ТЕПЛОФИЗИКА

Лектор – Шатохин Константин Станиславович, доцент кафедры Энергоэффективных и Ресурсосберегающих Промышленных Технологий (ЭРПТ), кандидат технических наук

Рекомендуемая литература:

- Теплотехника металлургического производства. В 2-х томах. Т. 1. Теоретические основы / Кривандин В.А., Арутюнов В.А., Белоусов В.В. и др. - М.: МИСиС, 2002. - 608 с.
- Теплотехника металлургического производства. В 2-х томах. Т. 2. Конструкция и работа печей / Кривандин В.А., Белоусов В.В., Сборщиков Г.С. и др. - М.: МИСиС, 2002. - 736 с.
- Кобахидзе В.В. Тепловая работа и конструкции печей цветной металлургии - М.: МИСиС, 1994. - 356 с.
- Гусовский В.Л., Лифшиц А.Е. Методики расчета нагревательных и термических печей. - М.: ООО НПИФ «Теплотехник», 2004. - 400 с.
- Лисиенко В.Г., Щелоков Я.М., Ладыгичев М.Г. Хрестоматия энергосбережения. В 2-х книгах. Книга 1. - М.: ООО НПИФ «Теплотехник», 2005. - 688 с.
- Лисиенко В.Г., Щелоков Я.М., Ладыгичев М.Г. Хрестоматия энергосбережения. В 2-х книгах. Книга 2. - М.: ООО НПИФ «Теплотехник», 2005. - 768 с.

Тема 1. Гидрогазодинамика

Лекция 1

§ 1. Основные понятия механики жидкостей и газов

Текучие среды рассматриваются как континуум, или сплошная среда, что имеет место, когда безразмерная величина, представляющая собой отношение средней длины свободного пробега молекул к характерному размеру потока и называемая критерием Кнудсена

$$Kn = \Lambda / L << 1 .$$

Мартин Кнудсен (1871–1949) – датский физик и океанограф

Плотностью среды называется масса вещества, содержащаяся в единице объема, кг/м³:

$$\rho = \frac{dM}{dV}.$$

Если плотность среды постоянна, такая среда называется несжимаемой жидкостью.
В противном случае среда называется сжимаемой жидкостью (газом).

Вектор скорости – вектор плотности потока объема жидкости, м/с:

$$\vec{w} = \frac{\partial^2 V}{\partial S \cdot \partial t} \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора скорости в данной точке.

В декартовой прямоугольной системе координат вектор скорости можно выразить через его проекции на оси координат:

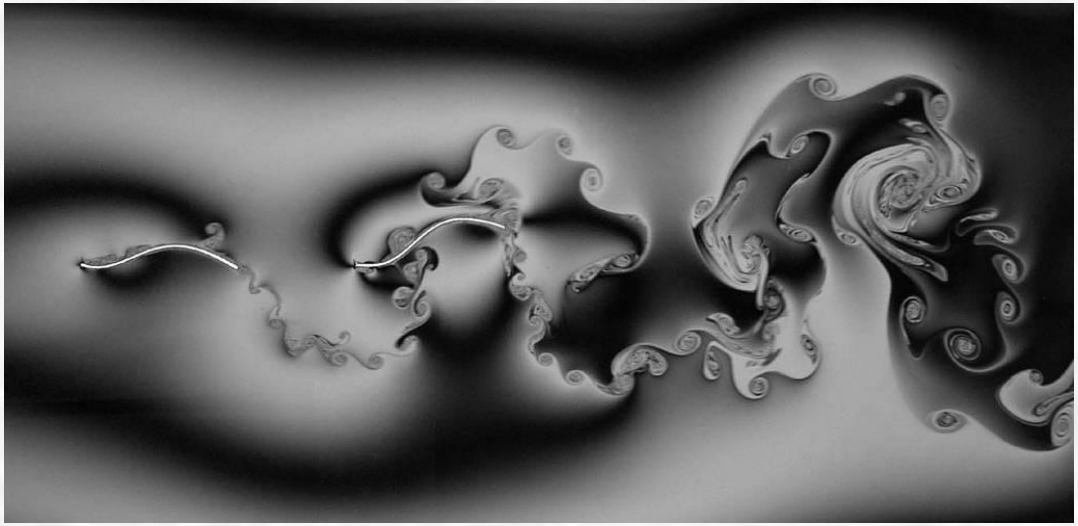
$$\vec{w} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k},$$

