

Решение задач



«На
проценты»,
смеси и
сплавы.

Муниципальное образовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 41

Решение задач «на проценты», смеси и сплавы.

Методическое пособие

Задачи «на проценты»

1. Найти число a , составляющее n процентов от числа b .

Решение. $a = \frac{n}{100} \cdot b$.

2. Обратная задача: найти число b , если n процентов от него равно a .

Решение. $b = a : \frac{n}{100}$

3. Найти, сколько процентов составляет число a от числа b .

Решение. $n = \frac{a}{b} \cdot 100$.

Задачи «на проценты»

1. Число a увеличилось на n процентов. Найдите получившееся число.

Решение. $b = a + \frac{n}{100} \cdot a.$

2. Число a уменьшилось на n процентов. Найдите получившееся число.

Решение. $b = a - \frac{n}{100} \cdot a.$

Задача 1 В октябре цена на яблоки была снижена на 10% по отношению к цене в сентябре.

В ноябре цена повысилась на 10%. Сколько процентов составляет ноябрьская цена по отношению к сентябрьской?

Решение.

Пусть x руб. – цена на яблоки в сентябре.

В октябре цена была снижена на 10% и стала равна

$$x - 0,1x = 0,9x \text{ (руб.)}.$$

В ноябре цена повысилась на 10% и стала равна

$$0,9x + 0,1 \cdot 0,9x = 0,99x \text{ (руб.)}.$$

Найдем, сколько процентов составляет ноябрьская цена по отношению к сентябрьской:

$$\frac{0,99x}{x} \cdot 100\% = 0,99 \cdot 100\% = 99\%$$

Ответ: 99%.

Задача 2 С двух участков ежегодно собирали 500 т пшеницы. После проведения агротехнических мероприятий урожай на первом участке увеличился на 30%, а на втором – на 20%. Поэтому с двух участков собрали 630 т пшеницы. Сколько пшеницы собирали с первого участка первоначально?

Решение.

Пусть с первого участка собирали x т пшеницы, тогда со второго – $(500 - x)$ т.

После проведения агротехнических мероприятий с первого участка стали собирать $1,3x$ т пшеницы, а со второго – $1,2(500 - x)$ т.

С двух участков стали собирать $(1,3x + 1,2(500 - x))$ т, что по условию задачи составляет 630 т.

Получаем уравнение: $(1,3x + 1,2(500 - x)) = 630,$
 $x = 300.$

Ответ: 300 т.

Задача 4 Сумма трех вкладов равна 56 тыс. руб. Найти величину второго вклада, если он на 20% меньше первого и на 60% меньше суммы первого и третьего вкладов.

Решение.

Пусть x тыс. руб. – величина первого вклада.

Поскольку второй вклад на 20% меньше первого, то он равен $x - 0,2x = 0,8x$ (тыс. руб.).

Так как сумма трех вкладов равна 56 тыс. руб., то сумма первого и третьего вкладов равна $56 - 0,8x$ (тыс. руб.).

Поскольку второй вклад на 60% меньше суммы первого и третьего вкладов, то он равен

$$56 - 0,8x - 0,6(56 - 0,8x) = 22,4 - 0,32x \text{ (тыс. руб.)}.$$

Получаем уравнение: $22,4 - 0,32x = 0,8x$
 $x = 20.$

Величина первого вклада – 20 тыс. руб. Тогда величина второго вклада $0,8 \cdot 20 = 16$ (тыс. руб.).

Ответ: 16 000 руб.

Задача 5 Банк ежегодно увеличивает на одно и то же число процентов сумму, имеющуюся на вкладе к моменту начисления процентов. На сколько процентов ежегодно увеличивается сумма, если за два года она возросла с 2000 до 2420 рублей?

Решение.

Пусть ежегодно имеющаяся на счете сумма увеличивается на $x\%$.

