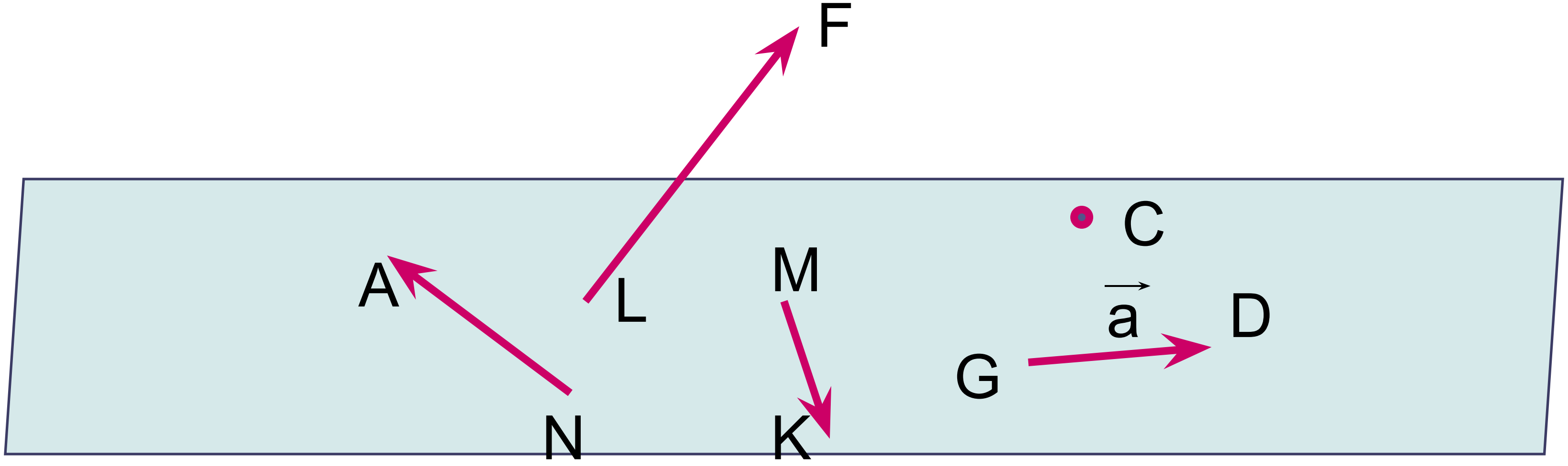
# Векторы в пространстве

# § 1 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

**Вектор** *– отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой - концом.*

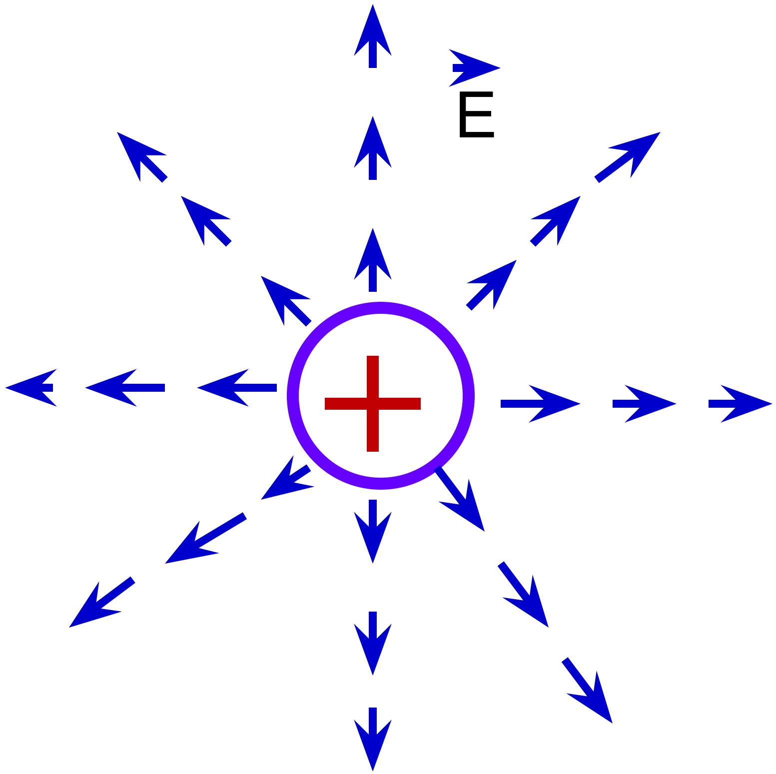
***Нулевой вектор*** *– любая точка пространства.*




$$\overrightarrow{NA},\ \overrightarrow{LF},\ \vec{a}\ ,\ \overrightarrow{CC} = \vec{0}$$

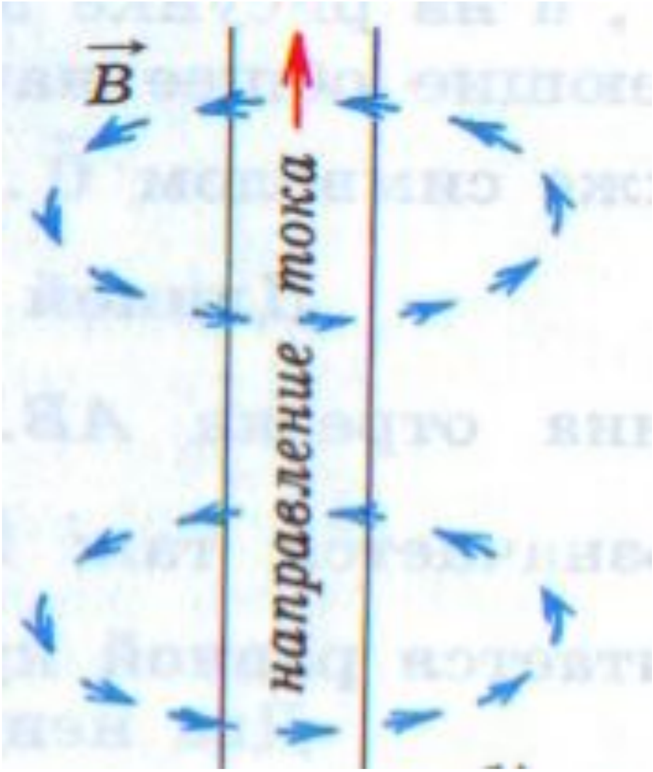
- *Электрическое поле, создаваемое в пространстве зарядами, характеризуется в каждой точке пространства вектором напряженности электрического поля.*

- *На рис. изображены векторы напряженности электрического поля положительного точечного заряда.*



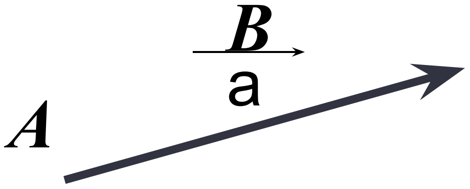
- ***Электрический ток, т.е. направленное движение зарядов, создает в пространстве магнитное поле, которое характеризуется в каждой точке пространства вектором магнитной индукции.***

- ***На рис. изображены векторы магнитной индукции магнитного поля прямого проводника с током.***



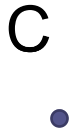
- ***Длиной ненулевого вектора АВ называется длина отрезка АВ***