где u, v, w – проекции вектора скорости на оси x, y, z (скаляры);

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ортогональные единичные векторы (орты).

Произведение $\rho \cdot \vec{w}$, кг/(м$^2\cdot$с) – вектор плотности потока массы. Интегрирование этой величины по поверхности дает поток массы G, кг/с, называемый массовым расходом.

Идеальной называется жидкость, при движении которой отсутствуют силы внутреннего трения. В противном случае жидкость называется реальной (вязкой).



Поток жидкости обтекает находящиеся в ней плотные, но гибкие предметы. Фото Leif Ristroph and Jun Zhang / New York University

В несжимаемой жидкости возникновение силы внутреннего трения обусловлено неоднородным распределением скорости в потоке; величина этой силы может быть охарактеризована касательным напряжением трения, τ, Па, то есть поверхностной плотностью данной силы.

Исаак Ньютон (1643–1727) – английский физик и математик. Французская открытка конца XIX века

Исаак Ньютон установил закон, согласно которому величина τ между двумя слоями прямолинейно движущейся вязкой жидкости пропорциональна изменению скорости по нормали к направлению движения, отнесенному к единице длины:

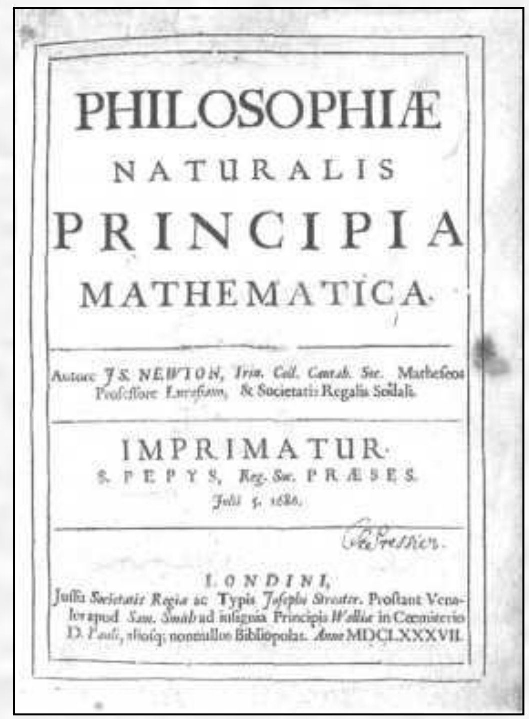
$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y},$$

где μ, Па · с – динамический коэффициент вязкости, физический параметр, зависящий от свойств и температуры жидкости (для газов – еще и от давления).

$\mu / \rho = \nu$, м^2/с –
кинематический коэффициент вязкости, также физический параметр жидкости.

Для несжимаемой жидкости формулу Ньютона для касательного напряжения можно представить в виде:

$$\tau = \nu \cdot \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial y}.$$



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

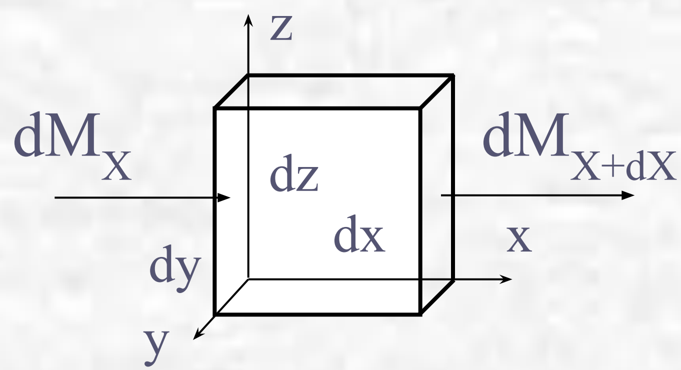
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Титульный лист книги И. Ньютона «Математические начала натуральной философии». Лондон. 1687 г.