Тогда через год на счете окажется

$$(2000 + \frac{x}{100} \cdot 2000) = 2000 + 20x \text{ (рублей)}.$$

Задача 5 Банк ежегодно увеличивает на одно и то же число процентов сумму, имеющуюся на вкладе к моменту начисления процентов. На сколько процентов ежегодно увеличивается сумма, если за два года она возросла с 2000 до 2420 рублей?

Еще через один год на счете будет

$$2000 + 20x + \frac{x}{100} (2000 + 20x) = 0,2x^2 + 40x + 2000 \text{ (рублей)}.$$

По условию задачи это составляет 2420 рублей.

Получаем уравнение: $0,2x^2 + 40x + 2000 = 2420$.

$$0,2x^2 + 40x - 420 = 0,$$

$$x = -210 \text{ или } x = 10.$$

Так как по условию задачи $x > 0$, то $x = 10$.

Ответ: на 10%.

Задача 6 До снижения цен телевизор стоил 9600 рублей. Когда же цена на телевизоры снизилась, количество покупателей возросло на 20%, а выручка магазина – на 10%. На сколько рублей была снижена цена на телевизоры?

Решение.

Пусть цена на телевизоры снизилась на x рублей.

Тогда телевизор после снижения цены стал стоить
 $(9600 - x)$ рублей.

Пусть количество покупателей до снижения цены было u чел.

Тогда количество покупателей после снижения цены стало $u + 0,2u = 1,2u$ (чел.).

Выручка магазина до снижения цены была $9600u$ рублей, а после снижения цены стала

$1,2u (9600 - x)$ (рублей).

Задача 6 До снижения цен телевизор стоил 9600 рублей. Когда же цена на телевизоры снизилась, количество покупателей возросло на 20%, а выручка магазина – на 10%. На сколько рублей была снижена цена на телевизоры?

Так как выручка магазина после снижения цены возросла на 10%, то она стала

$$9600y + 0,1 \cdot 9600y = 1,1 \cdot 9600y = 10560y \text{ (рублей).}$$

Получаем уравнение: $1,2y(9600 - x) = 10560y,$

$$1,2(9600 - x) = 10560,$$

$$1,2x = 960,$$

$$x = 800.$$

Ответ: на 800 рублей.

Задача 7 (ЕГЭ 2006 В9) Объемы ежегодной добычи угля первой, второй и третьей шахтами относятся как 1:2:4. Первая шахта планирует уменьшить годовую добычу угля на 8%, а вторая – на 2%. На сколько процентов должна увеличить годовую добычу угля третья шахта, чтобы суммарный объем добываемого за год угля не изменился?

Решение.

Пусть x – объем ежегодной добычи угля первой шахтой. Тогда объем ежегодной добычи угля второй шахтой будет $2x$, а третьей – $4x$.

Суммарный объем ежегодной добычи угля – $7x$.

После уменьшения годовой добычи угля первой шахтой на 8%, объем добываемого ею угля будет равен $0,92x$.

После уменьшения годовой добычи угля второй шахтой на 2%, объем добываемого ею угля будет равен $0,98 \cdot 2x$.

Задача 7 (ЕГЭ 2006 В9) Объемы ежегодной добычи угля первой, второй и третьей шахтами относятся как 1:2:4. Первая шахта планирует уменьшить годовую добычу угля на 8%, а вторая – на 2%. На сколько процентов должна увеличить годовую добычу угля третья шахта, чтобы суммарный объем добываемого за год угля не изменился?

Объем добываемого первой и второй шахтами угля будет равен $0,92x + 0,98 \cdot 2x = 2,88x$.

Тогда объем добываемого третьей шахтой угля должен стать $7x - 2,88x = 4,12x$.

Осталось найти, на сколько процентов $4,12x$ больше, чем $4x$:

$$\frac{4,12 - 4}{4} \cdot 100\% = 0,03 \cdot 100\% = 3\%$$

Ответ: на 3%.