***Обозначение :*** $|\vec{a}|$ ***или*** $|\overrightarrow{AB}|$



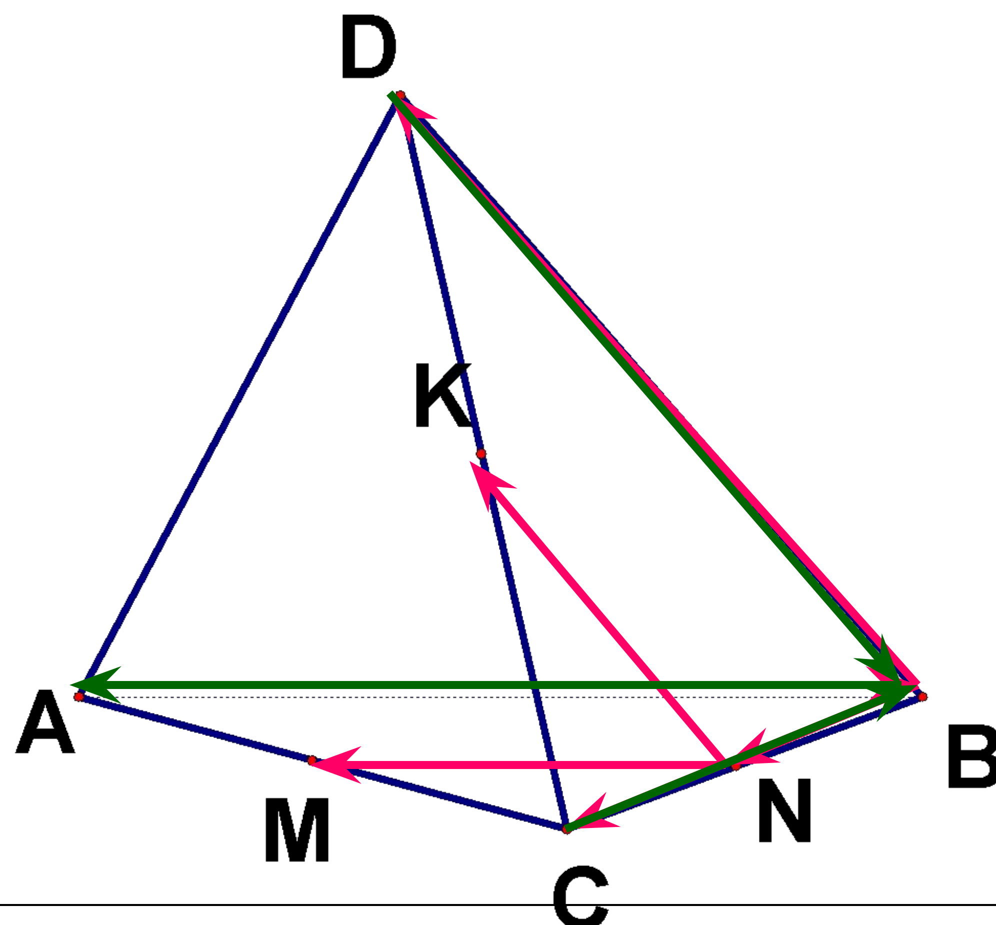

- ***Длина нулевого вектора равна 0***

$$|\vec{0}| = 0, \quad |\overrightarrow{CC}| = 0$$



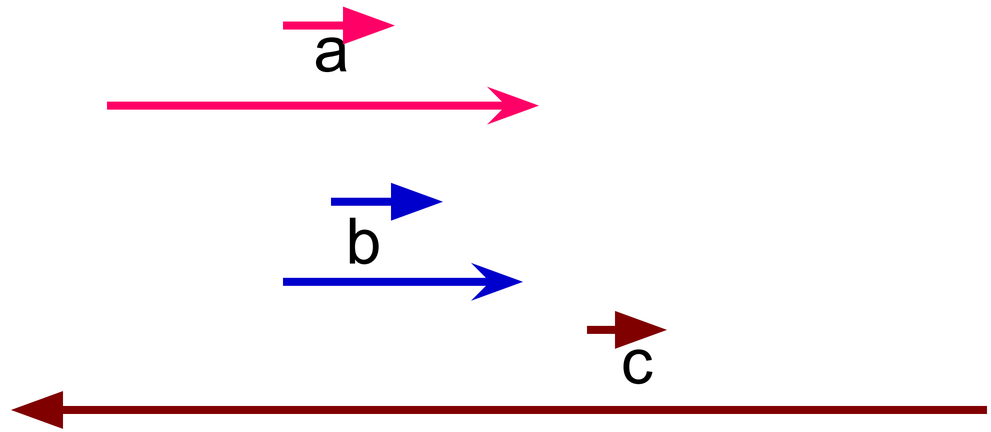
**№ 320**

***В тетраэдре DABC точки M, N, K – середины ребер AC, BC, CD. AB= 3см, BC=4см, BD=5см. Найти длины векторов: а) AB, BC, BD, NM, BN, NK б) CB, BA, DB, NC, KN***

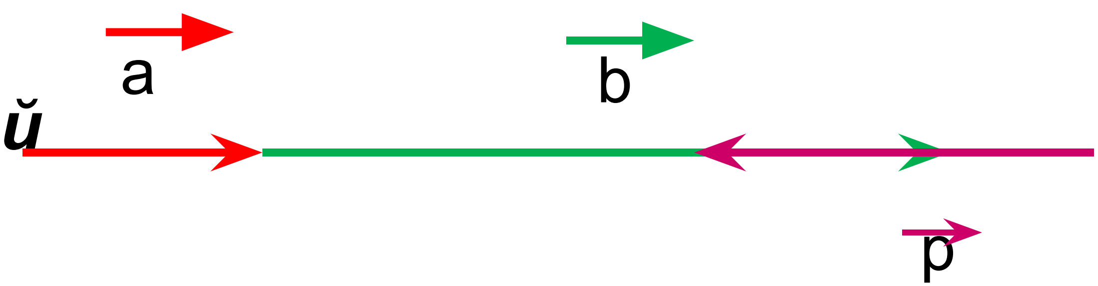


# Коллинеарные векторы (от лат. com — совместно и linea — линия)

- *Лежат на параллельных прямых*

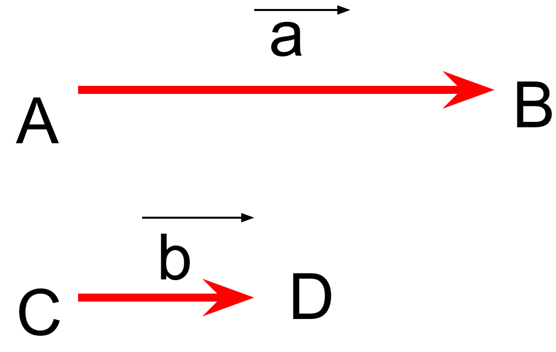



- *Лежат на одной прямой.*



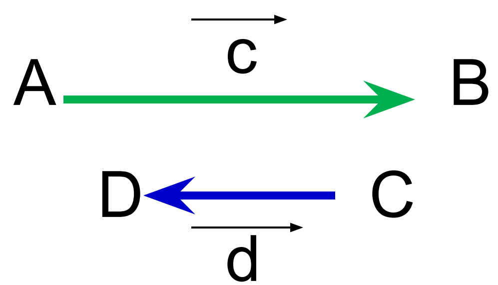
***Два ненулевых вектора называются сонаправленными, если они коллинеарны и лучи АВ и CD сонаправлены***

$$\vec{a} \upuparrows \vec{b}$$



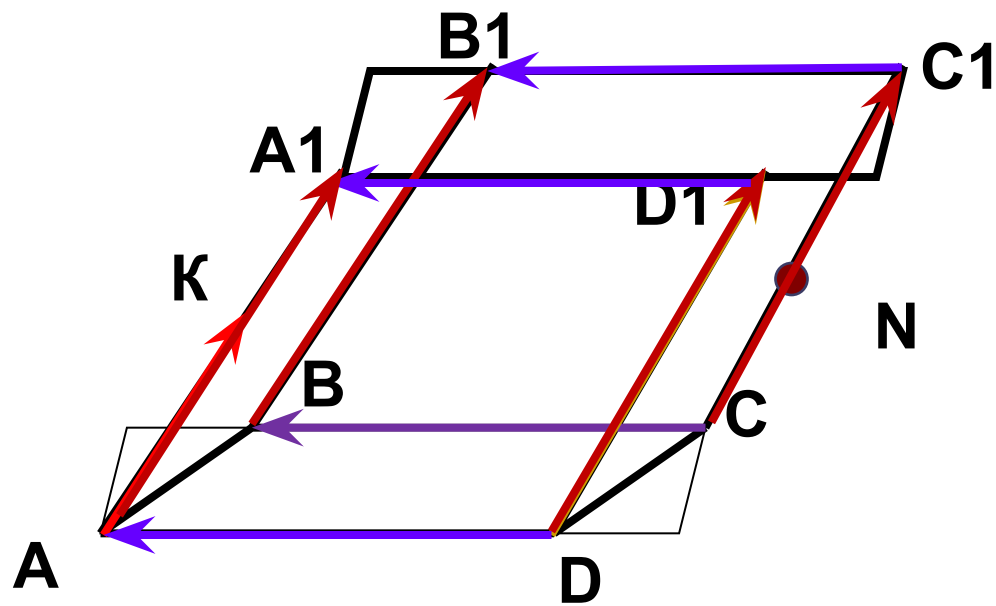

***Два ненулевых вектора называются противоположно направленными, если они коллинеарны и лучи АВ и CD противоположно направлены***