§ 2. Уравнение неразрывности

Выделим в потоке сжимаемой жидкости в неподвижной прямоугольной системе координат прямоугольный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz:



В соответствии с определением понятия плотности потока массы найдем массу жидкости, поступившей в параллелепипед в направлении оси x через его левую грань за время dt

$$dM_X = \rho \cdot u \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Масса жидкости, вышедшая из параллелепипеда через его правую грань

$$dM_{X+dX} = \left(\rho \cdot u + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz \cdot dt .$$

Разность между массой, поступившей в контрольный объем, и покинувшей его для направления x составит

$$dM_x - dM_{x+dx} \equiv d^2M_x = -\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} \cdot dV \cdot dt ,$$

где $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ – объем параллелепипеда.

Аналогично и для двух других направлений y и z:

$$d^2M_y = -\frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} \cdot dV \cdot dt ; \quad d^2M_z = -\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} \cdot dV \cdot dt .$$

Разность между массой жидкости, поступившей в параллелепипед, и покинувшей его за время dt, кг:

$$d^2M = -\left[\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z}\right] \cdot dV \cdot dt\,.$$

С другой стороны, происходит изменение массы жидкости, содержащейся в этом объеме, обусловленное изменением плотности во времени:

$$d^2M = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt \cdot dV\,.$$

Приравнивая на основании закона сохранения массы эти выражения и сокращая на $dV \cdot dt$, получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z}\right].$$

Другая форма записи предыдущего выражения –

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{w}) = 0 .$$

Еще одну форму этого уравнения получим, если учтем что дивергенция произведения скалярной функции на векторную выражается следующим образом:

$$\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{w}) = \vec{w} \cdot \operatorname{grad}\rho + \rho \cdot \operatorname{div}\vec{w} = u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \cdot \operatorname{div}\vec{w} .$$

Подставим это выражение в уравнение неразрывности и обозначим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} .$$

Окончательно получим

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div}\vec{w} = 0.$$

Для случая несжимаемой жидкости, когда плотность постоянна, уравнение неразрывности принимает вид:

$$\operatorname{div}\vec{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

В практических инженерных расчетах используют уравнение неразрывности в интегральной форме для поперечного сечения трубы или канала. Рассмотрим стационарное сечение сжимаемой жидкости по трубе переменного сечения s = s(x).

Среднее по сечению трубы значение плотности потока массы

$$\overline{\rho}\,\overline{u} = \frac{1}{s} \cdot \int\limits_{s} \rho u ds.$$

Интеграл в правой части – поток массы. Поскольку рассматривается стационарный режим и стенки трубы непроницаемы, эта величина по длине трубы не изменяется. Тогда

