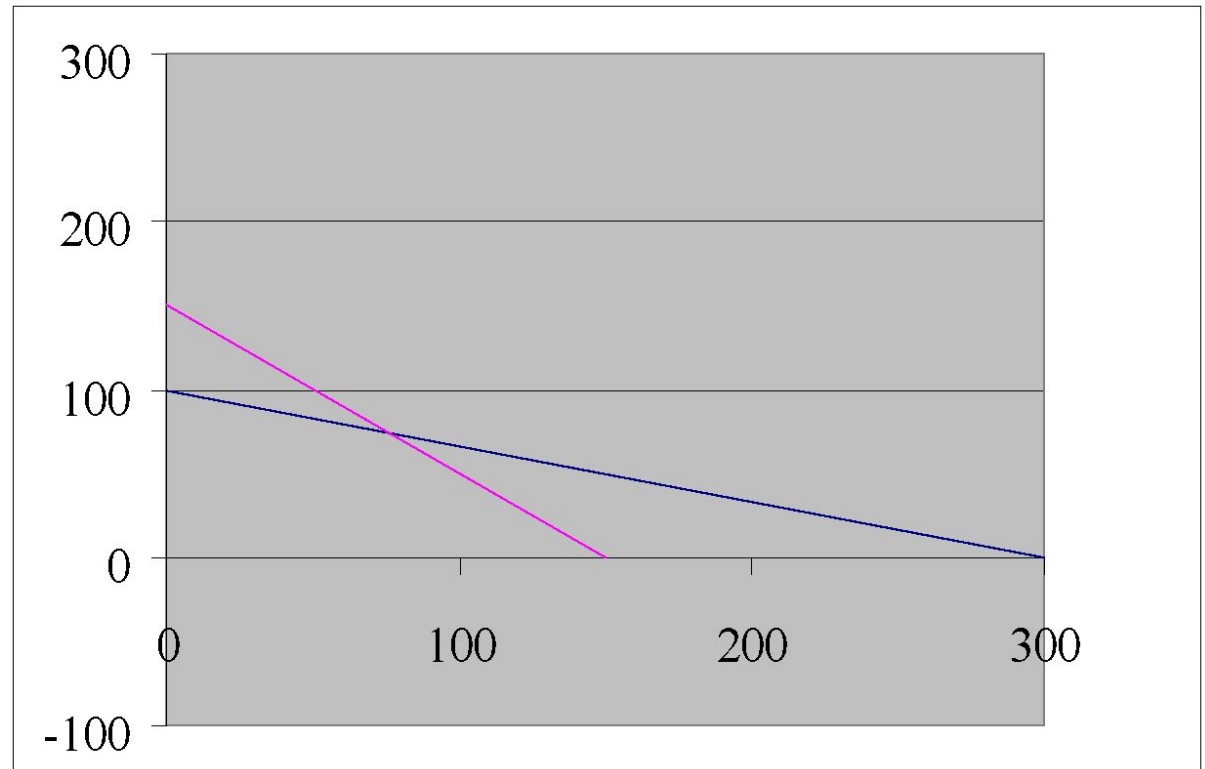
**1 этап.**

$$x_1 + 3x_2 = 300$$

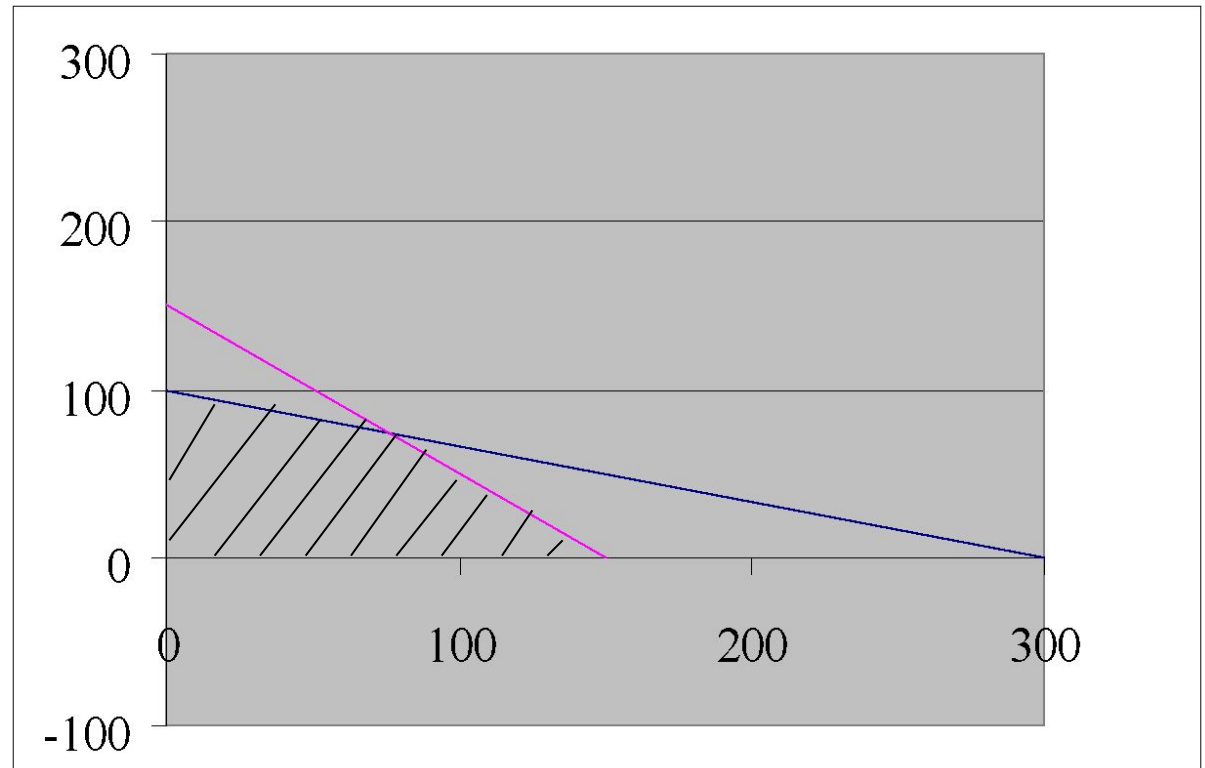
(0; 100) и (300; 0).