$$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$$



***Укажите векторы, сонаправленные с*** $\overrightarrow{AK}$ , $\overrightarrow{CB}$

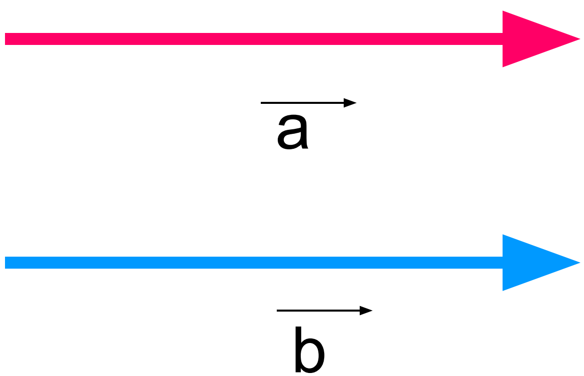
***Противоположно направленные*** $\overrightarrow{DD_1}$



**Векторы называются** ***РАВНЫМИ,*** **если они:**

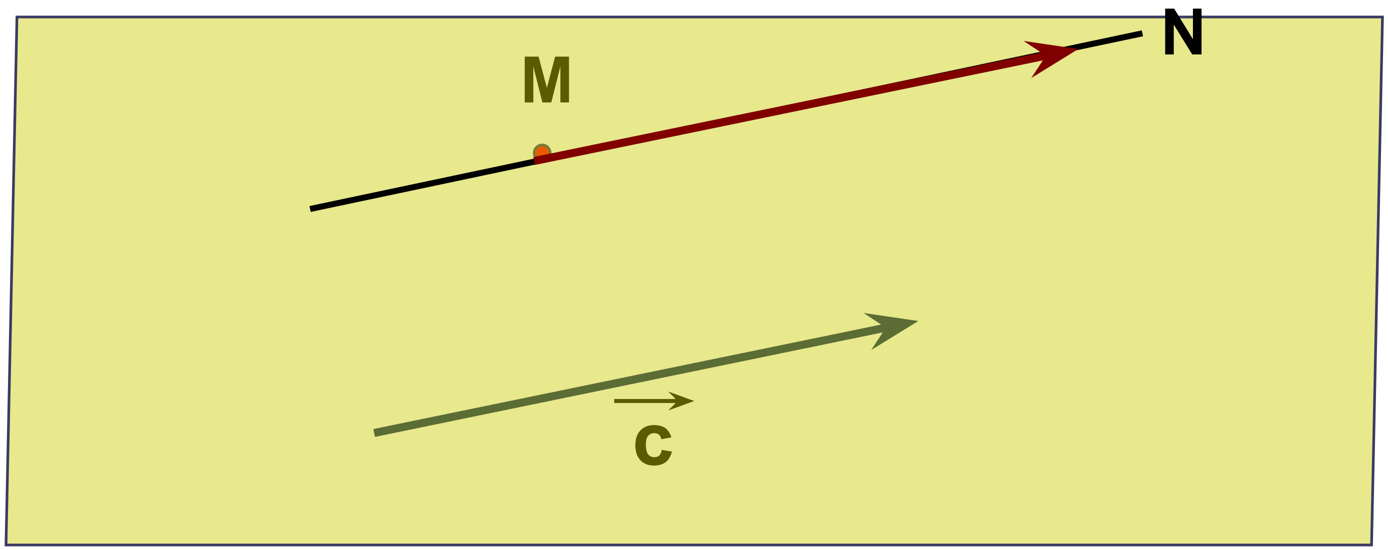
*1. сонаправлены*

*2. их длины равны.*

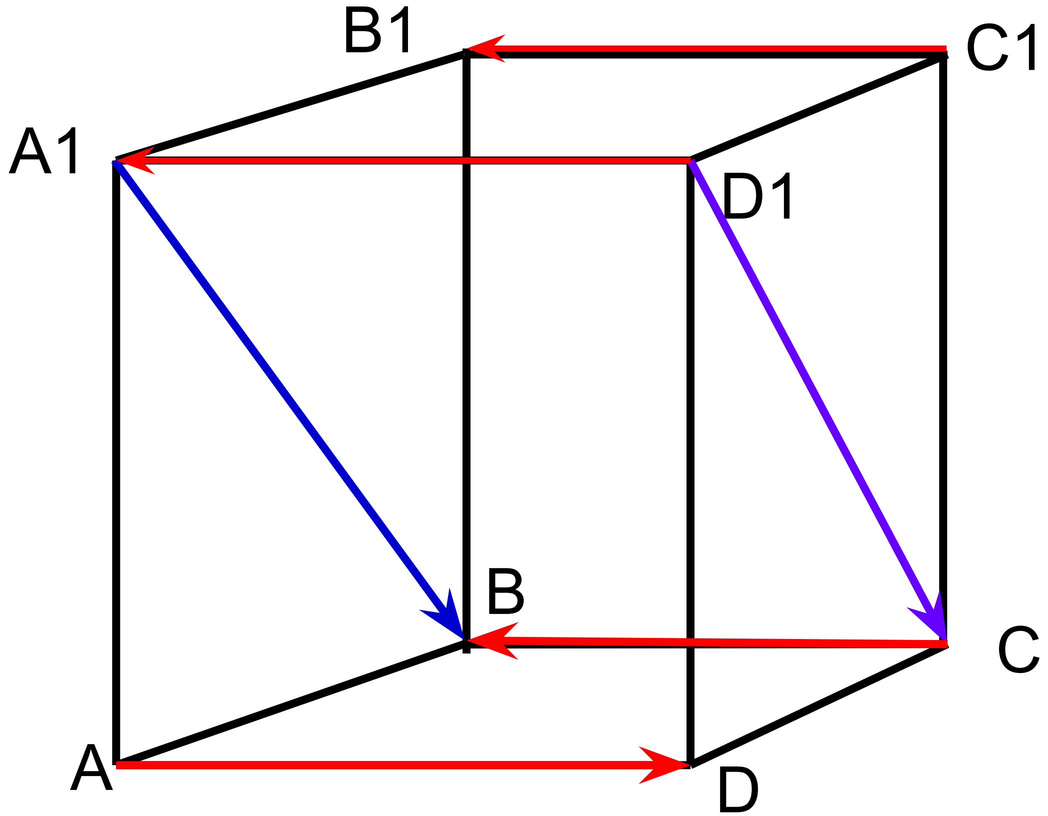



$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{array}\right.$$

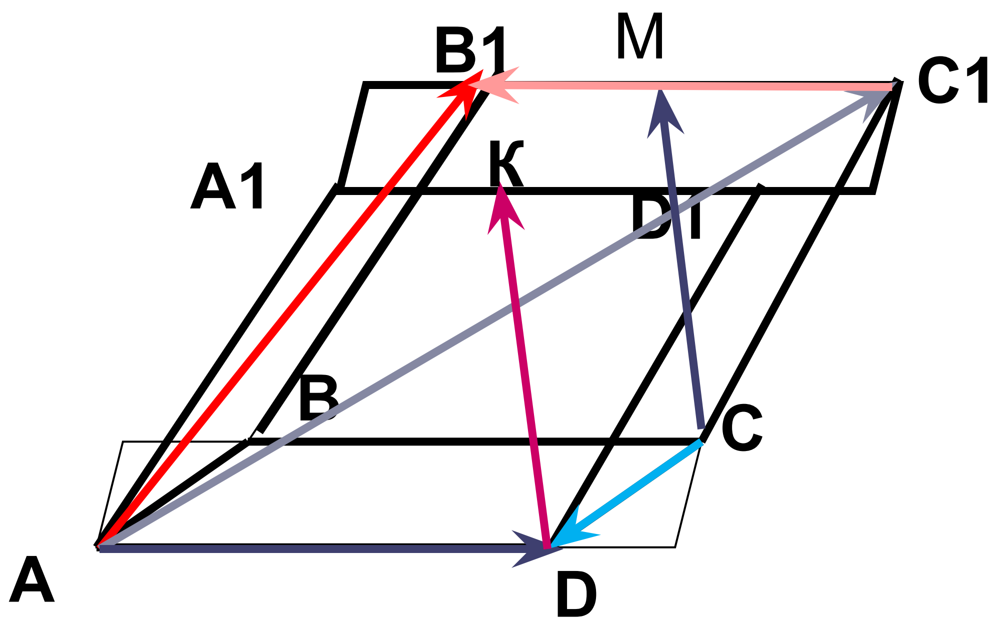
***От любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному и притом только один***