$$\overline{\rho}\,\overline{u} \cdot s = G = const.$$

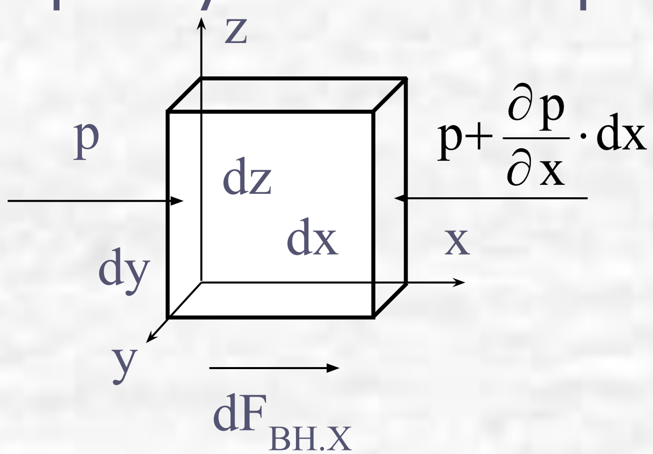
В случае течения несжимаемой жидкости

$$\overline{u} \cdot s = V = const.$$

§ 3. Уравнения Эйлера и Навье-Стокса

Леонард Эйлер (1707–1783) – математик, физик и астроном, по происхождению швейцарец. В 1727 году переехал в Россию, где имелись самые благоприятные условия для расцвета его гения: материальная обеспеченность, возможность заниматься любимым делом, наличие ежегодного журнала для публикации трудов.

Рассмотрим силы, действующие на выделенный в потоке жидкости контрольный объем в виде элементарного прямоугольного параллелепипеда:



В направлении оси x на объем действуют силы:

1) внешняя массовая сила

$$dF_{ВН.X} = X \cdot \rho \cdot dV,$$

где X – проекция на ось x внешней массовой силы, отнесенной к единице массы, то есть массовая плотность этой силы, м/с^2;

2) сила давления

$$dF_{ДАВЛ.X} = p \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dV \cdot$$

На основании 2-го закона Ньютона, равнодействующая этих сил равна произведению массы параллелепипеда на его ускорение:

$$\rho \cdot dV \cdot \frac{du}{dt} = X \cdot \rho \cdot dV - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dV,$$

где $\frac{du}{dt}$ – полная производная, состоящая из локальной и конвективной:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Разделив обе части уравнения на массу контрольного объема, получим:

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

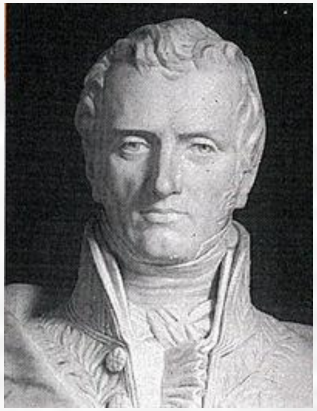
Аналогичные уравнения можно получить и для других осей координат:

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Умножив каждое из этих уравнений на соответствующий единичный вектор и затем почленно сложив их, получим уравнение Эйлера в векторной форме:

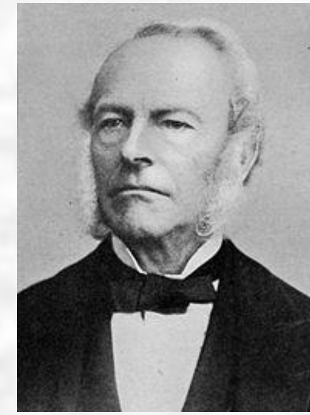
$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{K} - \frac{1}{\rho} \cdot \mathrm{grad}\,p.$$



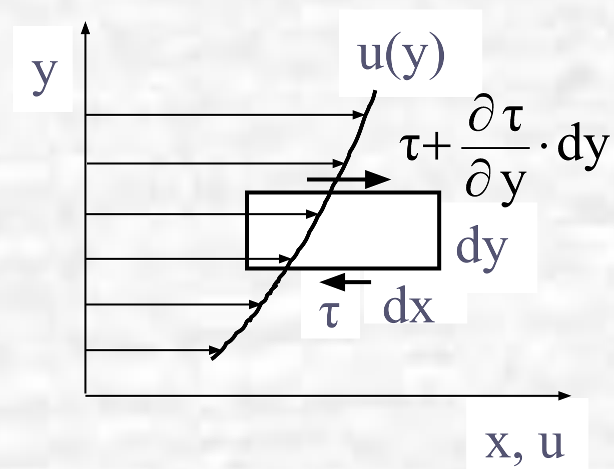
Уравнения Навье-Стокса выведены Анри Навье в 1822 году.

