Двойственность в линейном программировании

- Пусть прямая задача, состоит в нахождении максимального значения функции:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

При условиях

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \le b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n \le b_k \\ a_{k+11} x_1 + a_{k+12} x_2 + \dots + a_{k+1n} x_n = b_{k+1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\ x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1n}\right) \end{cases}$$

- Тогда **двойственной** по отношению к прямой задаче называется задача нахождения минимума функции

$$F' = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m$$

При условиях

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geq c_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1l} y_1 + a_{2l} y_2 + \cdots + a_{ml} y_m \geq c_l \\ a_{1l+1} y_1 + a_{2l+2} y_2 + \cdots + a_{ml+1} y_m = c_{l+1} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m = c_n \\ y_i \geq 0 \ \left(\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}\right) \end{cases}$$

Правила формирования двойственной задачи :

- Целевая функция исходной задачи исследуется на **максимум**, а целевая функция двойственной задачи на **минимум**

- Матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений прямой задачи

и аналогичная матрица $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием.

- Число **ограничений** одной из задач совпадает с числом **переменных** в другой задаче.
- Коэффициенты при переменных в **целевой функции** одной задачи являются **свободными членами** системы ограничений в другой.

- Если переменная x_j исходной задачи может принимать только **неотрицательные** значения, то j-е ограничение двойственной задачи является **неравенством** вида “≥”.
- Если переменная x_j может принимать как **положительные, так и отрицательные** значения, то j-е ограничение двойственной задачи - **уравнение.**
- Аналогично, если i-е ограничение в системе исходной задачи является **неравенством**, то $y_i \geq 0$.
- Если же i-е ограничение есть **уравнение**, то переменная y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Алгоритм составления двойственной задачи:

- Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному виду: если в исходной задаче ищут **максимум** линейной функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду **“≤”**, а если **минимум** – к виду **“≥”.**
- Для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, умножить на **–1.**

- Составить **расширенную матрицу** системы ограничений исходной задачи, в которую включить
- матрицу коэффициентов при переменных ,
- столбец свободных членов
- и строку коэффициентов при переменных в линейной функции.

- Найти матрицу A^T транспонированную к матрице A
- Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы и условия неотрицательности переменных.

Пример. Составить задачу, двойственную к следующей задаче:

$$F = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + 4x_2 = 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Так как исходная задача на максимизацию, то приведем все неравенства системы ограничений к виду “≤”, для этого обе части первого неравенства умножим на –1. Получим:

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\leq-1 \\ -x_1+4x_2=24 \\ x_1-x_2\leq3 \\ x_1\geq0,\ x_2\geq0 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & \mathrm{F} \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу А ^{т}, транспонирующую к А.

$$A_1^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & F' \end{pmatrix}$$

Сформулируем двойственную задачу:

$$F' = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 \geq -1 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 2 \\ y_1 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Свойства двойственных задач

- **Теорема 1**. *Если исходная задача имеет оптимальный план, то и сопряженная к ней задача имеет оптимальный план, причем значение ЦФ при этих планах совпадают.*
- *Если ЦФ одной из двойственных задач не ограничена на множестве допустимых решений (для исходной – сверху, для сопряженной –снизу), то двойственная задача вообще не имеет плана.*

- **Теорема 2** . *Пара допустимых решений X* - в исходной задаче, Y* - в двойственной задаче будут оптимальными решениями тогда и только тогда, кода выполняются следующие соотношения:*

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{*} - b_i) \cdot y^{*}_i = 0 \quad i = \overline{1, m}$$

$$(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^{*}_i - c_j) \cdot x^{*}_j = 0 \quad j = \overline{1, n}$$

Связь исходной и двойственной задач

- Решение одной из них может быть получено из решения другой.
- Используя последнюю симплекс-таблицу, можно найти оптимальный план двойственной задачи.
- Компоненты оптимального плана **двойственной задачи** совпадают с элементами m+1-й строки столбцов единичных векторов **первоначального базиса**, если данный коэффициент $\mathbf{c_j=0}$, и равны сумме соответствующего элемента этой строки и c_j, если $c_j>0$.

Пример.

- Для производства трех видов изделий *I*, *II*, *III* используется 3 вида сырья. Запасы заданы в количестве, соответственно не большем **180, 210** и **244** кг.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	I	II	III
A	4	2	1
B	3	1	3
C	1	2	5
Цена	10	14	12

- Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается её **максимальная стоимость и оценить каждый из видов сырья**, используемых для производства продукции.
- *Оценки*, приписываемые каждому из видов сырья, должны быть такими,
- чтобы оценка всего используемого сырья была *минимальной*,
- а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, - *не меньше цены единицы продукции данного вида*.

