п.24 Арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи. Комплексно сопряженные числа.

Выписать определения, основные формулы, разобрать примеры. Выполнить домашнюю работу слайды 16-19.

Два комплексных числа называются ***сопряженными***, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

$$z_1 = a + b\boldsymbol{i} \quad \text{и} \quad z_2 = a - b\boldsymbol{i}$$

Например:

$$z_1 = 2 + 3\boldsymbol{i} \quad \text{и} \quad z_2 = 2 - 3\boldsymbol{i}$$

Действия над комплексными числами

1) Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

а) Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Свойства операции сложения:

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$,
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,
3. $z+0=z$.

б) Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Разностью двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1 и определяется равенством

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

в) Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1=x_1+y_1 i$ и $z_2=x_2+y_2 i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$Z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$i^2 = -1.$$

Свойства операции умножения:

1. $z_1 z_2 = z_2 z_1$,
2. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$,
3. $z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$,
4. $z \cdot 1 = z$.

г) Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению.

Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т. е. $\frac{z_1}{z_2} = z$, если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$, $z = x + yi$, то из равенства $(x+yi)(x_2+iy_2) = x_1 + y_1 i$, следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Два комплексных числа называются **сопряженными**, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.
Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.
Пример. Выполнить деление:

$$\frac{2+3i}{5-7i}$$

Решение. Произведем умножение для делимого и делителя в отдельности:
$(2 + 3i)(5 + 7i) = 10 + 14i + 15i + 21i^2 = -11 + 29i$;
$(5 - 7i)(5 + 7i) = 25 - 49i^2 = 25 + 49 = 74$.
Итак,

$$\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{-11+29i}{74}$$

На практике вместо полученной формулы используют следующий прием: умножают числитель и знаменатель дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 2. Даны комплексные числа $10+8i$, $1+i$. Найдем их сумму, разность, произведение и частное.

Решение.

а) $(10+8i)+(1+i)=(10+1)+(8+1)i=11+9i;$

б) $(10+8i)-(1+i)=(10-1)+(8-1)i=9+7i;$

в) $(10+8i)(1+i)=10+10i+8i+8i^2=2+18i;$

г) $\dfrac{10+8i}{1+i}=\dfrac{(10+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{10-10i+8i-8i^2}{1-i^2}=\dfrac{18-2i}{2}=9-i.$

д) Возведение комплексного числа, заданного в алгебраической форме в n-ю степень

Выпишем целые степени мнимой единицы:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i,$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1,$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

В общем виде полученный результат можно записать так:

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i; \qquad i^{4n+2} = -1; \qquad i^{4n+3} = -i \;\; (n = 0,\, 1,\, 2, \ldots).$$

Пример 3. Вычислить i^{2092} .

Решение.

1) Представим показатель степени в виде $n=4k+l$ и воспользуемся свойством степени с рациональным показателем $z^{4k+l}=(z^4)^k \cdot z^l$.

Имеем: $2092=4\cdot 523$.

Таким образом, $i^{2092} = i^{4\cdot 523} =(i^4)^{523}$, но так как $i^4=1$, то окончательно получим $i^{2092} =1$.

Ответ: $i^{2092} =1$.

е) *Извлечение квадратного корня из комплексного числа*

Квадратным корнем из комплексного числа называется такое комплексное число, квадрат которого равен данному.

Обозначим квадратный корень из комплексного числа $x+yi$ через $u+vi$, тогда по определению $\sqrt{x+yi}=u+vi.$

Формулы для нахождения u и v имеют вид

$$u=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$v=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (1)$$

Знаки u и v выбирают так, чтобы полученные u и v удовлетворяли равенству $2uv=y$.

Пример 4. Извлечем квадратный корень из комплексного числа $z=5+12i$.

Решение.

Обозначим квадратный корень из числа z через $u+vi$, тогда $(u+vi)^2=5+12i$.

Поскольку в данном случае $x=5$, $y=12$, то по формулам (1) получаем:

$$u^2=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5^2+12^2}\right)=\frac{1}{2}(5+13)=9;$$

$$v^2=\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{5^2+12^2}\right)=4;$$

$$u^2=9;\quad u_1=3;\quad u_2=-3;\quad v^2=4;\quad v_1=2;\quad v_2=-2.$$

Таким образом, найдено два значения квадратного корня: $u_1+v_1i=3+2i$, $u_2+v_2i=-3-2i$, . (Знаки выбрали согласно равенству $2uv=y$, т.е. поскольку $y=12>0$, то u и v одного комплексного числа одинаковых знаков.)

Ответ: $\sqrt{5+12i}=\pm(3+2i)$.

2) Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Рассмотрим два комплексных числа z_1 и z_2 , заданных в тригонометрической форме

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z_2 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

а) Произведение комплексных чисел

Выполняя умножение чисел z_1 и z_2 , получаем

$$z_1 \cdot z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= r\rho(\cos\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) =$$

$$= r\rho((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)),$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r\rho(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))}$$

б) Частное двух комплексных чисел

Пусть заданы комплексные числа z_1 и $z_2 \neq 0$.

Рассмотрим частное $\dfrac{z_1}{z_2}$, имеем

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi+i\sin\psi)}=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi-i\sin\rho)}{\rho(\cos\psi+i\sin\psi)(\cos\psi-i\sin\psi)}=$$

$$=\frac{r}{\rho}\left(\frac{(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)+i(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\varphi)}{\cos^2\psi+\sin^2\psi}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r}{\rho}\left(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)\right)$$

Пример . Даны два комплексных числа $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,
$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Найдите $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$.

Решение.

1) Используя формулу $z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$, получаем

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

2) Используя формулу $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$, получаем

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Следовательно, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

Ответ: $z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Найти произведение комплексных чисел:

$$z_1 = \frac{7}{2}\left(\cos 95^0 + i\sin 95^0\right) \quad и \quad z_2 = 2\left(\cos\left(-65^0\right) + i\sin\left(-65^0\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = \frac{7}{2}\cdot 2\left(\cos\left(95^0 + \left(-65^0\right)\right) + i\sin\left(95^0 + \left(-65^0\right)\right)\right) =$$

$$= 7\left(\cos\left(95^0 - 65^0\right) + i\sin\left(95^0 - 65^0\right)\right) = 7\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right) =$$

$$= 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \underline{\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}i}$$

Найти частное комплексных чисел:

$$z_1 = \frac{2}{3}\left(\cos 150^0 + i\sin 150^0\right) \quad и \quad z_2 = 2\left(\cos 90^0 + i\sin 90^0\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{\left(\cos 150^0 + i\sin 150^0\right)}{\left(\cos 90^0 + i\sin 90^0\right)} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(150^0 - 90^0\right) + i\sin\left(150^0 - 90^0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

Домашняя работа

Вычислите:

1. $(2 + 3i) + (5 + i) =$

2. $(-2 + 3i) - (1 - 8i) =$

3. $(-2 + 3i) + (1 - 3i) =$

При выполнении умножения можно использовать формулы:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab \pm b^3$.

Пример. Выполнить действия:

а) $(2 + 3i)^2$;   б) $(3 – 5i)^2$;   в) $(5 + 3i)^3$.

Решение.

а) $(2 + 3i)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i – 9 = – 5 + 12i$;

Выполнить действия:

б) $(3 – 5i)^2 =$

в) $(5 + 3i)^3 =$

Действия над комплексными числами

Найти произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 1 - 4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(2 + 3i\right) \cdot \left(1 - 4i\right) =$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 - 4i} = \frac{(2 + 3i) \cdot (1 + 4i)}{(1 - 4i) \cdot (1 + 4i)} =$$