

Комплексные числа:

**от прошлого к
настоящему**

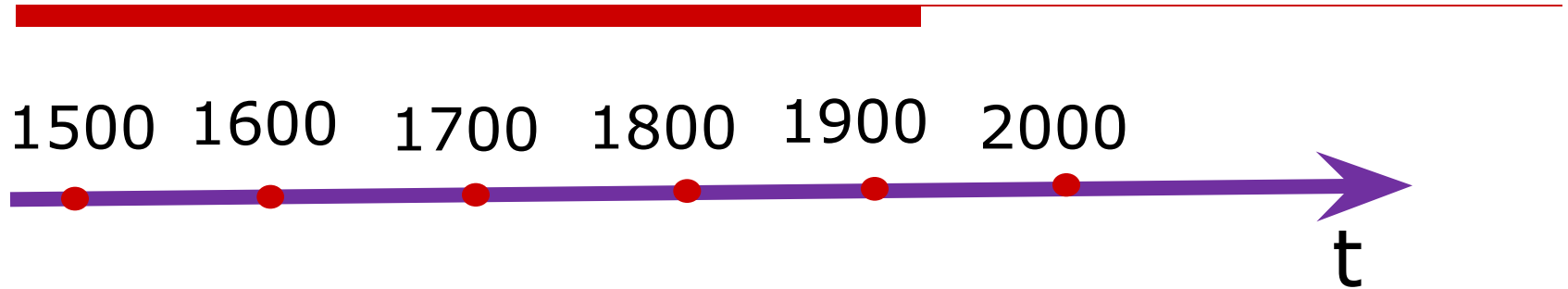
Урок обобщения по теме
«Комплексные числа» в 10 классе»

Цель занятия: повторение и обобщение знаний по теме; с выходом на ознакомление с элементами теории функций комплексной переменной.

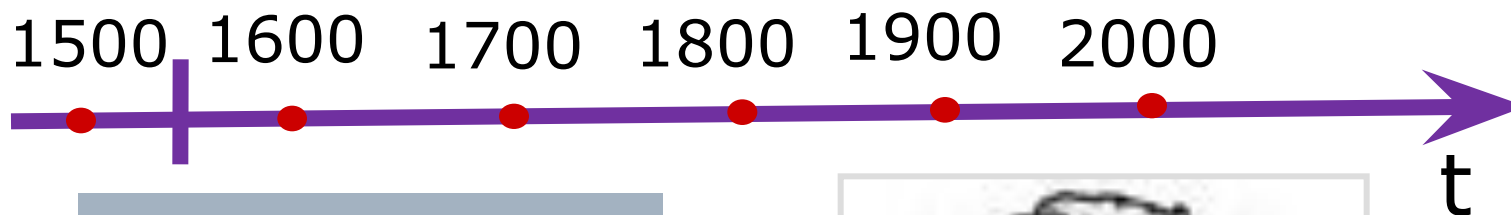
Задачи:

- 1 - повторение вопросов теории
 - 2 - вычислительная работа, связанная с алгебраической формой комплексного числа
 - 3 - практическая работа, связанная с геометрической интерпретацией комплексных чисел, выход на функции комплексных переменных
 - 4 – итоговый контроль
-

Лента времени



Лента времени



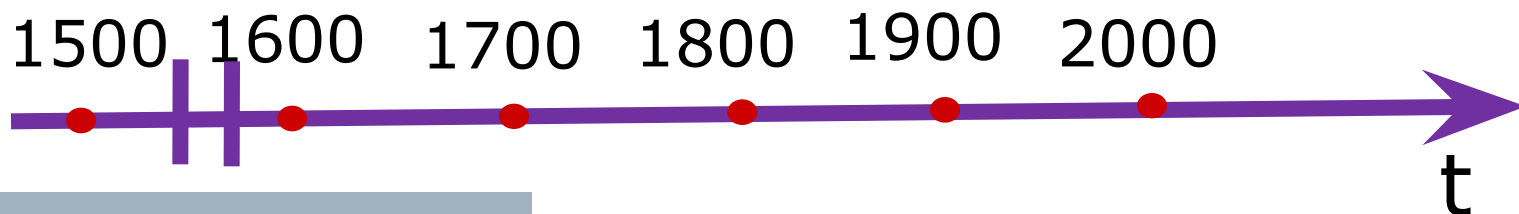
1545 Италия

Д.Кардано

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$$



Лента времени



1572 Италия
Р. Бомбелли

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Выполните действия, ответы запишите в тетрадь