***Постройте 1) вектор с началом в точке $D_1$, равный вектору $\overrightarrow{A_1B}$;***
***2) два вектора с началом и концом в вершинах куба, коллинеарные с вектором $\overrightarrow{AD}$, но не равные ему.***



# №322




***Указать все пары:***

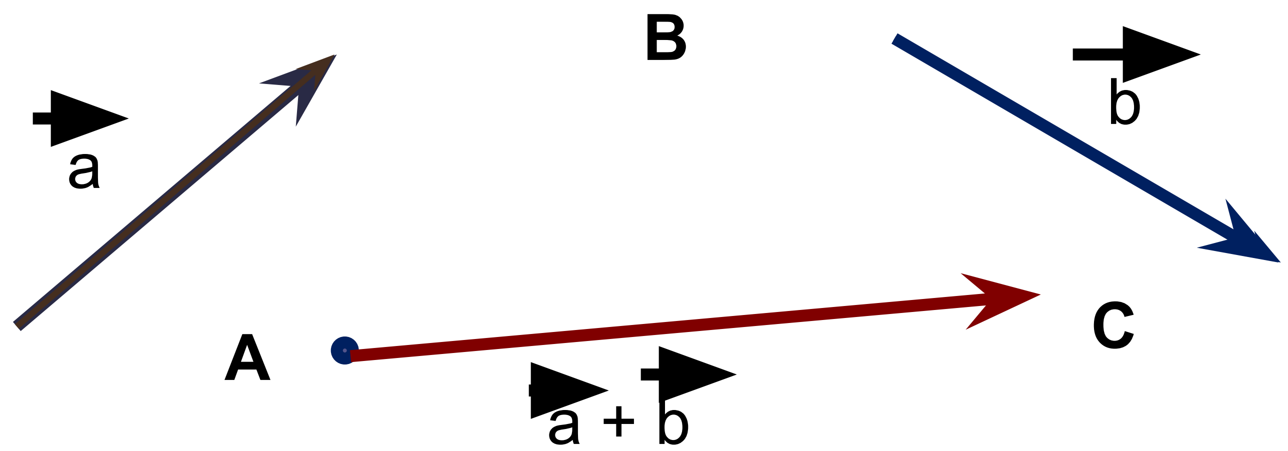
***1. сонаправленных векторов;***

***2. Противоположно направленных векторов;***

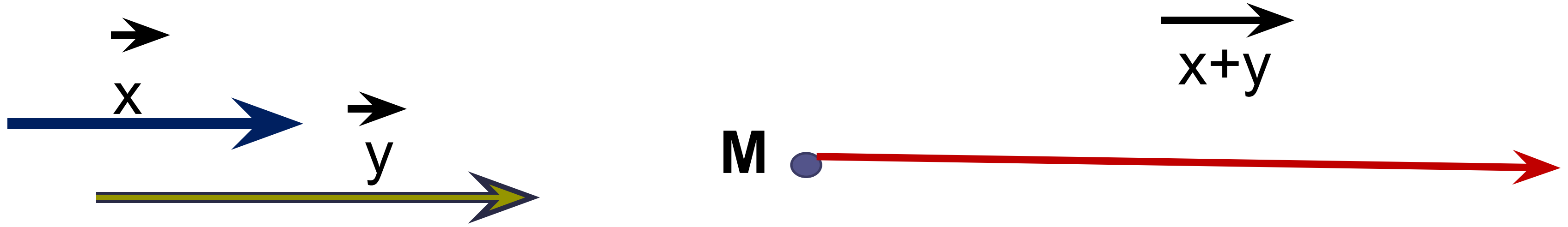
***3. Равных векторов***

# § 2 СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

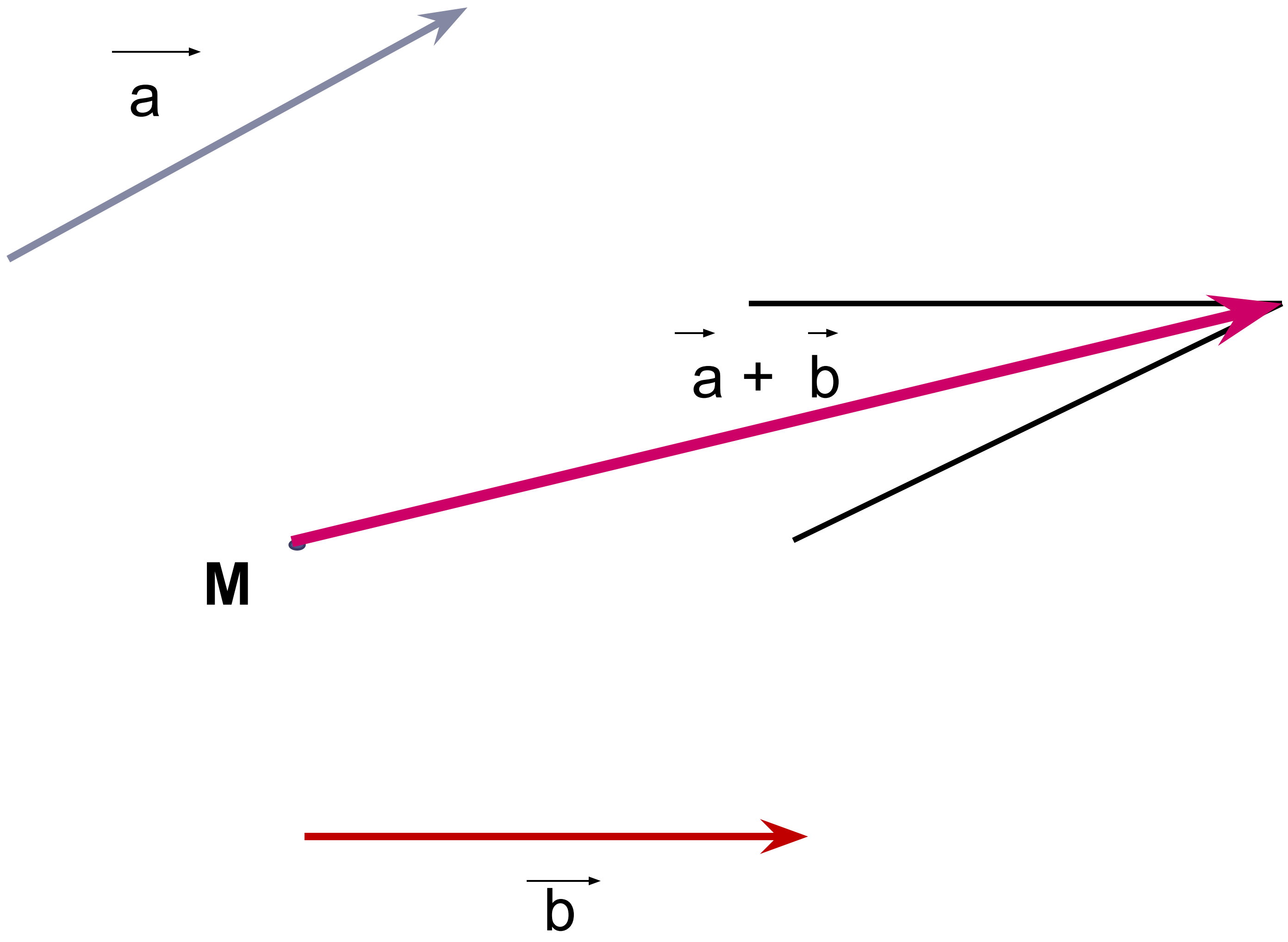
# Правило треугольника



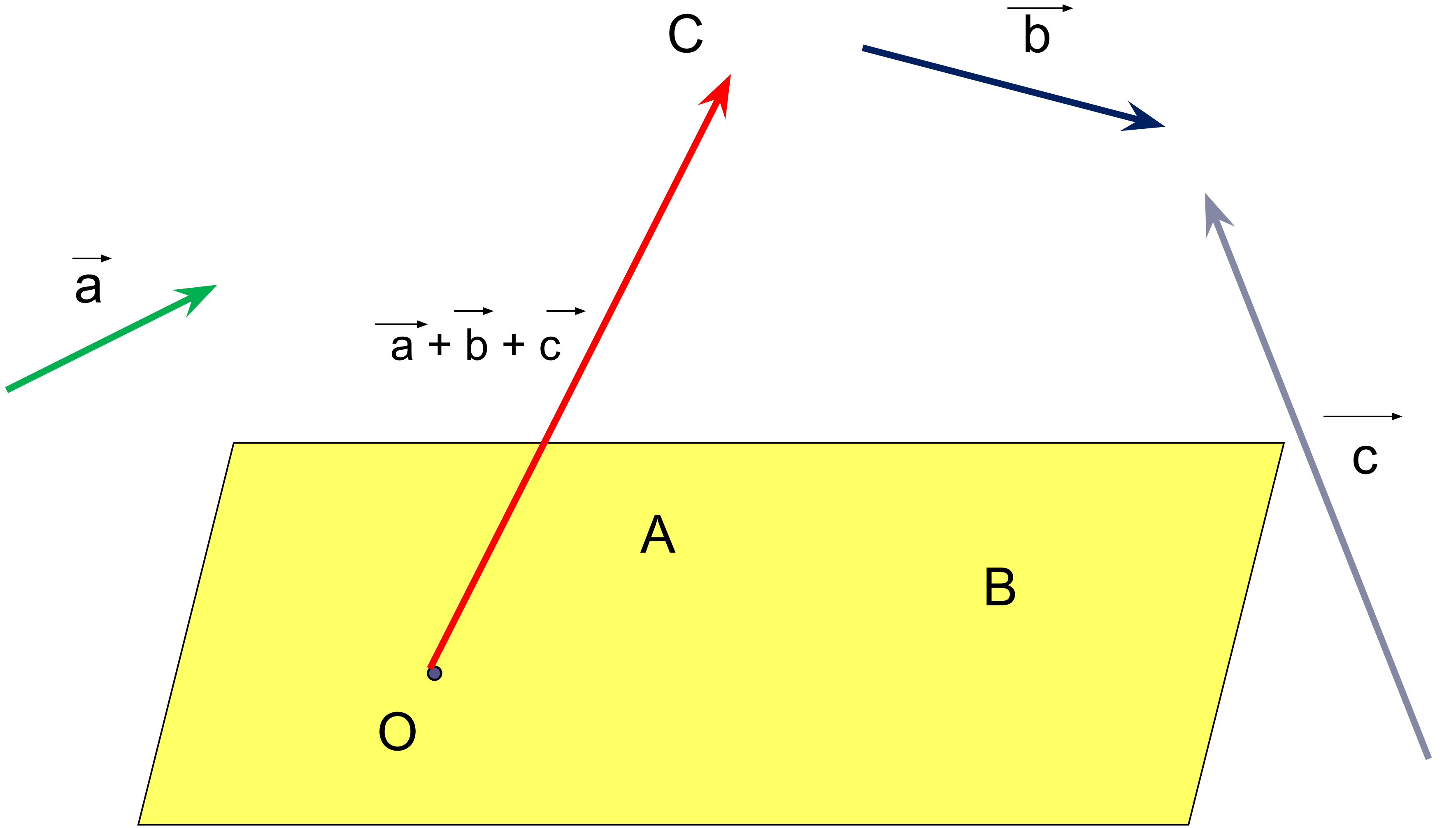