Клод Луи Мари Анри Навье (1785–1836) – французский инженер и учёный, один из основателей современной теории упругости.

Джордж Габриель Стокс (1819-1903) – английский физик-теоретик и математик.



Рассмотрим случай, для которого справедлива формула Ньютона, то есть жидкость движется только вдоль оси x, а скорость ее движения изменяется только вдоль оси y. В таком потоке выделим элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz:



Результирующая величина силы внутреннего трения, приложенная к выделенному элементарному объему с учетом направления сил, действующих на нижнюю и верхнюю грани параллелепипеда,

$$dF_{TP.X} = \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz - \tau \cdot dx \cdot dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dV \; .$$

Массовая плотность силы внутреннего трения

$$f_{TP.X} = \frac{dF_{TP.X}}{dM} = \frac{dF_{TP.X}}{\rho \cdot dV} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} \; .$$

Подставляя сюда вместо τ его выражение по формуле Ньютона $\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$, вынося μ за знак производной и учитывая, что μ / ρ = ν, получим:

$$f_{TP.x} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ .$$

В общем случае, когда вектор скорости имеет все три компонента u, v и w не равные нулю, и когда каждый из них зависит от всех трех координат,

$$f_{TP.x} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \nu \cdot \nabla^2 u\ .$$

Проекция вектора массовой плотности силы внутреннего трения на другие оси:

$$f_{TP.y} = \nu \cdot \nabla^2 v \;,$$

$$f_{TP.z} = \nu \cdot \nabla^2 w \;.$$

Умножив каждую из этих проекций на соответствующий орт и сложив, получим:

$$\vec{f}_{TP} = \nu \cdot \nabla^2 \vec{w} \;.$$

Следовательно, уравнение движения реальной несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{K} - \frac{1}{\rho} \cdot \mathrm{grad}p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{w}.$$

В случае движения сжимаемой жидкости в уравнении должна быть учтена еще и сила внутреннего трения, обусловленная сдвигом слоев вследствие объемной деформации (сжатия или расширения) жидкости. В правой части уравнения появится вектор массовой плотности этой силы, равный

$$\frac{1}{3} \cdot \nu \cdot \mathrm{graddiv}\vec{w}.$$

§ 4. Режимы течения реальной жидкости. Постановка задачи для расчета движения жидкости

При ламинарном режиме частицы движутся по плавным траекториям, все характеристики потока (скорость, давление, температура) – гладкие функции координат и времени, а все процессы переноса поперек потока (импульса, теплоты) осуществляются лишь за счет молекулярного механизма.

При турбулентном режиме частицы движутся по многократно пересекающимся траекториям; все характеристики потока – пульсирующие, хаотически изменяющиеся; процессы поперечного переноса осуществляются не только за счет микроскопического, но и за счет макроскопического перемешивания.

Пульсационно изменяющиеся во времени мгновенные характеристики потока при турбулентном режиме движения называют актуальными значениями этих характеристик. Для скорости, например, ее актуальное значение в любой момент времени – сумма осредненного по времени значения этой величины и пульсации:

$$u = \square u + u' .$$

Квазистационарными называют турбулентные потоки, стационарные по отношению к осредненным величинам. При этом актуальная скорость пульсирует относительно своего осредненного значения, а пульсационная скорость – относительно нуля. Интервал осреднения должен быть достаточно большим: повторное применение операции осреднения на увеличенном интервале не должно изменять значения средней величины.