1) $(3+2i)+3(-1+3i)$

2) $i-2-(6-5i)$

3) $(1+i)(1-i)$

4) i^3, i^{101}

5) $\frac{3}{i}$

6) $(1+i)^4$

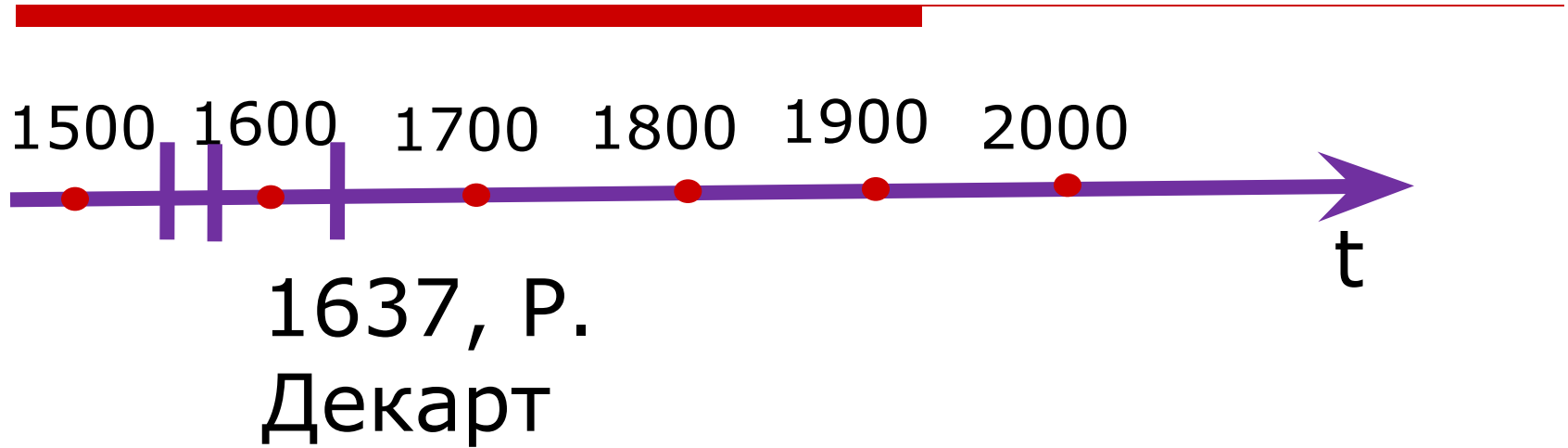
Разложите на множители в комплексных числах:

7) $x^2 + 1,$ 8) $a^2 + 4b^2,$ 9) $x^4 - 16$

Проверь себя!

- ☐ 1) $11i$
 - ☐ 2) $-8+6i$
 - ☐ 3) 2
 - ☐ 4) $-i, i$
 - ☐ 5) $-3i$
 - ☐ 6) -4
 - ☐ 7) $(x-i)(x+i)$
 - ☐ 8) $(a+2bi)(a-2bi)$
 - ☐ 9) $(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$
-