Решение.

- Обозначим через x_1 – количество изделий *I*, x_2 – изделий *II*, x_3 – изделий *III*, запланированных к производству.
- Тогда нужно решить задачу

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

- Припишем каждому из видов сырья, используемых для производства продукции, **двойственную оценку**, равную **y_i** .
- Тогда общая оценка сырья, используемого на производстве продукции составит:

$$F' = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \rightarrow \min$$

- Двойственные оценки должны быть такими , чтобы общая оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, была не меньше **цены единицы продукции** данного вида, то есть должны удовлетворять следующей системе неравенств

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + \ \ y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + \ \ y_2 + 2y_3 \geq 14 \\ \ \ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12 \\ \ \ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Эти задачи образуют пару двойственных задач.
- Решение прямой задачи дает оптимальный план производства изделий *I*, *II*, *III*,
- Решение двойственной - оптимальную систему оценок сырья, используемого для производства этих изделий.

Найдем решение этой задачи симплекс-методом.

i	Базис	C_Δ	A_0	10	14	12	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	180	4	2	1	1	0	0
2	A_5	0	210	3	1	3	0	1	0
3	A_6	0	244	1	2	5	0	0	1
4			0	-10	-14	-12	0	0	0
1	A_2	14	90	2	1	1/2	1/2	0	0
2	A_5	0	120	1	0	5/2	-1/2	1	0
3	A_6	0	64	-3	0	4	-1	0	1
4			1260	18	0	-5	7	0	0
1	A_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	-1/8
2	A_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	-5/8
3	A_3	12	16	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4
4			1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

- Из этой таблицы видно, что оптимальным планом производства изделий *I*, *II*, *III* является такой, при котором изготавливается 82 изделия *II* и 16 изделий *III* и остается не использованным 80 кг сырья *B*,
- а общая стоимость изделий равна 1340 руб.
- Из этой таблицы также видно, что оптимальным решением двойственной задачи является

$$y_1 = 23/4,\ y_2 = 0,\ y_3 = 5/4.$$

Положительную двойственную оценку имеют те виды сырья, которые полностью используются.

- Переменные y_1 и y_3 обозначают двойственные оценки сырья видов *A* и *C*.
- Эти оценки отличны от нуля, и сырье видов *A* и *C* используются **полностью.**
- Двойственная оценка сырья вида *B* $y_2=0$. Этот вид сырья используется **не полностью**.

Вычислим значение целевой функции двойственной задачи

$$F' = 180 \cdot 23/4 + 210 \cdot 0 + 244 \cdot (5/4) = 1340$$

Первая теорема двойственности выполняется – значение целевых функций двух задач получилось равным

Проверим вторую терему двойственности

- Сначала подставим полученные значения переменных в ограничения прямой задачи, вычтем свободные члены и умножим ограничения на двойственные оценки. Должны получиться нули

$$\begin{cases} (4\cdot 0+2\cdot 82+16-180)\cdot 23/4=0 \\ (3\cdot 0+\ 82+3\cdot 16-210)\cdot 0=0 \\ (0+2\cdot 82+5\cdot 16-244)\cdot 5/4=0 \end{cases}$$

- Подставим значения двойственных оценок в ограничения двойственной задачи

$$\begin{cases} (4\cdot 23/4+3\cdot 0+5/4-10)\cdot 0=0 \\ (2\cdot 23/4+0+2\cdot 5/4-14)\cdot 82=0 \\ (23/4+3\cdot 0+5\cdot 5/4-12)\cdot 16=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 23+5/4>10 \\ 23/2+5/2=14 \\ 23/4+25/4=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23 + 5/4 > 10 \\ 23/2 + 5/2 = 14 \\ 23/4 + 25/4 = 12 \end{cases}$$

- Первое ограничение выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка сырья, используемого на производство одного изделия типа *I*, выше цены этого изделия и, следовательно, выпускать изделие *I* невыгодно.
- Второе и третье ограничения являются равенствами. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемого на производство единицы изделий *II* и *III* равны их ценам. Поэтому выпускать изделия этих двух видов экономически целесообразно.

Вопросы

1. Какую задачу называют двойственной?
2. Как формируется двойственная задача?
3. Как связаны виды ограничений и условия неотрицательности переменных?
4. Первая теорема двойственности
5. Вторая теорема двойственности.
6. Как можно получить оптимальное решение двойственно задачи из решения прямой?