Тема 4. Теплопроводность

Лекции 14, 15

§ 1. Основные положения теории теплопроводности

Когда не учитывают зависимость коэффициента теплопроводности λ от температуры, (или, что то же самое, используют среднее для данного температурного интервала значение λ), то говорят о линейной теории теплопроводности.

Основной задачей теории теплопроводности является определение распределения температуры в объеме тела, поскольку согласно постулату Фурье, величина и направление теплового потока однозначно определяется температурным полем. Распределение температуры можно найти путем решения уравнения теплопроводности.

В § 3 было получено дифференциальное уравнение энергии для несжимаемой жидкости:

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot \nabla^2 T \, .$$

Поскольку для твердого тела конвективная производная температуры по времени равна нулю, субстанциальная производная сводится к локальной:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \nabla^2 T \, , -$$

дифференциальное уравнение теплопроводности в декартовых координатах при отсутствии в объеме тела внутренних источников теплоты и при постоянном λ.

Наиболее общая форма уравнения теплопроводности для изотропного тела:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T)}{\rho \cdot c} + \frac{q_v}{\rho \cdot c}\ , –$$

дифференциальное уравнение теплопроводности в декартовых координатах при наличии внутренних источников теплоты и зависящем от температуры λ,

Здесь $\rho \cdot c$ – объемная теплоемкость материала, Дж/(м$^3 \cdot$К); q_V – мощность внутренних источников теплоты, Вт/м^3.

Линейное дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{dr} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{d\varphi^2} \right).$$

Монетка для гадания от Тамары Хенсик (Tamara Hensick) со сторонами «risk it / play it safe» (рискнуть / придерживаться безопасного пути)

Чтобы из множества решений выбрать одно, соответствующее единичному явлению данного класса, необходимо задать условия однозначности:

- геометрические условия, определяющие форму и размеры тела;
- физические параметры материала λ, ρ, c;
- начальные условия, т.е. распределение температуры в объеме тела в начальный момент времени;
- граничные условия, характеризующие тепловое взаимодействие окружающей среды с поверхностью тела.

Последние два типа условий объединяются термином «краевые условия».

Граничные условия (г.у.) можно задать разными способами:

А. Г.у. I рода $T_W = T_W$ (x, y, z, t), т.е. задается распределение температуры по всей поверхности тела и изменение его во времени.

Б. Г.у. II рода $q_W = q_W$ (x, y, z, t) = $-\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)$ – известна плотность теплового потока на поверхности и ее изменение во времени.

В. При г.у. III рода задается температура окружающей среды или внешнего источника (стока) теплоты T_0 (x, y, z, t) и закон теплообмена между средой и поверхностью тела. То есть задается связь между известной температурой окружающей среды и неизвестной температурой поверхности тела (градиентом температуры на поверхности).

§ 2. Стационарная теплопроводность в неограниченной пластине (тепловые потери через стены печей)

Стационарное линейное дифференциальное уравнение теплопроводности в декартовых координатах при отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид:

$$\nabla^2 T = 0 .$$

Для задач стационарной теплопроводности начальные условия не имеют смысла, задают лишь граничные условия.

Рассмотрим бесконечную пластину, имеющую конечную толщину δ вдоль оси x. Уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 .$$

Интегрируя один раз, получим:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 .$$

Вторично интегрируя, получим:

$$T(x) = C_1 \cdot x + C_2 .$$

А. Г.у. I рода.

Расположив начало координат на одной из поверхностей, имеем:

$$T(0) = T_1, \; T(\delta) = T_2 .$$

Следовательно,

$$C_2 = T_1, \qquad C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\delta}$$

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} \cdot x \cdot$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot \left(T_1 - T_2\right) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\delta}{\lambda}},$$

где $\frac{\delta}{\lambda} = R_{ВН}$ – внутреннее тепловое сопротивление.

Б. Г.у. II рода.