Лента времени

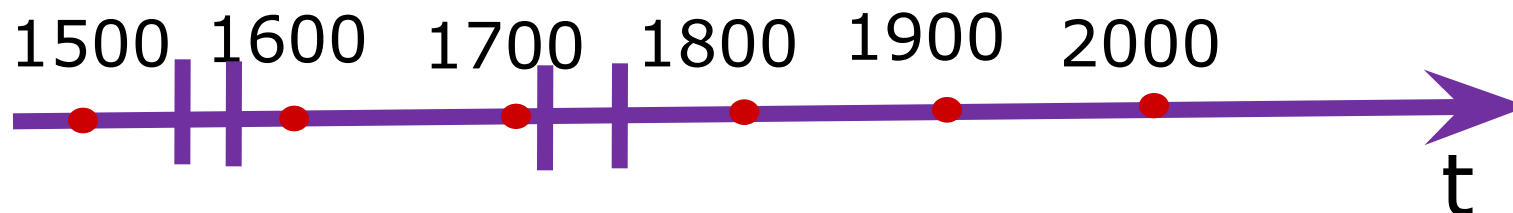




« Мнимые числа - это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием»

(Г.Лейбниц)

Лента времени



1748 Л. Эйлер

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \text{ при } x = 2\pi$$

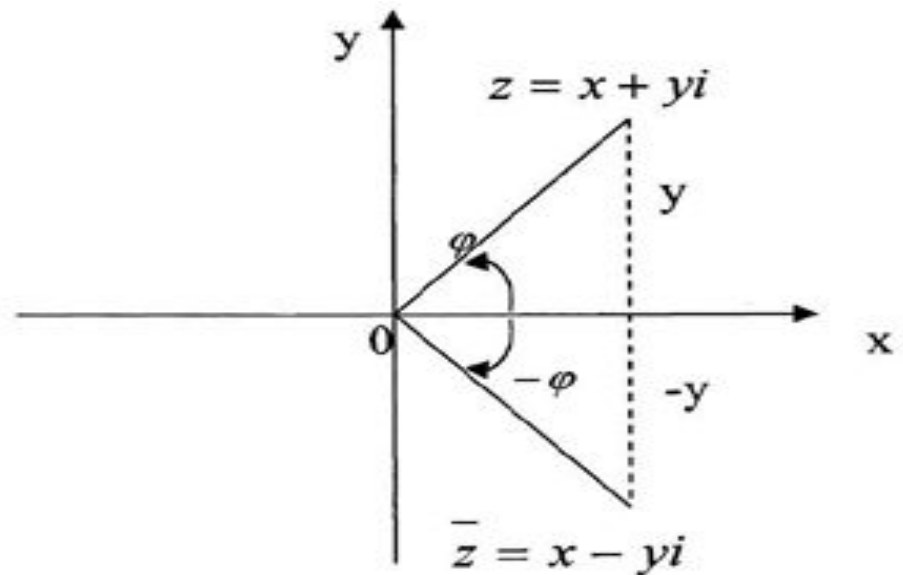
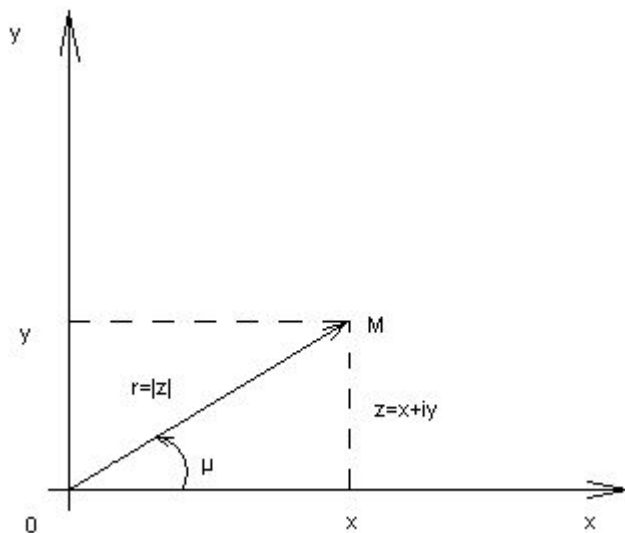
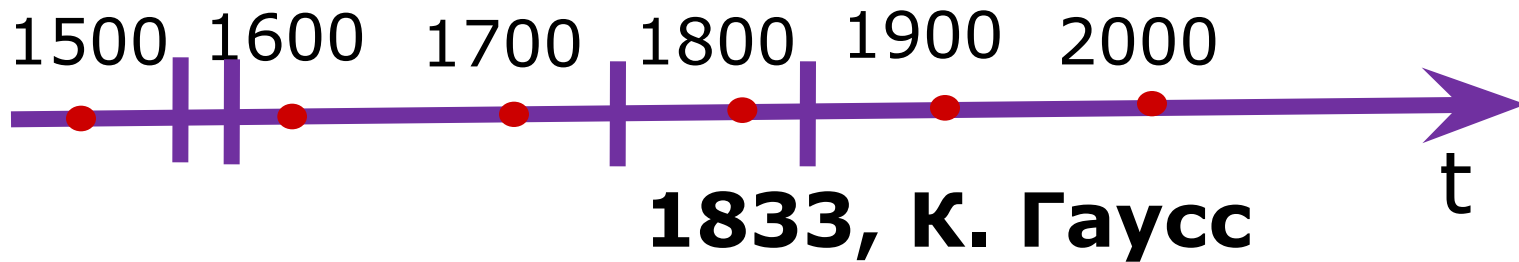
Словарь терминов

