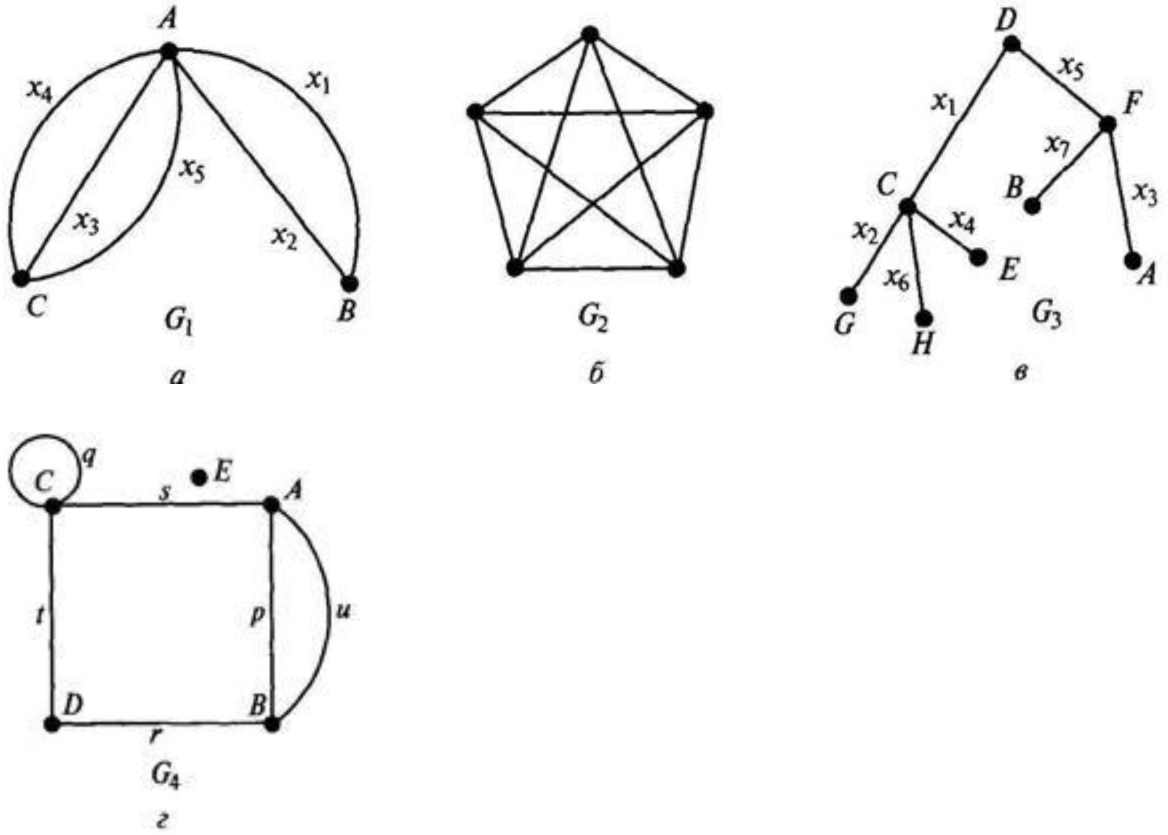
# Основные понятия и определения графа и его элементов

Выполнила студентка группы 31ПИ Кудряшова Лена

**Графом** *G = (V, X)* называется пара двух конечных множеств: множество точек и множество линий *X*, соединяющих некоторые пары точек. В терминах декартова произведения подмножество множества *V´V: XÌV´V.*

Точки называются **вершинами или узлами** графа, линии — **ребрами** графа




*Примеры графов: а — со смежными вершинами; 6 — полный; в – со смежными ребрами; г — с петлей*

Пусть дан граф $G = (V, X)$, где $v = [V, W, ...\}$ — конечное непустое множество его вершин, а $X(V, W)$ — его ребра. Если ребро графа $G$ соединяет две его вершины $V$ и $W$ (т.е. *<V, W>ÎX),* то говорят, что это ребро им **инцидентно.**

Две вершины графа называются **смежными,** если существует инцидентное им ребро.

Если граф $G$ имеет ребро $X(V, W)$, *у* которого начало и конец совпадают, то это ребро называется **петлей.**

Два ребра называются **смежными,** если они имеют общую вершину.

- Граф *G( V, X)* может иметь ребра с одинаковыми парами вида *X (V, W).* Такие ребра называются **кратными, или параллельными.**

- Количество одинаковых пар вида *X(V, W*) называется **кратностью** ребра *(V, W*).

- Вершина графа, имеющая степень, равную нулю, называется **изолированной.**

- Граф, состоящий из изолированных вершин, называется **нуль-графом.**

- Вершина графа, имеющая степень, равную 1, называется **висячей.**

# Теорема 1.

*В графе G(V,X) сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа:*

- где *п = ïVï* — число вершин; *m = ïXï* — число ребер графа.