$x_1 + x_2 = 150$   
(0;150) и (150;0).

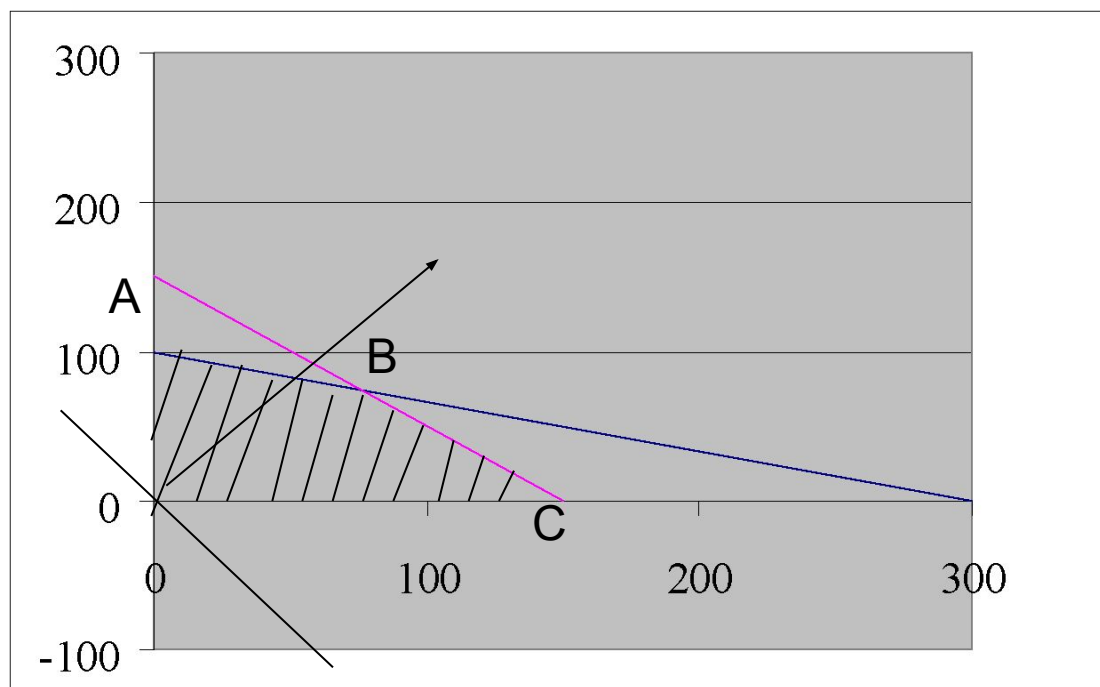


$x_1 + x_2 = 150$   
(0;150) и (150;0).