- Комплексный-лат. составной, сложный. Термин введён Гауссом
- i-первая буква французского слова *imaginaire*, мнимый
- Инверсия, *inversio* - лат. переворачивание



Карл Фридрих Гаусс
1777—1855

Лента времени



Основные определения

- Число вида $z=a+bi$ называется комплексным, a и b -действительные числа, i -мнимая единица

$$\operatorname{Re} z=a, \operatorname{Im} z=b$$

- Модулем комплексного числа называется

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

- Аргументом комплексного числа z называется угол между положительным направлением полуоси OX и радиус-вектором OM , $M(a,b)$

- Главный аргумент $\arg z$ заключен в границах

$$\varphi \in (-\pi; \pi]$$

- Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Основные формулы

$$\bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

формула Муавра (1707)

Тригонометрическая форма комплексного числа

- ☐ Изобразите комплексное число на плоскости $z = -2 + 2i$
 - ☐ Запишите данное число в тригонометрической форме
-
-

Тригонометрическая форма комплексного числа

- Изобразите комплексное число на плоскости $z = -2 + 2i$
 - Запишите данное число в тригонометрической форме
-

$$|z| = 2\sqrt{2}, \arg z = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

Решите задачу различными способами в алгебраической и тригонометрической форме

Найдите z^6 , если $3z - \bar{z} = -4 + 8i$

Указания к решению

1 способ.

Если $z=x+iy$, то получаем уравнение

$$3x+3yi-x+yi=-4+8i,$$

$$x+2yi=-2+4i,$$

Используем условие равенства комплексных чисел, получаем, что $x=-2$, $y=2$.

При возведении в квадрат, получаем число $-8i$, которое возводим в куб.

Ответ: $512i$

2 способ.

Представленное в тригонометрической форме число возвести по формуле Муавра в 6-ю степень.

Геометрическое место точек

- Изобразить на плоскости ГМТ, удовлетворяющих условиям:

№1. $|z + i| = 1,5$

№2. $\operatorname{Im} \bar{z} \geq -2$

№3. $-\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$

№4. $\operatorname{Re}(z^2) = 0$

№5. Решения уравнения $w^6 + 1 = 0$

Полученные ГМТ

№1. Окружность с центром $(0; -1)$ и радиусом $1,5$

№2. Полуплоскость $y \leq 2$.

№3. Угол, заключенный между заданными лучами.

№4. Прямые $y=x$ и $y=-x$.

№5. Точки, расположенные в вершинах правильного
6-тиугольника с центром $(0;0)$.

Модуль равен 1 .