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



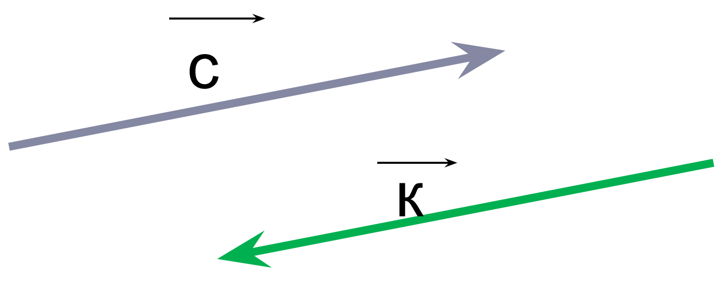
# Правило параллелограмма



# Правило многоугольника



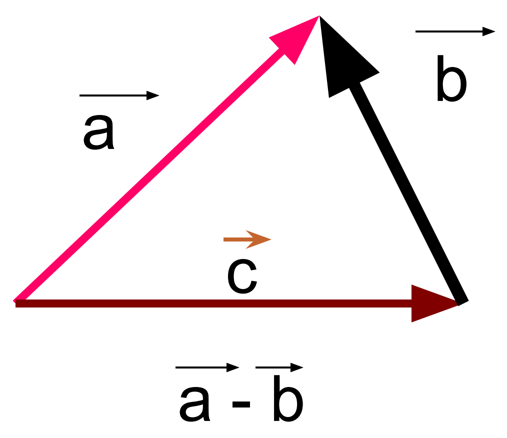
# Противоположные векторы

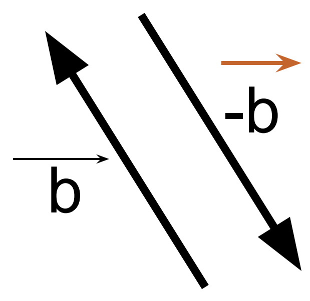


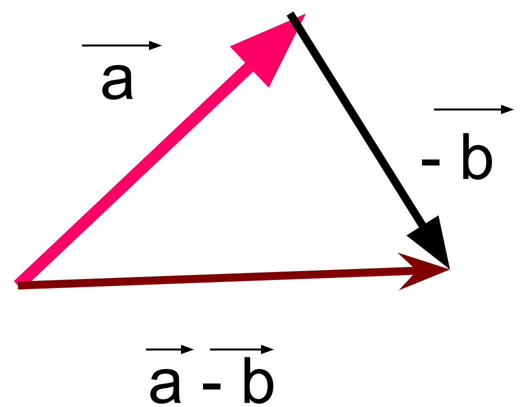

Векторы $\vec{c}$ и $\vec{к}$ **противоположны**, если
$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{к}$ и $|\vec{c}| = |\vec{к}|$

# Вычитание векторов

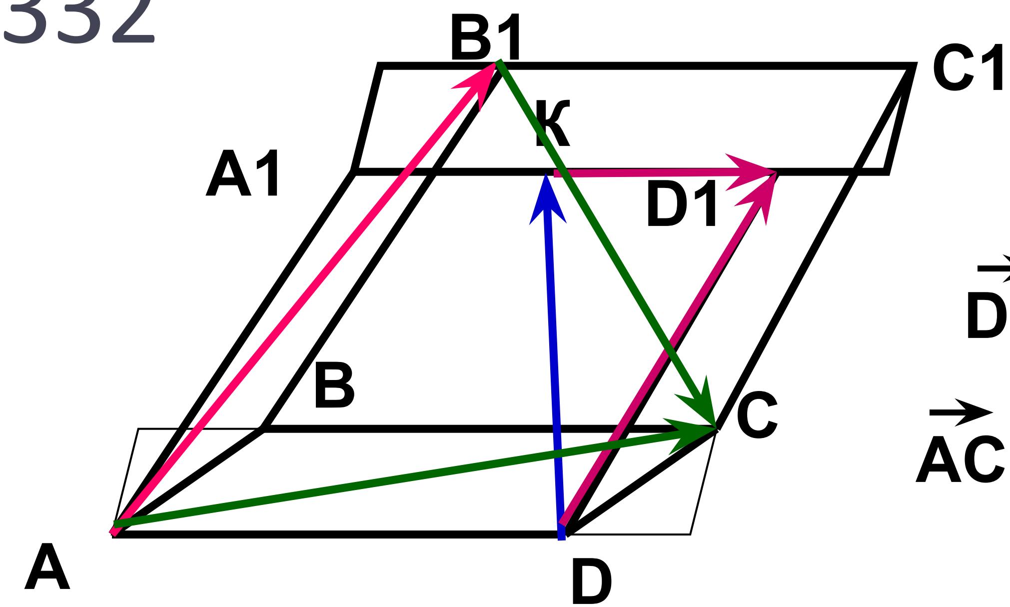
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ $\qquad$ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