2 этап. Строится вектор-градиент с координатами  $\Delta(100;150)$  .

3 этап. Строится прямая , перпендикулярная вектору-градиенту.  
Прямая «передвигается» до момента покидания ОДР.  
Предельная точка – точка В.



4 этап.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 300 & 2x_2 = 150 \\ x_1 + x_2 = 150 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 150$$

$$x_1 = 75 \quad x_2 = 75$$

Т.к. координаты точки В равны  $x_1 = 75$  и  $x_2 = 75$ , то максимум ЦФ равен 375.

$$f = 2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 75 + 3 \cdot 75 = 375$$

## Пример № 2.

Совхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц питательного вещества А и не менее 12 единиц питательного вещества В.

Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одного животного, чтобы затраты были минимальными? Использовать данные таблицы:

Питательные вещества	Кол-во питательных веществ в 1 кг корма	
	1	2
А	2	1
В	2	4
Цена 1 кг корма	0,2	0,3



## Пример 2 .

Питательные вещества	Кол-во питательных веществ в 1 кг корма	
	1	2
А	2	1
В	2	4
Цена 1 кг корма	0,2	0,3

$x_1$  - кол-во корма 1 вида

$x_2$  - кол-во корма 2 вида

$$F(X) = 0,2x_1 + 0,3x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Пример 2 .

$$F(X) = 0,2x_1 + 0,3x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 12$$

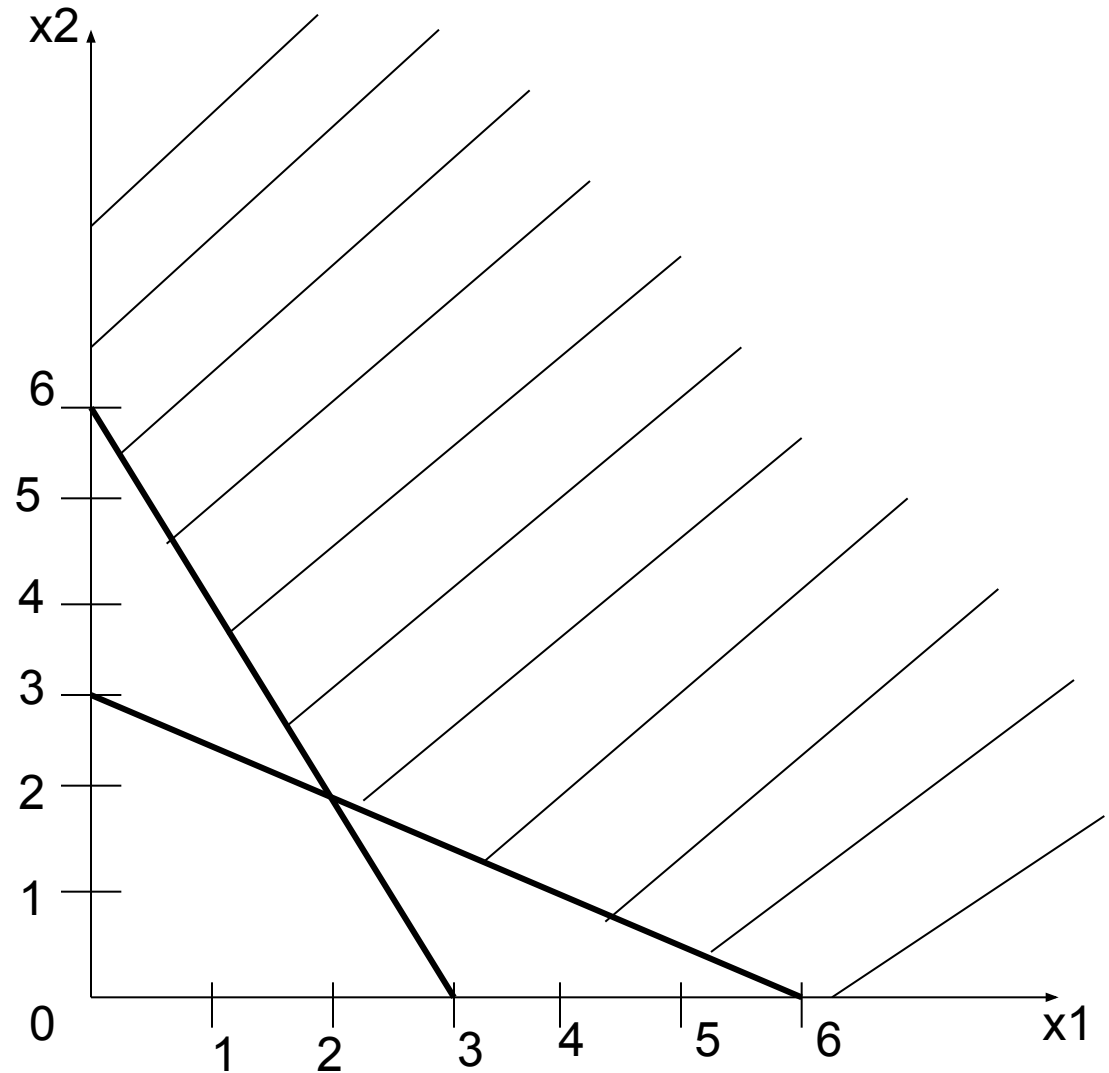
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 = 6$$