Простейший аргумент $\frac{\pi}{6}$

Функции комплексного переменного

- Задайте условиями четверть круга с центром в точке $(0;0)$, радиусом 2.

- Выполните преобразования и постройте ГМТ w , удовлетворяющее условию:

Выполните:

I вариант - а, в, д

II вариант - б, г, д.

$$a) w = z + (3 + i)$$

$$б) w = 2z$$

$$в) w = z(1 - i)$$

$$г) w = z^3$$

$$д) w = \frac{1}{z}$$

Решения задач

$$\begin{cases} 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \\ |z| \leq 2 \end{cases}$$

а) параллельный перенос на вектор $(3;1)$.

б) гомотетия с центром $(0;0)$ и коэффициентом 2.

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi); \quad w = 2|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

в) поворот на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке;

гомотетия с коэффициентом $\sqrt{2}$ и центром $(0;0)$

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi); \quad 1 - i = \sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$$

$$w = \sqrt{2}|z|(\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right))$$

Решения задач

$$e) \quad w = |z|^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi);$$

$$\begin{cases} |w| = 8 \\ 0 \leq \arg w \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$d) \quad 1 = 1(\cos 0^0 + i \sin 0^0);$$

$$w = \frac{1}{|z|} (\cos(0^0 - \varphi) + i \sin(0^0 - \varphi));$$

$$w = \frac{1}{|z|} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

$$\begin{cases} |w| = \frac{1}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg w \leq 0 \end{cases}$$

Внутренние точки переходят во *внешние*,
штриховка вне фигуры.

Такое преобразование называется *инверсией*.

Этап 4. Итоговый тест.

Проверь себя! («да» или «нет»)

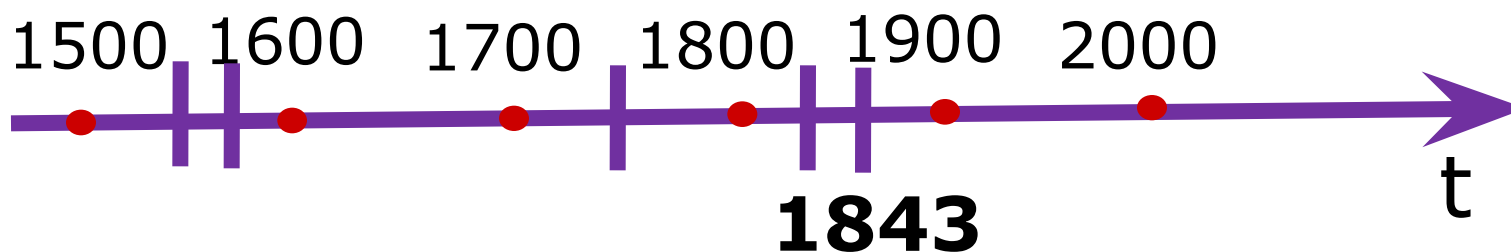
1. Число $1+i$ является действительным?
 2. $-2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$ - является тригонометрической формой комплексного числа?
 3. Многочлен $(x+4)$ можно разложить на множители в комплексных числах?
 4. Если комплексное число равно своему сопряженному, то оно является действительным?
 5. Число $\boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ имеет аргумент равный $\pi/3$?
-

Отвѣты

1. Нет
2. Нет
3. Да
4. Да
5. Нет

*

Лента времени



У.Р. Гамильтон

$$q = x + yi + uj + vk,$$

где i, j, k – новые числа, являющиеся аналогом мнимой единицы в комплексных числах.

Домашнее задание:
34.38, 35.42, 32.36(а, б)

**«Мысль выражать все числа знаками
настолько проста, что именно из-за этой
простоты сложно осознать, сколь она
удивительна»**

Пьер Симон Лалас

Вам поклоняюсь, вас желаю, числа!
Свободные, бесплотные как тени,
Вы радугой связующей повисли
К раздумиям с вершины вдохновенья.