Задача 8 (ЕГЭ 2007 В9) При покупке школьнику спортивной формы (спортивного костюма и кроссовок) родителям пришлось заплатить на 32% больше, чем 2 года назад, причем спортивный костюм подорожал на 20%, а кроссовки – на 40%. Сколько процентов от цены спортивной формы составляла цена кроссовок два года назад?

Решение.

Пусть цена спортивного костюма 2 года назад была x руб., а цена кроссовок – y руб.

Тогда цена спортивной формы была $(x + y)$ руб.

Так как спортивная форма подорожала на 32%, то она стала стоить $x + y + 0,32(x + y) = 1,32(x + y)$ (руб.).

Поскольку спортивный костюм подорожал на 20%, то он стал стоить $x + 0,2x = 1,2x$ (руб.).

Поскольку кроссовки подорожали на 40%, то они стали стоить $y + 0,4y = 1,4y$ (руб.).

Задача 8 (ЕГЭ 2007 В9) При покупке школьнику спортивной формы (спортивного костюма и кроссовок) родителям пришлось заплатить на 32% больше, чем 2 года назад, причем спортивный костюм подорожал на 20%, а кроссовки – на 40%. Сколько процентов от цены спортивной формы составляла цена кроссовок два года назад?

Тогда цена спортивной формы стала $(1,2x + 1,4y)$ руб.

Получаем уравнение: $1,32(x + y) = 1,2x + 1,4y$
 $y = 1,5x.$

Тогда цена кроссовок была $1,5x$ руб., а цена спортивной формы $x + 1,5x = 2,5x$ (руб.).

Найдем, сколько процентов составляла цена кроссовок от цены спортивной формы два года назад:

$$\frac{1,5}{2,5} 100\% = 0,6 \cdot 100\% = 60\%.$$

Ответ: 60%.

Задачи на смеси и сплавы

Задача 1. Сплавляли 300г. сплава олова и меди, содержащего 60% олова, и 900г сплава олова и меди, содержащего 80% олова. Сколько процентов олова в полученном сплаве?

Решение:

Sn	Cu		Sn	Cu		Sn	
60%		+	80%		=	x%	
300г			900г			1200г	

Найдем массу олова в первом сплаве: $300 \cdot 0,6 = 180$ г.

Масса олова во втором сплаве: $900 \cdot 0,8 = 720$ г.

Масса олова в получившемся сплаве: $(1200 \cdot x) : 100$.

Составим уравнение и решим его. $180 + 720 = 12x$,

$$x = 75.$$

Задача 1. Сплавляли 300г. сплава олова и меди, содержащего 60% олова, и 900г сплава олова и меди, содержащего 80% олова. Сколько процентов олова в полученном сплаве?

Sn	Cu		Sn	Cu		Sn	
60%		+	80%		=	x%	
300г			900г			1200г	

Решим данную задачу относительно массы меди.

Масса меди в первом сплаве: $300 \cdot 0,4 = 120\text{г.}$

Масса меди во втором сплаве: $900 \cdot 0,2 = 180\text{г.}$

Масса меди в получившемся сплаве: $(1200 \cdot x):100.$

Составим уравнение и решим его.

$$120 + 180 = 12x,$$

$$x = 25$$

25% - масса меди, значит масса олова будет равна

$$100\% - 25\% = 75\%$$

Ответ: 75%.

Задача 2. В смеси спирта и воды спирта в 4 раза меньше, чем воды. Когда к этой смеси добавили 20л воды, получили смесь с содержанием спирта 12%. Сколько воды было в смеси первоначально?

Решение:

Спирт	вода		вода		спирт	вода
		+		=	12%	88%
x	$4x$					20л
$20+5x$						

Решим задачу относительно объема воды.

$$4x+20=(20+5x)\cdot 0,88$$

$$4x+20=17,6+4,4x$$

$$0,4x=2,4$$

$$x=6.$$

Первоначально в смеси было 6л спирта и 24л воды.

Ответ: 6л спирта и 24л воды.