x1	0	3
x2	6	0

$$2x_1 + 4x_2 \geq 12$$

x1	0	3
x2	6	0



# Пример 2 .

$$F(X) = 0,2x_1 + 0,3x_2 \rightarrow \min$$

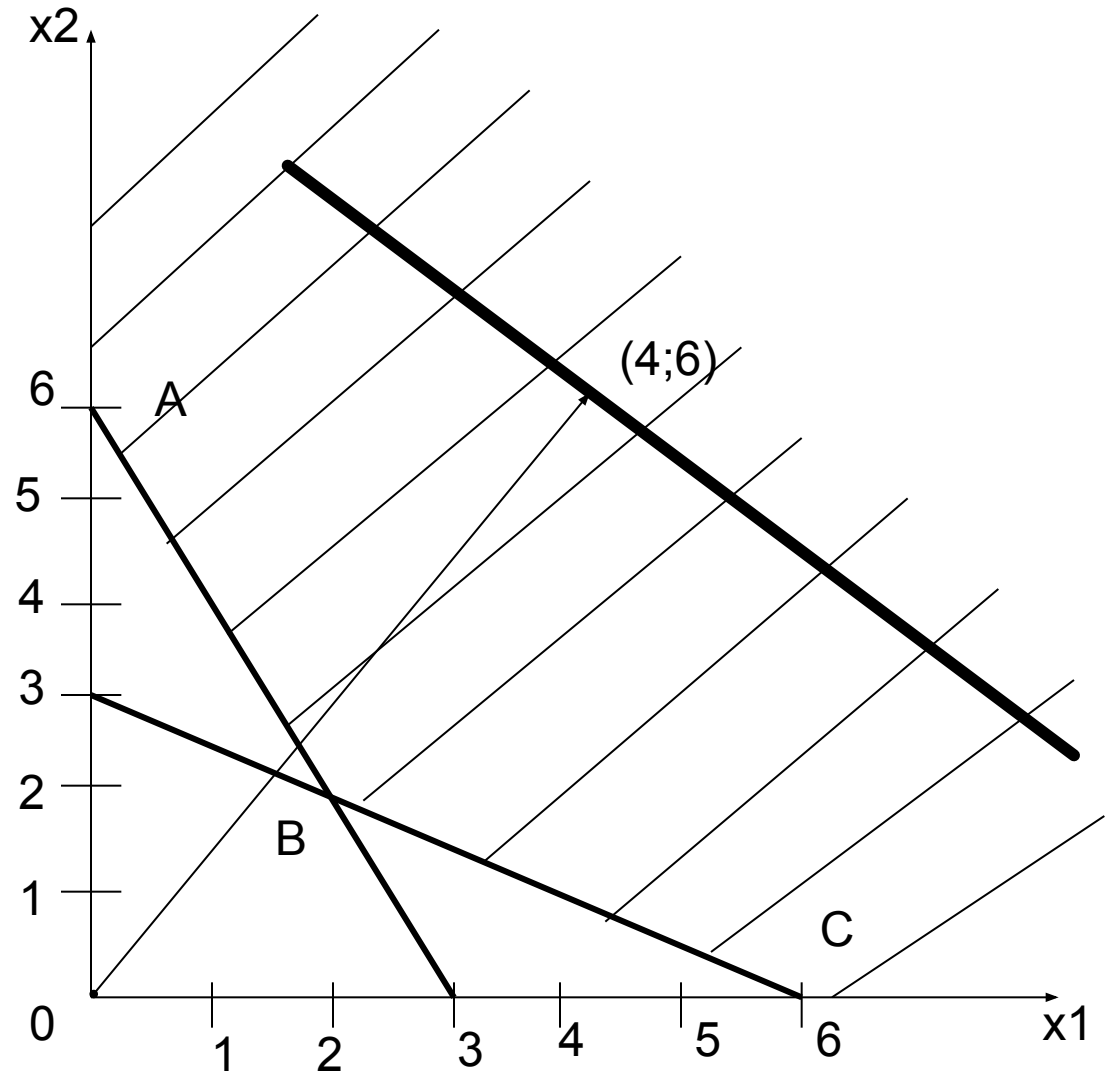
$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