Вершина называется четной (**нечетной** ) если ее степень четное (нечетное) число.

# Теорема 2.

*Число нечетных вершин любого графа — четно.*

**Следствие.**Невозможно начертить граф с нечетным числом нечетных вершин.

- Граф *G* называется **полным,** если любые две его различные вершины соединены одним и только одним ребром.

- **Дополнением** графа *G(V,X))* называется граф (*V,* ) с теми же вершинами *V,* что и граф *G,* и имеющий те и только те ребра ; которые необходимо добавить к графу *G,* чтобы он стал полным.

- Если все пары *($V_i$ , $V_j$)* во множестве *X* являются упорядоченными, т.е. кортежами длины 2, то граф называется **ориентированным, орграфом,** или **направленным.**
- **Началом** ребра называется вершина, указанная в кортеже первой, **концом**— вторая вершина этой пары (графически она указана стрелкой).
- Ребра ориентированного графа имеют определенные фиксированные начало и конец и называются **дугами.**
- **Степенью**-**входа (выхода)** вершины ориентированного графа называется число ребер, для которых эта вершина является концом (началом).
- Дуги орграфа называются **кратными,** если они имеют одинаковые начальные и конечные вершины, т.е. одинаковые направления.

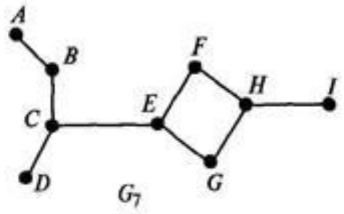
- Последовательность попарно инцидентных вершин $V_{i1}$, $V_{i2}$, ..., $V_{ik}$ неориентированного графа, т.е. последовательность ребер неориентированного графа, в которой вторая вершина предыдущего ребра совпадает с первой вершиной следующего, называется **маршрутом.**
- Число ребер маршрута называется **длиной** маршрута.
- Если начальная вершина маршрута совпадает с конечной, то такой маршрут называется **замкнутым** или **циклом.**
- **Расстоянием** между двумя вершинами называется минимальная длина из всех возможных маршрутов между этими вершинами при условии, что существует хотя бы один такой маршрут.
- В маршруте одно и то же ребро может встретиться несколько раз. Если ребро встретилось только один раз, то маршрут называется **цепью.**

- В орграфе маршрут является ориентированным и называется **путем.** Другими словами, **путь**— упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего и все ребра единственны.
- **Цикл** в орграфе — путь, у которого совпадают начало и конец.
- Цепь, путь и цикл в графе называются **простыми,** если они проходят через любую из вершин не более одного раза.
- Неориентированный граф называется **связным,** если между любыми двумя его вершинами есть **маршрут.**
- Две вершины называются **связными,** если существует маршрут между ними.
- Граф *G* можно разбить на непересекающиеся подмножества $X_i$ по признаку связности. Вершины одного множества являются связными между собой, а вершины различных множеств — несвязны. Тогда все подграфы $V_i$(классы эквивалентности) графа *G* называют **связными компонентами, или компонентами связности.**Связный граф имеет одну компоненту связности.

# Теорема 3.

*Для того чтобы связный граф G являлся простым циклом, необходимо и достаточно, чтобы каждая его вершина имела степень, равную 2.*

Ребро (*V, W*) связного графа *G* называется **мостом,** если после его удаления *G* станет несвязным и распадется на два связных графа *G '* и *G ''.* На рисунке мост *(CE)* разделил связный граф $G_7$ на два различных связных графа: *G ' с* вершинами *(A, B, C,D)* и *G ''* с вершинами *(E, F, G,H,I).* Также мостом является ребро *EC.*




*Граф $G_7$ с мостами BC и CE*

# Теорема 4.

*Ребро графа является мостом тогда и только тогда, когда не принадлежит ни одному циклу.*

- Графы $G'$ и $G''$ называются **изоморфными,** если существует взаимно-однозначное соответствие между их ребрами и вершинами, причем соответствующие ребра соединяют соответствующие вершины.
- Графы $G_1$ $(V_1 , X_2)$ и $G_2(V_2, X_2)$ называются **изоморфными,** если $| V_1 | = | V_2 | = n$ и существует подстановка sÎ$S_n$, такая, что $V_2 = s(V_1)$, а $X_2 = \{s (V_i); s( V_j))$ ï $(V_i, V_j)$Î $X_1\}$.

- Граф $G$ называется **планарным (плоским),** если существует изоморфный ему граф $G'$, в изображении которого на плоскости ребра пересекаются только в вершинах.

- **Областью** называется подмножество плоскости, пересекающееся с планарным графом только по некоторому простому циклу графа, являющемуся границей области.