# № 332

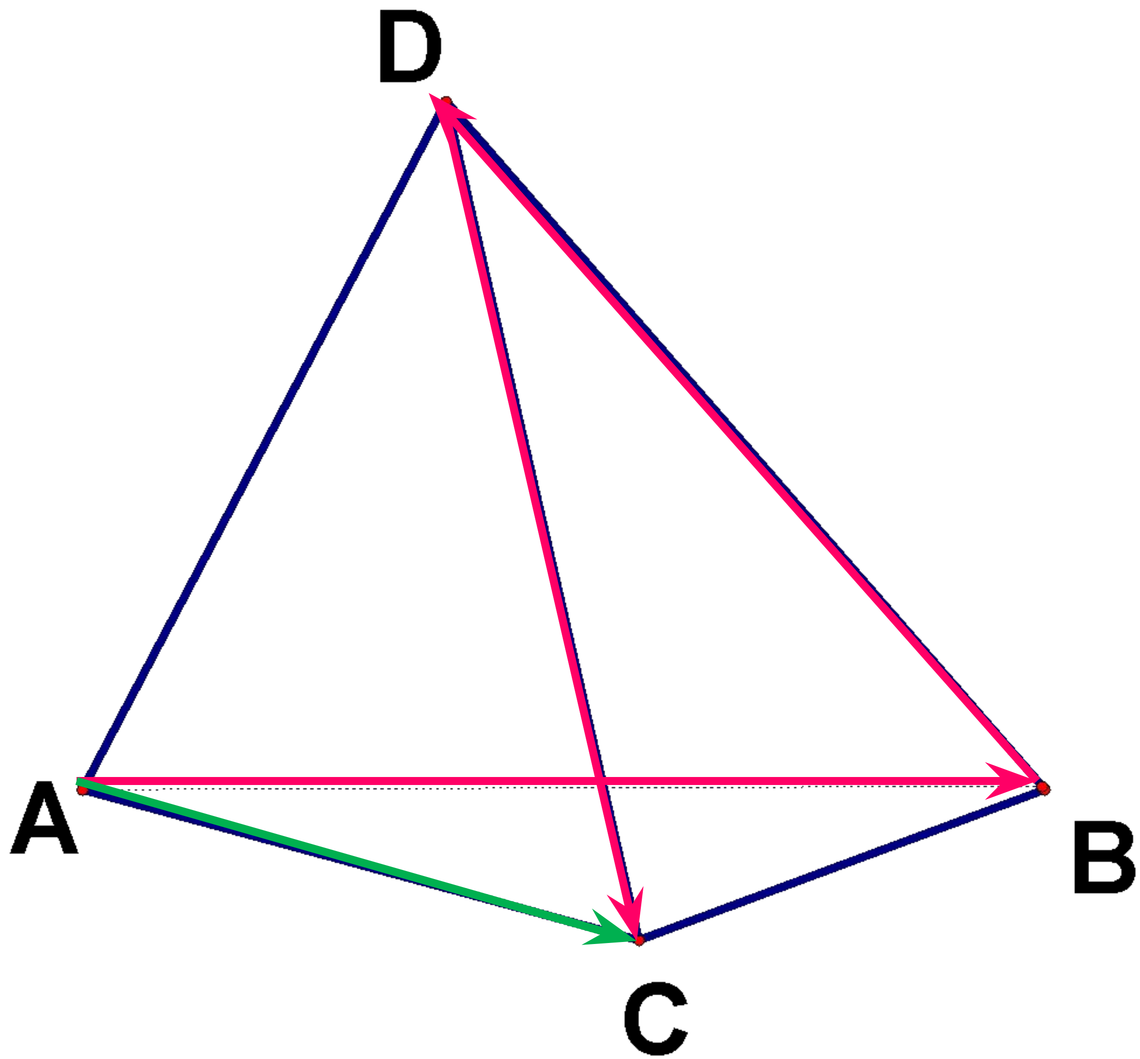



$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{KD_1}$

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{AB_1}$

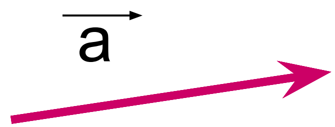
***Представьте векторы AB₁ и DK в виде разности двух векторов с началом и концом в указанных на рисунке точках***

# Найдите сумму векторов. $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DC}$.



# Умножение вектора на число

***Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \bullet |\vec{a}|$, причем***

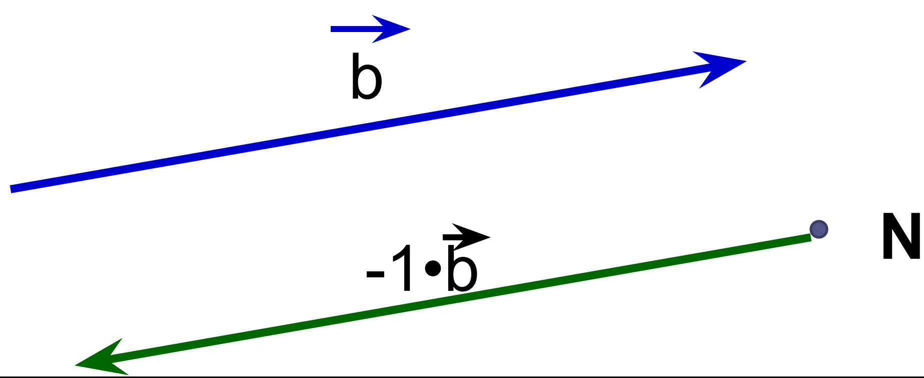



***При k>0 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены***

**M**

$\overrightarrow{3a} = \vec{b}$

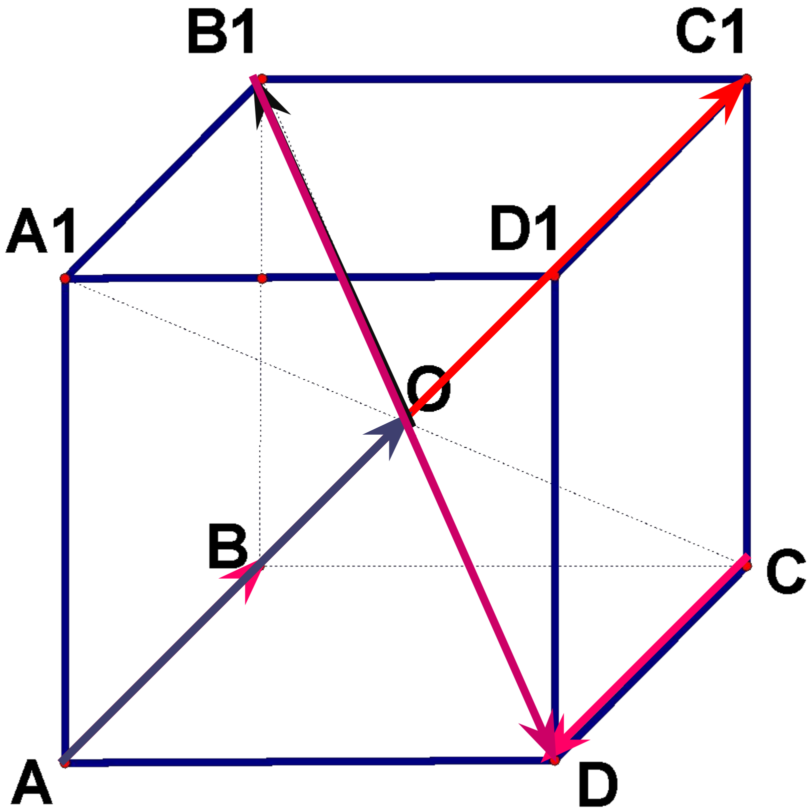
***При k<0 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены***



# Законы сложения и умножения вектора на число

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный)
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный)
3. $(k\,n)\,\vec{a} = k\,(n\,\vec{a})$ (сочетательный)
4. $k\,(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (распределительный)
5. $(k + n)\,\vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$ (распределительный)