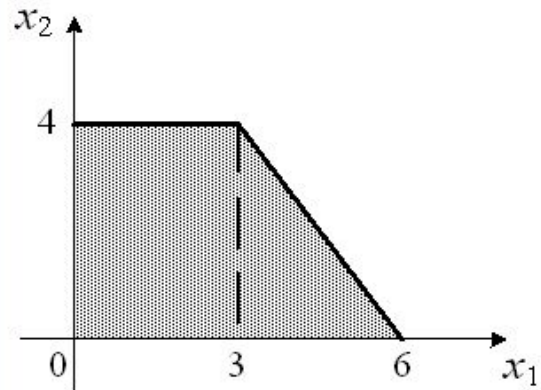
Предельная точка: B(2;2)

$$\min F(X) = 0,2 * 2 + 0,3 * 2 = 1$$



## Задание N 32

Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид:



Тогда максимальное значение функции  $z = 2x_1 + 6x_2$  равно...

## Варианты ответов

- 26
- 30
- 24
- 32

[← Предыдущий](#)[Следующий ►](#)

Заданий: 38

Дано ответов: 0

[Закончить тестирование](#)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38

70 : 09



# Особые случаи решения ЗЛП графическим методом

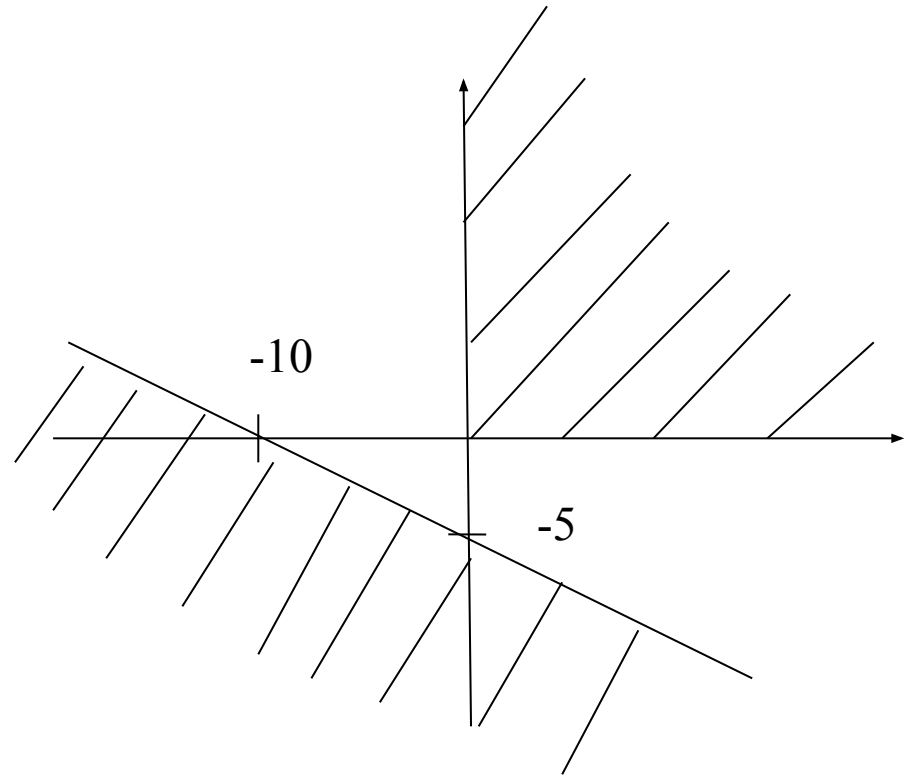
## 1 случай.