Валерий Яковлевич Брюсов
(русский писатель, 1873-1924)

Дополнительные задачи

**Каков геометрический смысл
выражений:**

а) $|z|$,

б) $\text{Arg}z$;

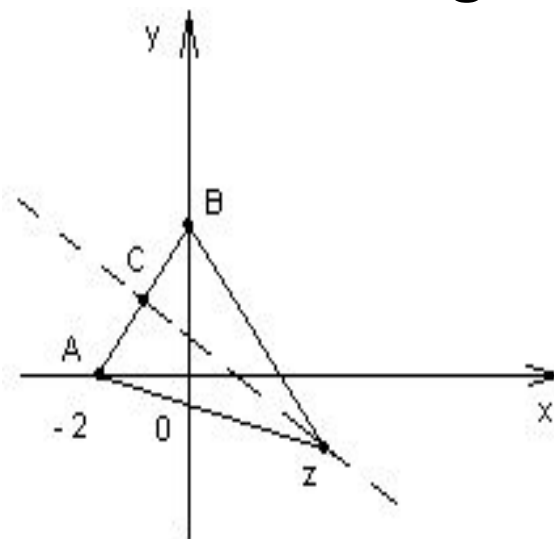
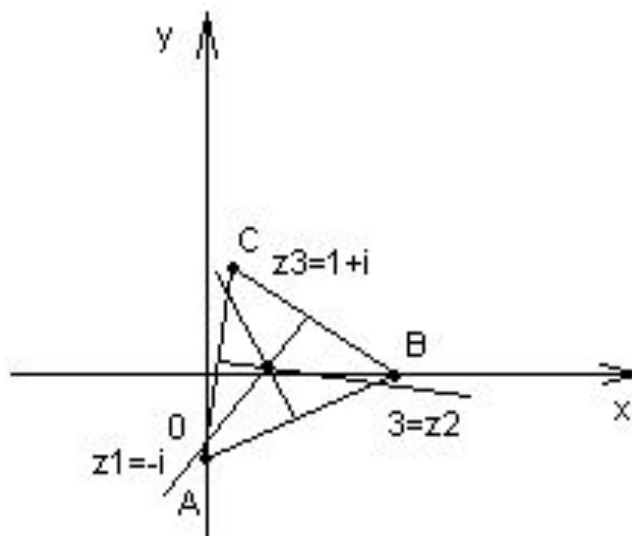
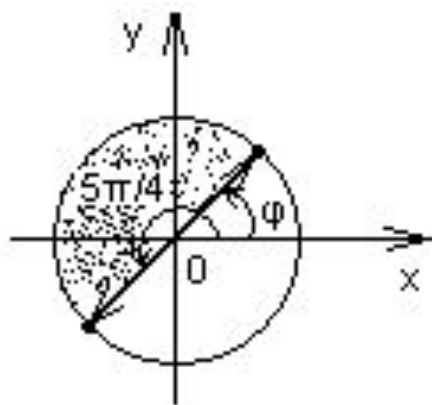
в) $|z_1 - z_2|$,

г) $\text{Arg}(z_1/z_2)$?

Найти геометрическое место точек:

$$|z-3i|=|z+2|; \quad |z+i|=|z-3|=|z-1-i|; \quad |z|\leq R$$

$$\pi/4 \leq \arg z \leq 5\pi/4$$



Вычислить: $i i^2 i^3 \dots i^{10} = ?$

Доказать, что

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3\sin^2 \varphi \cos \varphi;$$