**№344** ***Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке О. Найдите число k такое, чтобы равенства были верны.***



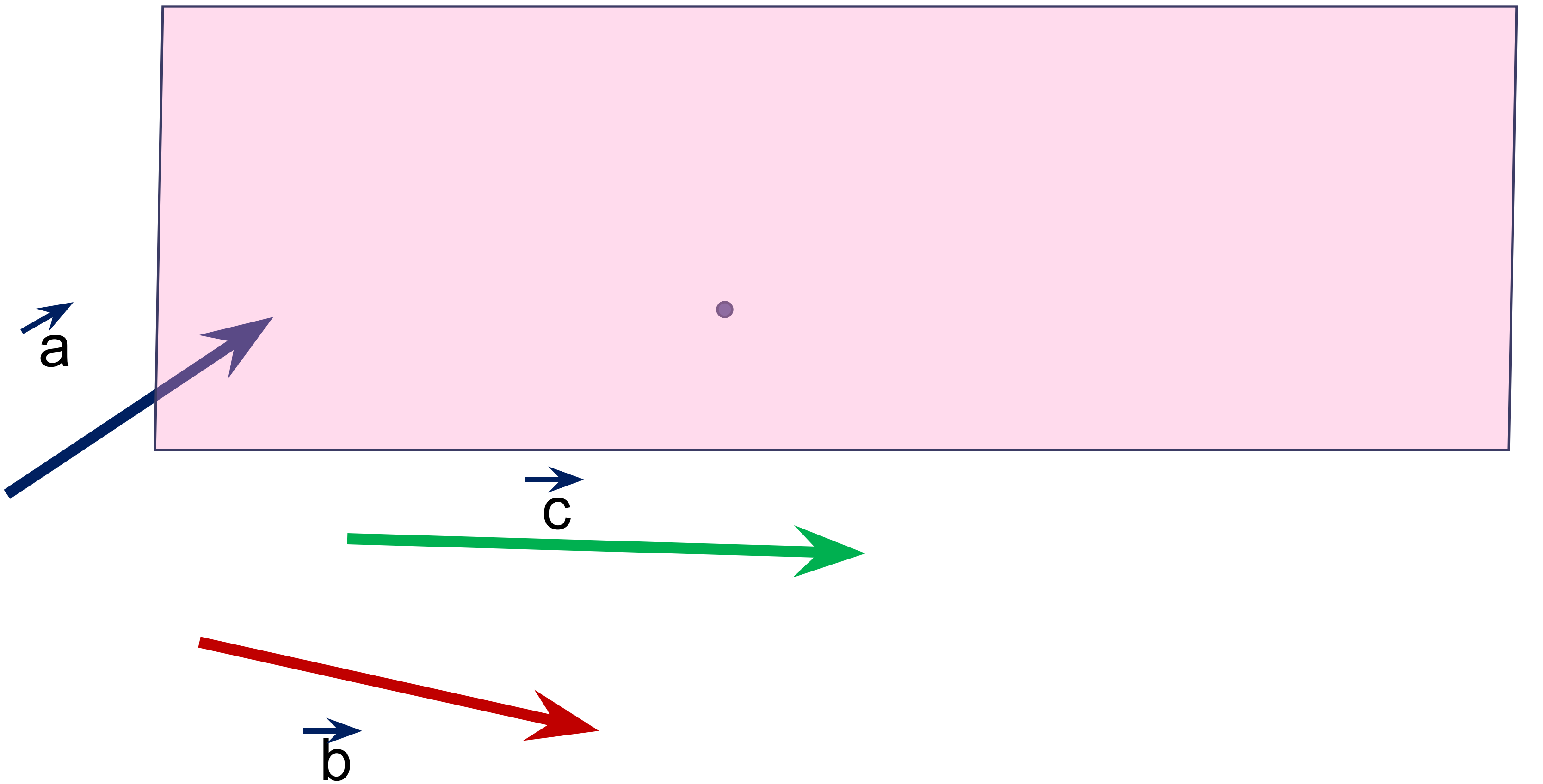

1) $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$ K= -1

2) $\overrightarrow{AC1} = k \cdot \overrightarrow{AO}$ K= 2

3) $\overrightarrow{OB1} = k \cdot \overrightarrow{B1D}$ K= -0,5

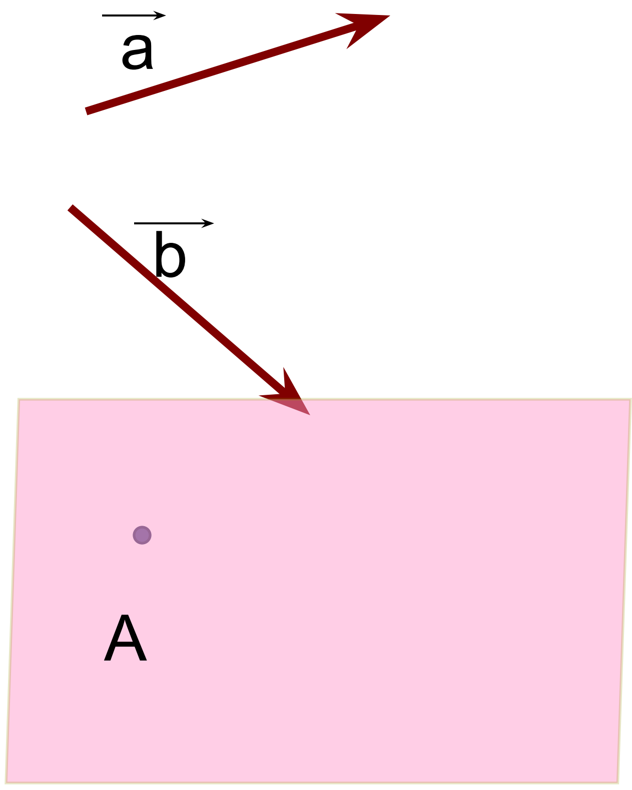
# § 3 КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

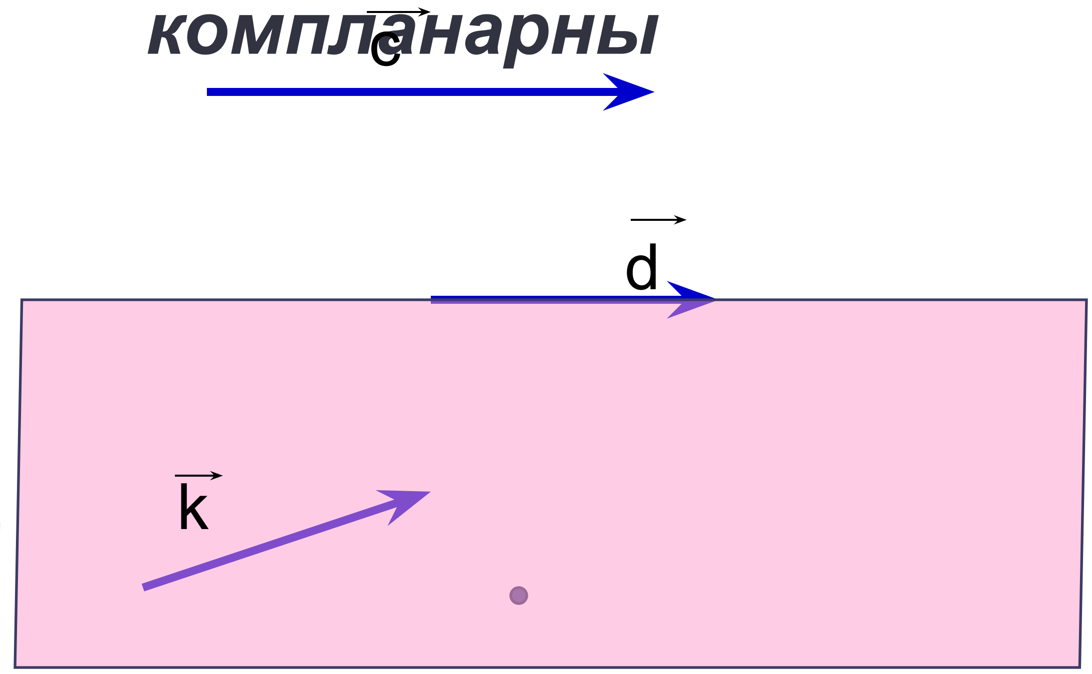
## *Компланарные векторы (от лат. com — совместно и planum — плоскость)*