Осредненная величина не дает полной информации о структуре турбулентного течения, так как при одном и том же значении осредненной величины амплитуды и частоты пульсаций могут быть различными. Для дополнительной информации используют понятие уровня (интенсивности) пульсаций:

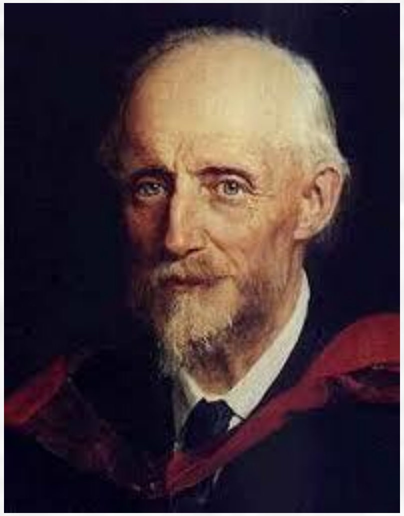
$$I_u = \frac{\sqrt{\overline{(u)'^2}}}{\overline{u}},$$

то есть уровень пульсаций продольного компонента скорости определяется как отношение среднеквадратичного значения пульсации к осредненному значению данной величины.

Для количественной оценки возможности перехода к турбулентному режиму пользуются значением критерия Рейнольдса:

$$Re = o(f_{ин.}) / o(f_{тр.}),$$

представляющего собой отношение порядков (то есть приближенных значений) массовых плотностей сил инерции и внутреннего трения.



Осборн Рейнольдс. С портрета Дж. Кольера, 1904.

Осборн Рейнольдс (1842–1912) – английский физик, работы которого посвящены механике, гидродинамике, теплоте, электричеству, магнетизму. В 1883 году Рейнольдс установил, что ламинарное течение переходит в турбулентное, когда введенная им безразмерная величина (число Рейнольдса) превышает критическое значение.

Найдем выражение для числа Рейнольдса. Считаем, что порядок скорости равен ее характерному значению u_0 (при течении жидкости в трубе или канале это средняя по сечению скорость, при обтекании тела – скорость потока вдали от тела), порядок координаты равен характерному размеру потока *l*, а порядок кинематического коэффициента вязкости ν просто равен этой величине.

Учтем, что порядок n-ой производной равен отношению порядка функции к порядку аргумента в степени n.

Тогда порядок $\frac{d\vec{w}}{dt} \equiv u\cdot\frac{du}{dx}$ будет $\frac{u_0^2}{l}$,

а порядок $\nu\cdot\nabla^2\vec{w} \equiv \nu\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ будет $\nu\cdot\frac{u_0}{l^2}$.

$$\left(\frac{u_0^2}{l}\right) : \left(\nu\cdot\frac{u_0}{l^2}\right) = \frac{u_0\cdot l}{\nu} = \mathrm{Re}\,.$$

Задача расчета движения жидкости заключается в нахождении вектора скорости $\vec{w}(u, v, w)$ и давления p как функций координат и времени путем решения 3 уравнений движения и 1 уравнения неразрывности. При рассмотрении движения сжимаемой жидкости появляется еще одна искомая функция – плотность ρ, поэтому дополнительно используется еще и уравнение состояния газа. Когда ρ зависит лишь от давления, уравнение имеет вид ρ = f(p). Если ρ зависит и от температуры, к системе должно быть добавлено уравнение энергии, описывающее распределение температуры в потоке.