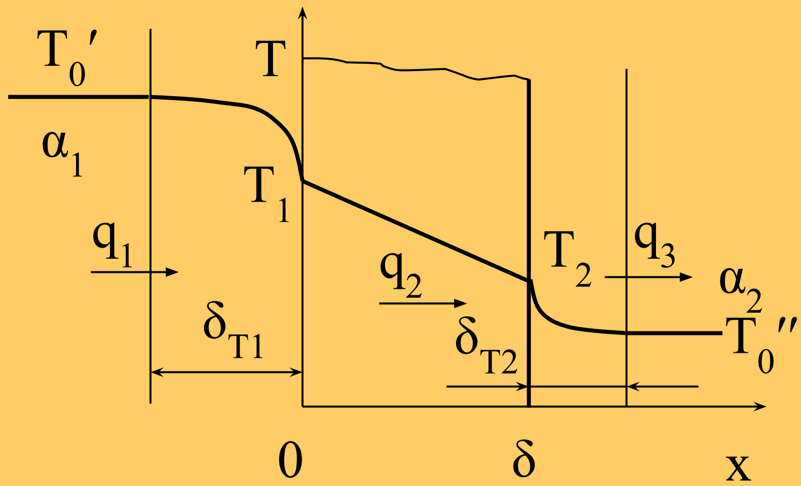
$q_W(0) = q_W(\delta) = q = const.$

$$C_1 = \frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda}.$$

Константа C_2 может принимать любые значения. Для нахождения C_2 необходимо задать $T_W(0)$ ($T_W(\delta)$) либо T_0 и α с любой стороны.

В. Г.у. III рода.

Рассмотрим случай конвективной теплоотдачи:



Дано: T_0', T_0'', α_1, α_2.

Ввиду стационарности процесса $q_1 = q_2 = q_3 = q$.

$$\begin{cases} q_1 = \alpha_1 \cdot \left(T_0' - T_1\right), \\ q_2 = \dfrac{\lambda}{\delta} \cdot \left(T_1 - T_2\right), \\ q_3 = \alpha_2 \cdot \left(T_2 - T_0''\right). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_0' - T_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} \cdot q, \\ T_1 - T_2 = \dfrac{\delta}{\lambda} \cdot q, \\ T_2 - T_0'' = \dfrac{1}{\alpha_2} \cdot q. \end{cases}$$

Суммируя, получим:

$$T_0' - T_0'' = q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot \left(T_0' - T_0'' \right) = k \cdot \left(T_0' - T_0'' \right),$$

где k – коэффициент теплопередачи.

Величина $\frac{1}{\alpha} = R_H$ – наружное тепловое сопротивление.

Для многослойной стенки

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

Многослойные теплоизоляционные системы в строительстве:
А – утеплитель – внутри ограждающей конструкции (ISOVER);
Б – система «мокрого» типа («Опытный завод сухих смесей»);
В – вентилируемый фасад (PAROC).

§ 3. Стационарная теплопроводность в цилиндрической стенке (изоляция трубопроводов)

Для цилиндрической стенки, неограниченно простирающейся вдоль оси x, в осесимметричном случае, (т.е. при неизменных по граничным поверхностям стенки условиям) уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0.$$

Используя подстановку $\frac{dT}{dr} = u$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{dr}{r} = 0 \cdot$$

Интегрируя, имеем:

$$\ln u + \ln r = \ln C_1 .$$

После потенцирования получаем:

$$u \cdot r = C_1 .$$

Переходя к переменной T и выполняя разделение переменных, имеем уравнение:

$$\frac{dT}{dr} \cdot r = C_1 \Rightarrow dT = C_1 \cdot \frac{dr}{r},$$

интегрируя которое, находим искомое решение:

$$T(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2 .$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} = -\lambda \cdot \frac{C_1}{r} .$$

А. Г.у. I рода.