Задача 3. Имеются два куска сплава цинка и меди с процентным содержанием меди 30% и 18%. В каком отношении надо взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 25 % меди?

Решение: Содержание задачи представим в виде схемы.

Zn	Cu		Zn	Cu		Zn	Cu
	30%	+		18%	=		25%
x г			y г			(x+y) г	

Zn	Cu		Zn	Cu		Zn	Cu
	30%	+		18%	=		25%
x г			y г			(x+y) г	

Пусть масса первого куска x кг., а второго y кг.,
тогда масса сплава $(x+y)$ кг.

Масса меди в первом куске $0,3x$ кг., во втором $0,18y$ кг.,
тогда масса меди в сплаве $0,25(x+y)$ кг.

Составим уравнение и решим его.

$$0,3x + 0,18y = 0,25(x+y)$$

$$30x + 18y = 25x + 25y$$

$$5x = 7y$$

$$x:y = 7:5$$

Ответ: $x : y = 7 : 5$, где x – масса 30 %-го сплава,
 y – масса 18 %-го сплава.

Задача 4. В двух одинаковых сосудах находится растворы серной кислоты концентрации 28,7% и 37,3%. Раствора сливают. Какова концентрация полученного раствора кислоты?

Решение:

28,7%		+	37,3%		=	y%	
x			x			2x	

$$(x \cdot 28,7) : 100 + (x \cdot 37,3) : 100 = (y \cdot 2x) : 100,$$

$$28,7x + 37,3x = 2xy,$$

$$66x = 2xy,$$

$$y = 33.$$

Ответ: 33%

Задача 5. Для приготовления маринада необходим 2%-ный раствор уксуса. Сколько нужно добавить воды в 100г 9%-ного раствора уксуса, чтобы получить раствор для маринада?

Решение:

уксус	вода				вода		уксус
вода							
9%	91%	+		=	2%	98%	
100 г			х			(100+х) г	

Решаем относительно массы воды.

$$100 \cdot 0,91 + x = (100 + x) \cdot 0,98,$$

$$91 + x = 98 + 0,98x,$$

$$0,02x = 7,$$

$$x = 350.$$

Ответ: 350г.

Задача 6. Имеются два слитка сплава олова с медью. Первый слиток содержит 230г. олова и 20 г меди, а второй слиток – 240г олова и 60г меди. От каждого слитка отрубили по куску, сплавляли и получили 300г сплава. Сколько граммов отрубили от первого слитка, если в полученном сплаве было 84% олова?

Решение: олово медь олово медь
олово

		x			y	84%	
230г	20г		240г	60г		x+y=300	
250г			300г				

$$\begin{cases} x + y = 300, \\ \frac{230}{250}x + \frac{240}{300}y = 300 \cdot 0,84, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 300, \\ \frac{23}{25}x + \frac{4}{5}y = 252, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23x + 20y = 6300, \\ 20x + 20y = 6000. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x &= 300, \\ x &= 100. \end{aligned}$$

Ответ: 100 г.

Задача 8. В раствор объемом 8 литров, содержащий 60% кислоты, начали вливать раствор, содержащий 20% кислоты. Сколько можно влить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала кислоты не больше 40%, но не меньше 30%?

Решение:

60%		+	20%		=	$30 \leq y\% \leq 40\%$	
	8л.			хл.			(х+8)

л.

Найдем объем кислоты в каждом растворе

В 1 растворе

$0,6 \cdot 8$ л.

Во втором растворе

$0,2x$ л.

В смеси кислоты

$(4,8 + 0,2x)$ л.

По условию задачи смесь должна содержать кислоты не более 40%, т.е. не более $0,4(x+8)$ л., но не менее 30%, т.е. $0,3(x+8)$ л.

Получаем следующее неравенство:

$$0,3(x+8) \leq 4,8 + 0,2x \leq 0,4(x+8)$$

Решая его получаем

$$8 \leq x \leq 24.$$

Ответ можно влить не менее 8 л., но не более 24 л. раствора.