Область допустимых решений **пуста** и ЗЛП решений **не имеет**.

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_1 + 2\tilde{\sigma}_2 \leq -10 \\ \tilde{\sigma}_1 \geq 0 \\ \tilde{\sigma}_2 \geq 0 \end{cases}$$

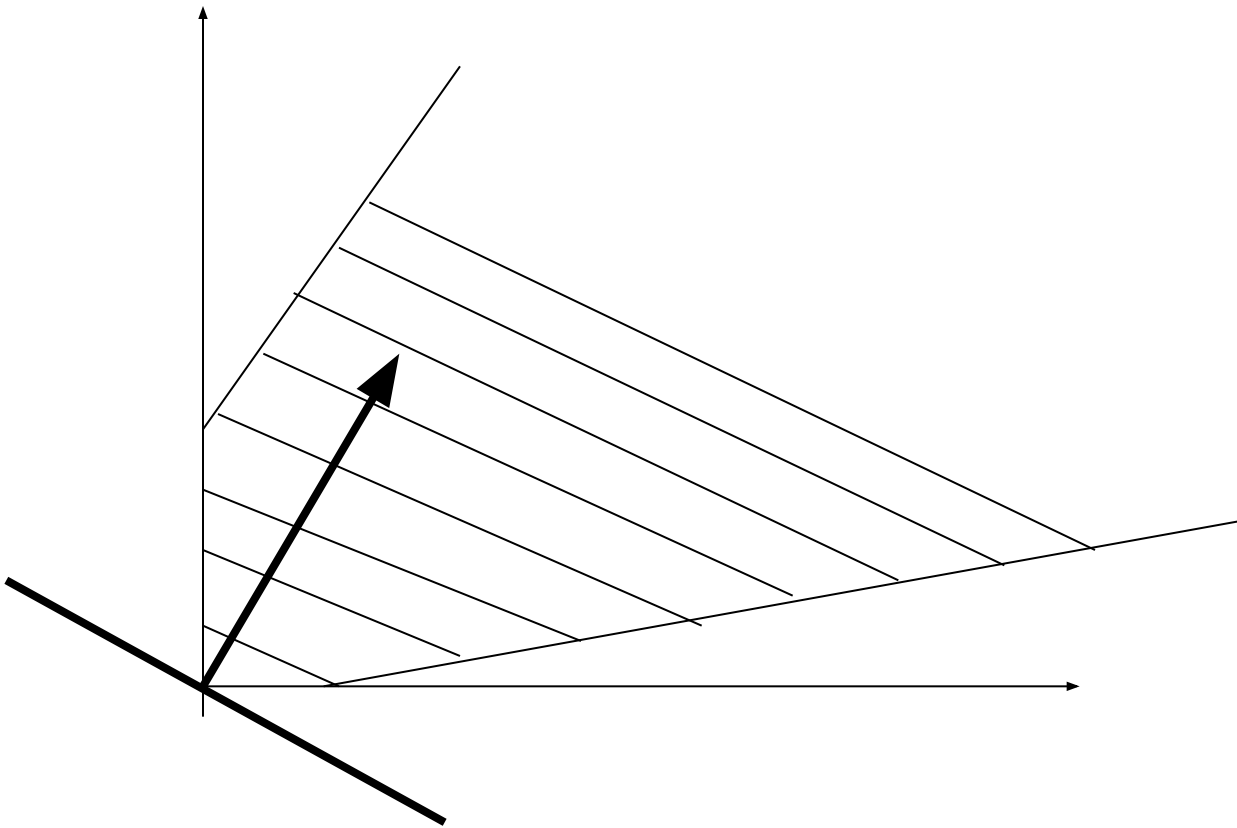
$$x_1 + 2x_2 = -10$$

$$(0; -5) \text{ и } (10; 0)$$



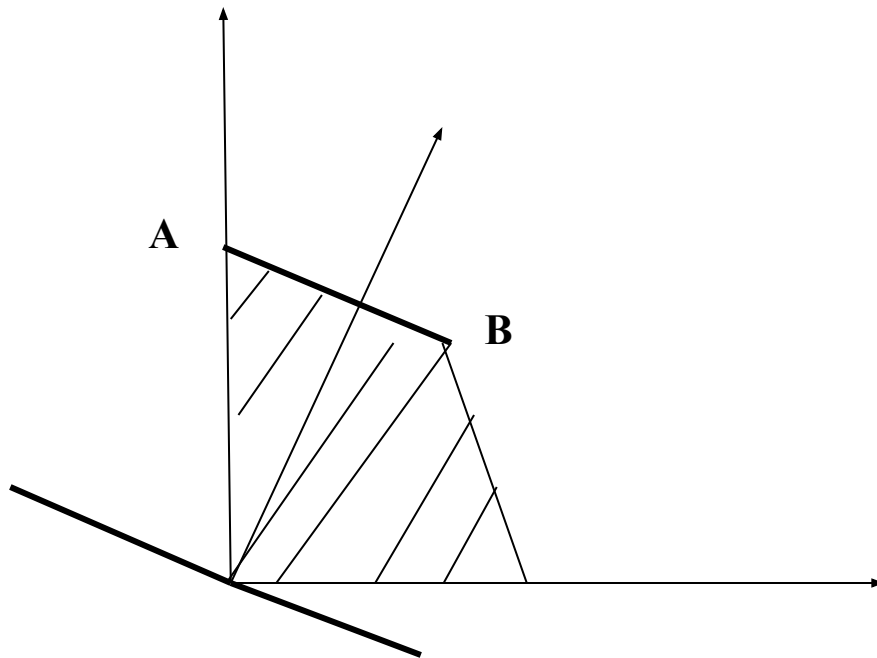