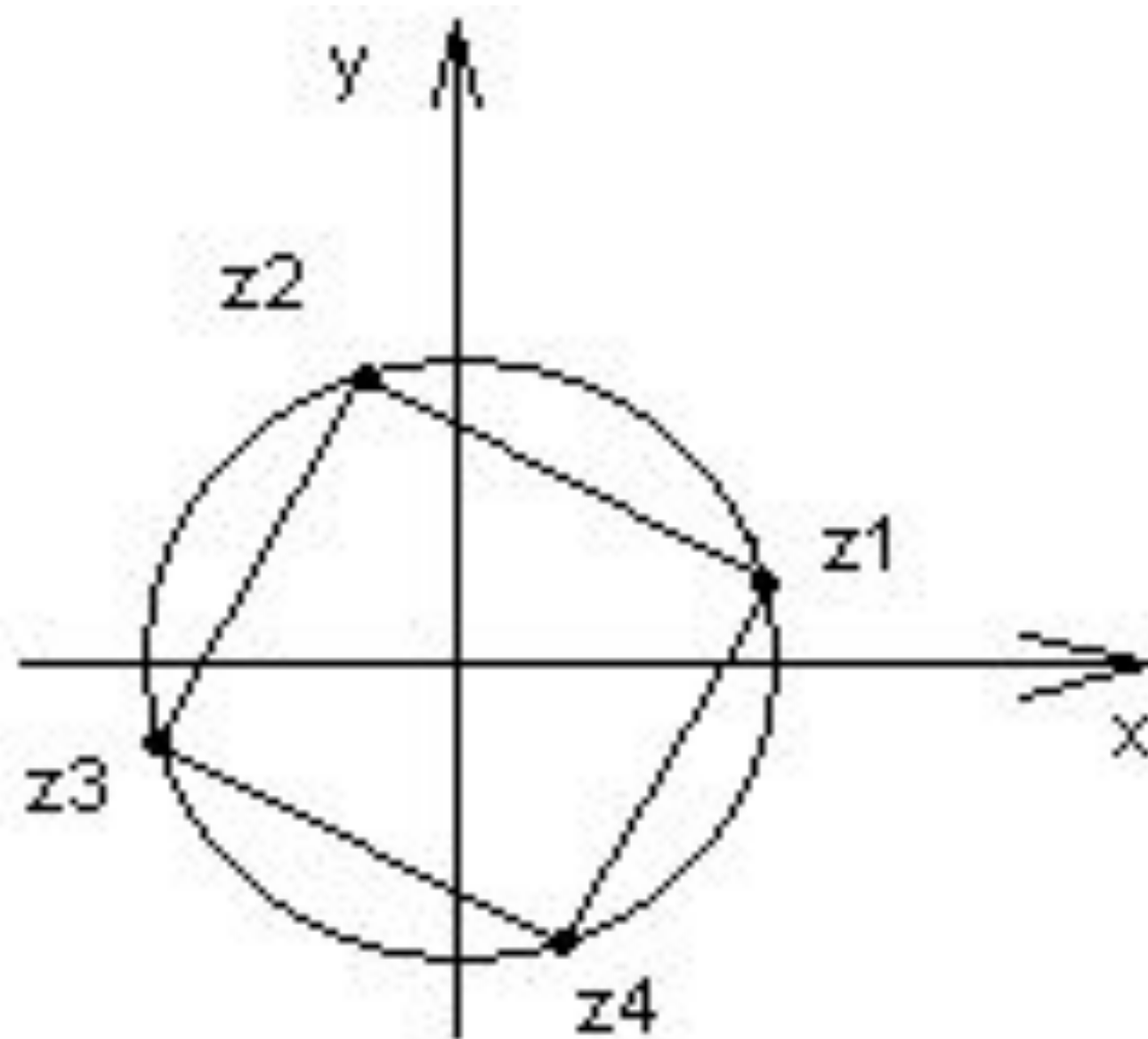
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Найти действительные
решения уравнения

$$(3+i)x+(-5+2i)y=4+16i.$$

Найти все значения корня $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$.

Дать геометрическую иллюстрацию.



Представить в
алгебраической форме
комплексное число

$$1/(1+i\sqrt{3})^6 - 1/(\sqrt{3}-i)^6 = z$$

Решить уравнение

$$z^2 - (4+3i)z + 1 + 5i = 0$$