$$T(r_1) = T_1, \quad T(r_2) = T_2.$$

$$T_1 = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2 , \quad T_2 = C_1 \cdot \ln r_2 + C_2 .$$

$$T_1 - T_2 = C_1 \cdot (\ln r_1 - \ln r_2) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} .$$

$$C_2 = T_1 - \frac{(T_1 - T_2) \cdot \ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

$$T(r) = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \ln \frac{r}{r_1} .$$

Плотность теплового потока, проходящего через любую цилиндрическую поверхность внутри стенки с текущим радиусом r:

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda \cdot (T_1 - T_2)}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

откуда тепловой поток, проходящий через трубу длиной L, получается постоянным по толщине и равным, Вт:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot q = 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Тепловой поток, проходящий через цилиндрическую стенку единичной длины, называется линейной плотностью теплового потока, Вт/м:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \pi \cdot \frac{T_1 - T_2}{R_{L\,BH}},$$

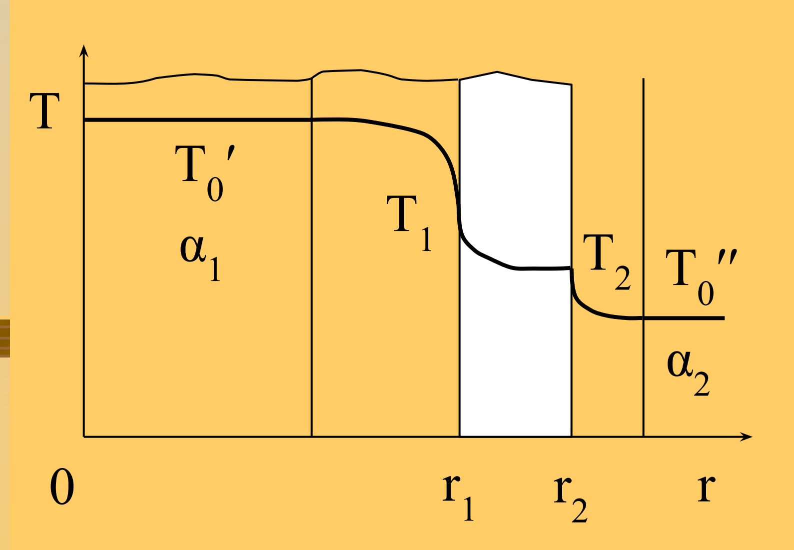
где $R_{L\,BH}$ – внутреннее линейное тепловое сопротивление цилиндрической стенки.

$$R_{L\,BH} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \cdot \lambda}.$$

Б. Г.у. II рода.

Как и для плоской стенки, задача не имеет единственного решения.

В. Г.у. III рода.



$$\begin{cases} Q_{L1} = \alpha_1 \cdot (T_0' - T_1) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1, \\ Q_{L2} = 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \dfrac{T_1 - T_2}{\ln\left(r_2 / r_1 \right)}, \\ Q_{L3} = \alpha_2 \cdot (T_2 - T_0'') \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_0' - T_1 = \dfrac{Q_{L1}}{2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot \alpha_1}, \\ T_1 - T_2 = \dfrac{Q_{L2} \cdot \ln\left(r_2 / r_1 \right)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda}, \\ T_2 - T_0'' = \dfrac{Q_{L3}}{2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot \alpha_2}. \end{cases}$$

Для сохранения стационарного режима необходимо, чтобы

$$Q_{L\,1} = Q_{L\,2} = Q_{L\,3} = Q_L\ .$$

Суммируя уравнения системы, получим:

$$T_0' - T_0'' = \frac{Q_L}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot r_1 \cdot \alpha_1} + \frac{\ln\left(r_2 / r_1 \right)}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{2 \cdot r_2 \cdot \alpha_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ Q_L = \frac{1}{\dfrac{1}{2 \cdot r_1 \cdot \alpha_1} + \dfrac{\ln\left(r_2 / r_1 \right)}{2 \cdot \lambda} + \dfrac{1}{2 \cdot r_2 \cdot \alpha_2}} \cdot \pi \cdot \left(T_0' - T_0'' \right) = k_L \cdot \pi \cdot \left(T_0' - T_0'' \right).$$

где k_L – линейный коэффициент теплопередачи.