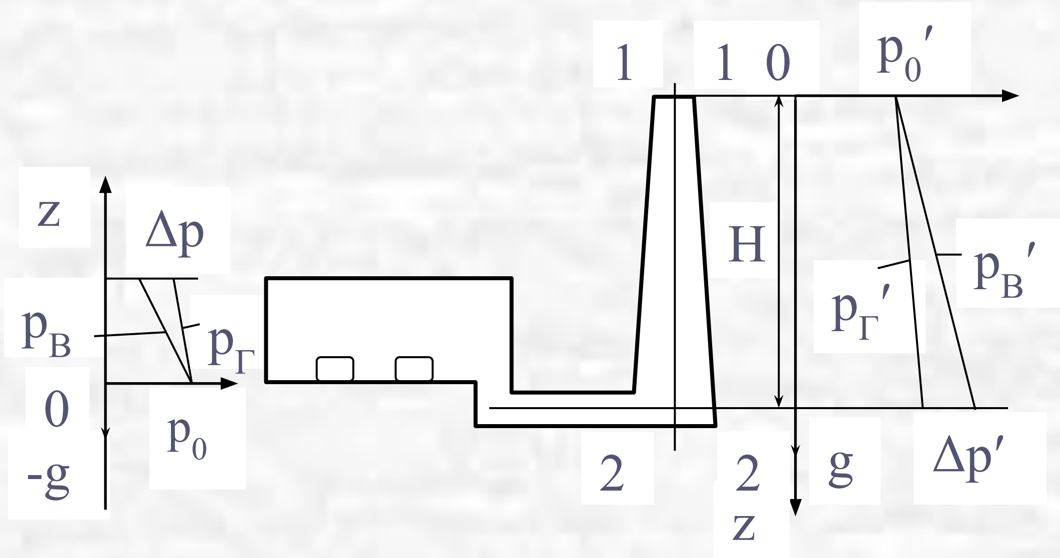
Задаются начальные и граничные условия. В качестве начальных условий используют искомые функции в начальный момент времени. Граничными условиями могут быть значения искомых функций на границах исследуемой области.

§ 5. Статика жидкостей и газов

В неподвижной жидкости отсутствуют силы инерции и трения, то есть если жидкость неподвижна или, что то же самое, движется как одно целое прямолинейно и равномерно, то в ней внешние массовые силы уравновешиваются силами давления:

$$\vec{K} = \frac{1}{\rho} \cdot \mathrm{grad}\, p.$$

На практике наиболее часто внешней массовой силой является сила тяжести, действующая по нормали к поверхности земли. В этом же направлении изменяется и давление: сформулированная в § 6 задача сводится к отысканию давления как функции 1 координаты.



Для определения изменения давления по высоте печи имеем уравнение:

$$-g = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dz} \Rightarrow dp = -\rho \cdot g \cdot dz.$$

Интегрируем при ρ = const (из-за небольшой высоты печи изменением плотности можно пренебречь):

$$p = c - \rho \cdot g \cdot z.$$

Полагая z=0, найдем $c=p_0$ – давление на уровне загрузочных окон, поддерживаемое равным давлению в окружающей среде на этом уровне.

Таким образом, давление внутри печи

$$p_г = p_0 – \rho_г \cdot g \cdot z,$$

а в окружающей среде

$$p_В = p_0 – \rho_В \cdot g \cdot z.$$

Поскольку температура в печи выше температуры окружающего воздуха, то $\rho_г < \rho_В$, и давление внутри печи убывает по высоте медленнее, чем в окружающей среде. Если в верхней части печи имеются отверстия или неплотности в кладке, то через них будет происходить выбивание газов из печи.

Разберем принцип действия дымовой трубы.

В сечении 1-1 в устье трубы давление такое же, как в окружающей среде, поэтому начало отсчета выберем здесь. Ось z направим вертикально вниз. Давление в печи на уровне пода, откуда производится отбор продуктов сгорания, практически равно атмосферному давлению на уровне основания трубы, то есть в сечении 2-2.

$\rho_Г << \rho_В$, поскольку дымовые газы имеют высокую температуру. Изменением плотностей, связанным с изменением давления, будем пренебрегать, так как даже при высоте трубы 100 м это изменение составляет ~1 %.

Задача принципиально не отличается от предыдущей, лишь в связи с противоположным направлением оси z знак перед вторым слагаемым будет положительным. Вводя обозначение $\rho \cdot g = \gamma$, Н/м^3 – удельный вес, получим:

$$p_В' = p_0' + \gamma_В \cdot z, \quad p_Г' = p_0' + \gamma_Г \cdot z.$$

В основании трубы создается разрежение

$$\Delta p' = p_В'(H) - p_Г'(H) = (\gamma_В - \gamma_Г) \cdot H.$$

Поскольку давление в печи равно $p_В'(H)$, под действием этого разрежения продукты сгорания будут отводиться из печи в дымовой канал и в трубу.