## 2 случай.

**ОДР** – незамкнутый многоугольник в направлении оптимизации целевой функции. Задача не имеет решений.



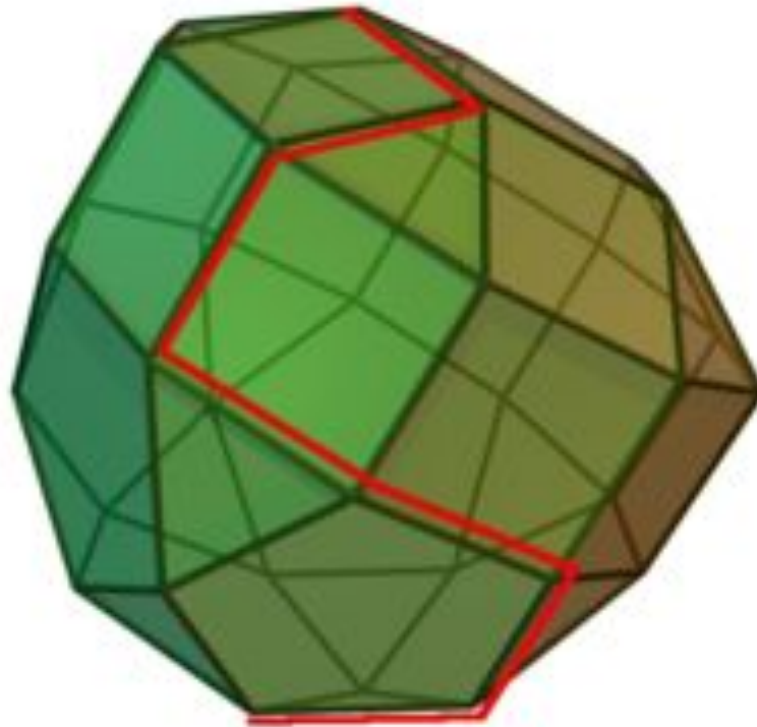
3 случай.

Решений бесконечно много.



## 2. Основы симплекс-метода

Подобно тому, как графический метод ищет оптимум в вершинах многоугольника,  
в симплексном методе оптимум ищется в вершинах  $n$ -мерного многогранника, называемого **симплексом**.