Металлопластиковые трубы ALuPEX Wavin состоят из 5 слоев алюминиевой фольги и полиэтилена, которые соединены клеем. Сварка обеспечивает монолитность трубы и минимальное температурное удлинение, делает ее газонепроницаемой.

При теплопередаче через многослойную стенку

$$k_L = \frac{1}{\dfrac{1}{2\cdot r_1\cdot\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\ln\left(r_{i+1}/r_i\right)}{2\cdot\lambda_i} + \dfrac{1}{2\cdot r_2\cdot\alpha_2}},$$

где $R_{LH} = \dfrac{1}{2\cdot r\cdot\alpha}$ – наружное линейное тепловое сопротивление.

Зная T_0', T_0'' и определив Q_L, можно найти T_1, T_2 и $T(r)$.

Рассмотрим влияние наружного диаметра однородной цилиндрической стенки на ее суммарное линейное тепловое сопротивление.

$$R_{L\Sigma} = \frac{1}{d_1 \cdot \alpha_1} + \frac{\ln\left(d_2 / d_1 \right)}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{d_2 \cdot \alpha_2}.$$

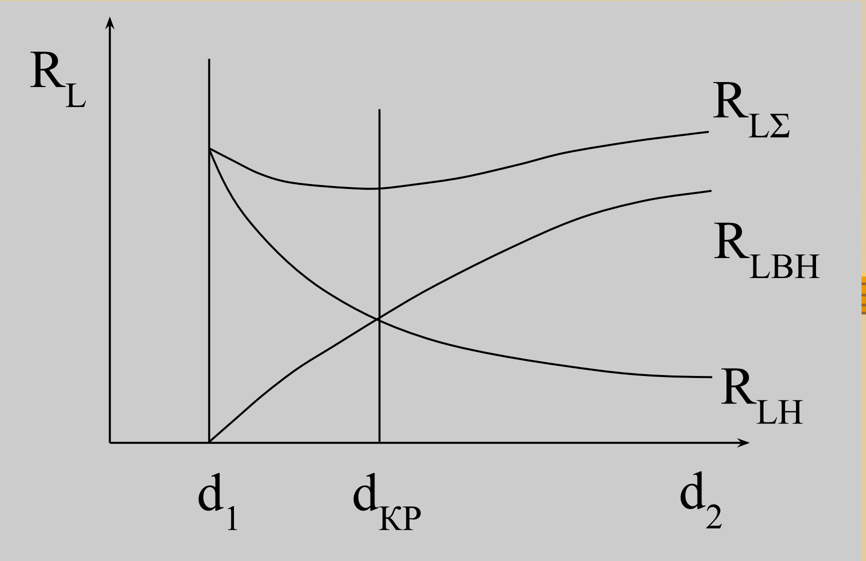
Считаем, что $d_1 = \mathrm{const}$, тогда при увеличении наружного диаметра d_2 увеличивается внутреннее линейное тепловое сопротивление

$$R_{L\,ВН} = \frac{\ln\left(d_2 / d_1 \right)}{2 \cdot \lambda},$$

а наружное

$$R_{L\,Н} = \frac{1}{d_2 \cdot \alpha_2} -$$

уменьшается.



При $d_2 = d_{КР}$ линейная плотность теплового потока достигает максимума.

Для нахождения $d_{КР}$ продифференцируем по d_2 сумму двух последних слагаемых в уравнении для $R_{L\Sigma}$ и приравняем производную нулю:

$$\frac{1}{2\cdot\lambda\cdot d_{КР}} - \frac{1}{\alpha_2\cdot d_{КР}^2} = 0 \Rightarrow d_{КР} = \frac{2\cdot\lambda}{\alpha_2}.$$