---

## 2. Основы симплекс-метода

### Алгоритм симплекс-метода

1. Путем преобразований система ограничений приводится к необходимой, так называемой **базисной**, форме.
2. Находится так называемое **опорное решение**, служащее «точкой отсчета».
3. Последовательно **перебираются вершины** симплекса.  
Если в данной точке значение критерия больше (или меньше) предыдущего, то процесс продолжается.  
Когда значение критерия уже нельзя улучшить, тогда решение найдено.

- **1 вариант**
- Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В.
- Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в два раза больше, чем акций В, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед.
- Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В – 10%. Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?
- Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

■ **1 вариант.**

$x_1$  – тыс. ден. ед. , вложенных в акции  
концерна А

$x_2$  – тыс. ден. ед. , вложенных в акции  
предприятия В

$F(x) = 0,08 x_1 + 0,10 x_2 \rightarrow \max$  - общая  
прибыль

$$x_1 + x_2 \leq 300$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## **1 вариант.**

$x_1$  – тыс. ден. ед. , вложенных в акции концерна

A

$x_2$  – тыс. ден. ед. , вложенных в акции  
предприятия B

$F(x) = 0,08 x_1 + 0,10 x_2 \rightarrow \max$  - общая прибыль

$$x_1 + x_2 \leq 300$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## **1 вариант.**

Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., ~~может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В.~~

Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в два раза больше, чем акций В,

причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед.

Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В – 10%.

---

Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

- **3 вариант**
- Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный.
- В **обычный** набор входит 3 кг азотных,
- 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений.
- Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений.
- Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный – 4 ден. ед.
- Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

#### ■ 4 вариант

- На имеющихся у фермера 400 гектарах земли он планирует посеять кукурузу и сою.
- Сев и уборка кукурузы требует на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед.
- На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед..
- Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей – 60 центнеров.
- Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед.
- Однако, согласно этому договору, фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров.
- Фермеру хотелось бы знать, сколько гектар нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

- **5 вариант**

- Продукция двух видов (краска для внутренних (I) и наружных (E) работ) поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта А и В. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 тонн, соответственно.
- Расходы продуктов А и В на 1 т соответствующих красок приведены в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на тонну краски, т		Максимально возможный запас, т
	Краска E	Краска I	
А	1	2	6
В	2	1	8

- Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3000 ден. ед. для краски E и 2000 ден. ед. для краски I.
- Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?



- **6 вариант**
- Финансовый консультант фирмы «ABC» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю.
- Клиент хочет вложить средства (не более 25000\$) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси».
- Анализируются акции «Дикси –Е» и «Дикси –В». Цены на акции: «Дикси –Е» - 5\$ за акцию; «Дикси –В» - 3\$ за акцию.
- Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук.
- По оценкам «ABC» прибыль от инвестиций в эти две акции в следующем году составит: «Дикси –Е» - 1,1\$; «Дикси –В» - 0,9\$.
- Задача консультанта состоит в том, чтобы выдать клиенту рекомендации по оптимизации прибыли от инвестиций.

- **7 вариант**
- Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей X и Y.
- Фонд рабочего времени равен 4000 чел.-ч в неделю.
- Для производства одной детали типа X требуется 1 чел./ч, а для производства одной детали типа Y – 2 чел./ч.
- Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей X и 1750 деталей Y в неделю.
- Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла.
- Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000 кг в неделю.
- Еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику.
- По профсоюзному соглашению общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.
- Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 ден. ед., а от производства одной детали типа Y – 40 ден. ед.?

- **8 вариант**

- Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины)  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице:

Питательное вещество (ВИТАМИН)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг. корма	
		I	II
$S_1$	9	3	1
$S_2$	8	1	2
$S_3$	12	1	6

- Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 ден. ед.
- Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость.

- **9 вариант**

- При производстве двух видов продукции используется 4 типа ресурсов. Норма расхода ресурсов на производство единицы продукции, общий объем каждого ресурса заданы в таблице

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

- Прибыль от реализации одной единицы продукции первого вида составляет 2 ден. ед., второго вида – 3 ден. ед.
- Задача состоит в формировании производственной программы выпуска продукции, обеспечивающей максимальную прибыль от ее реализации.

- **10 вариант**
- Фирма производит два безалкогольных напитка – «Лимонад» и «Тоник».
- Однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования.
- Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» – 0,04 ч.
- Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно.
- Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента.
- Прибыль фирмы составляет 0,10 ден. ед. за 1 л «Лимонада» и 0,30 ден. ед. за 1 л «Тоника».
- Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневной прибыли?