Любые два вектора компланарны

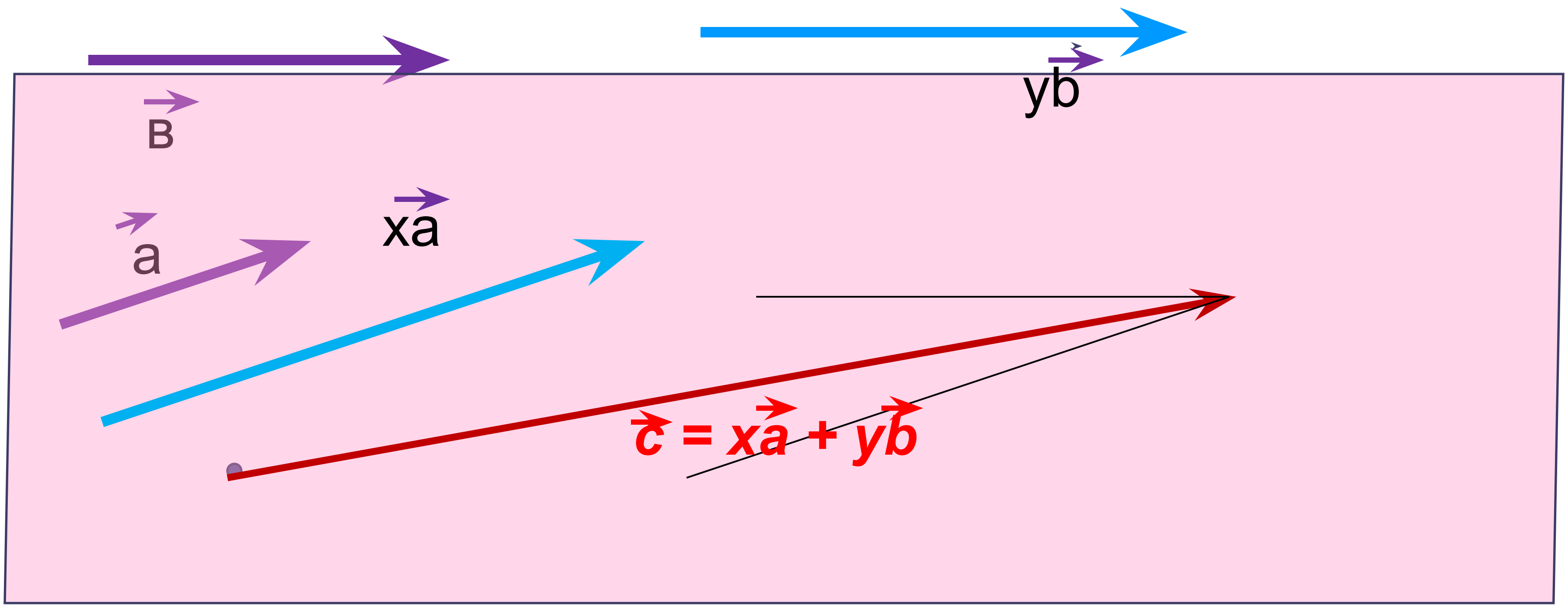
Любые три вектора, два из которых коллинеарные, компланарны



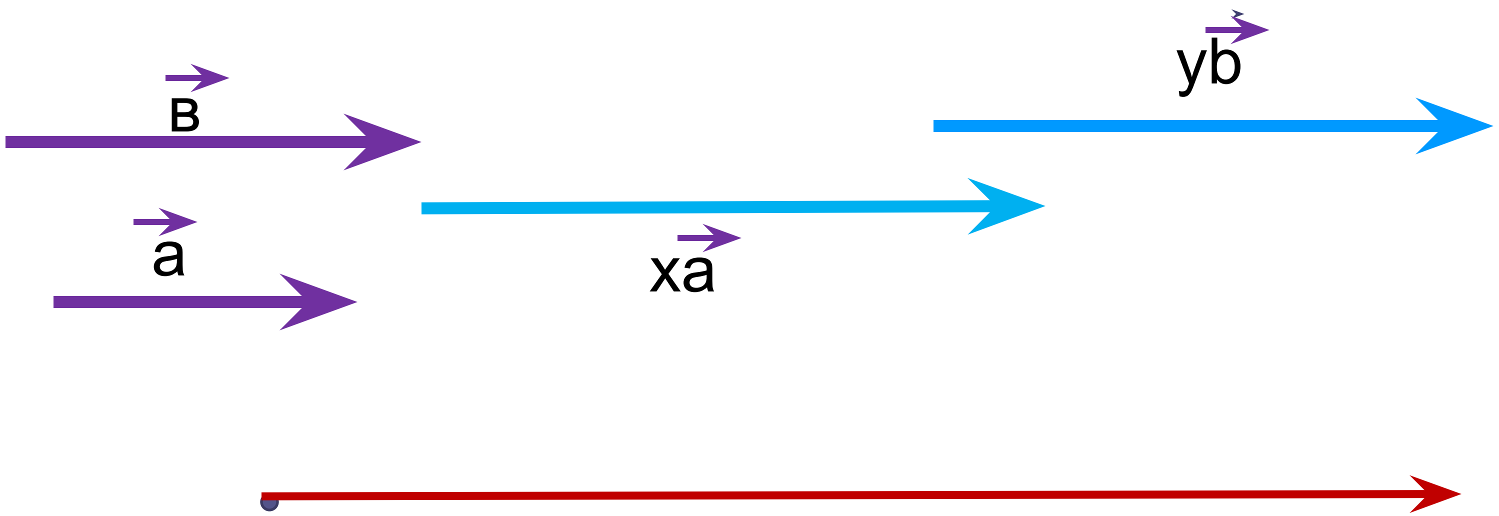
# Признак компланарности векторов

Если $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где ***x*** и ***y*** – некоторые числа, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ компланарны



# Признак компланарности векторов

**Если $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, то**
**$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны**



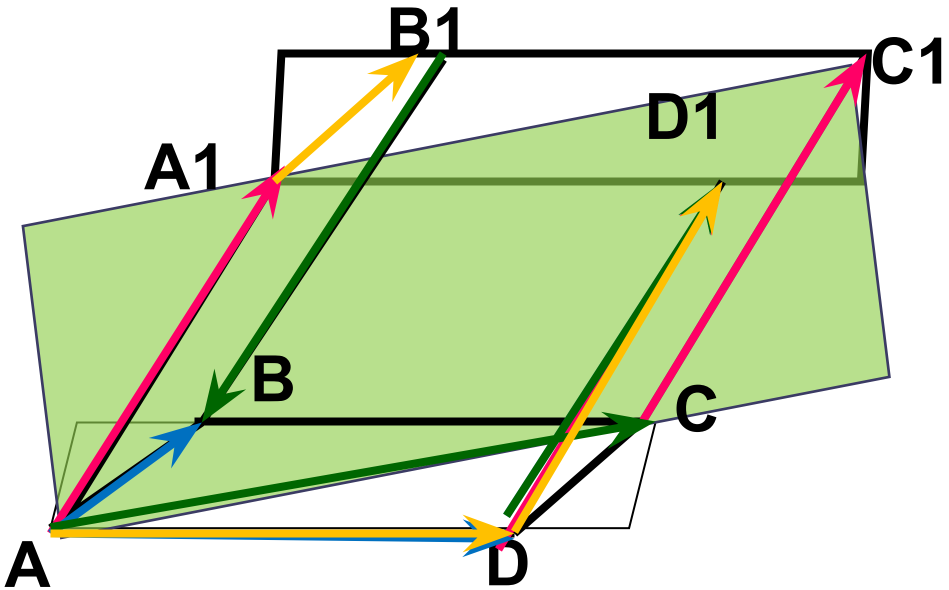

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

# Верно и обратное утверждение

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то вектор с можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{в}$, т.е.

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где х и у – числа

№355 ***Дан параллелепипед.***
***Какие из следующих трех векторов компланарны?***



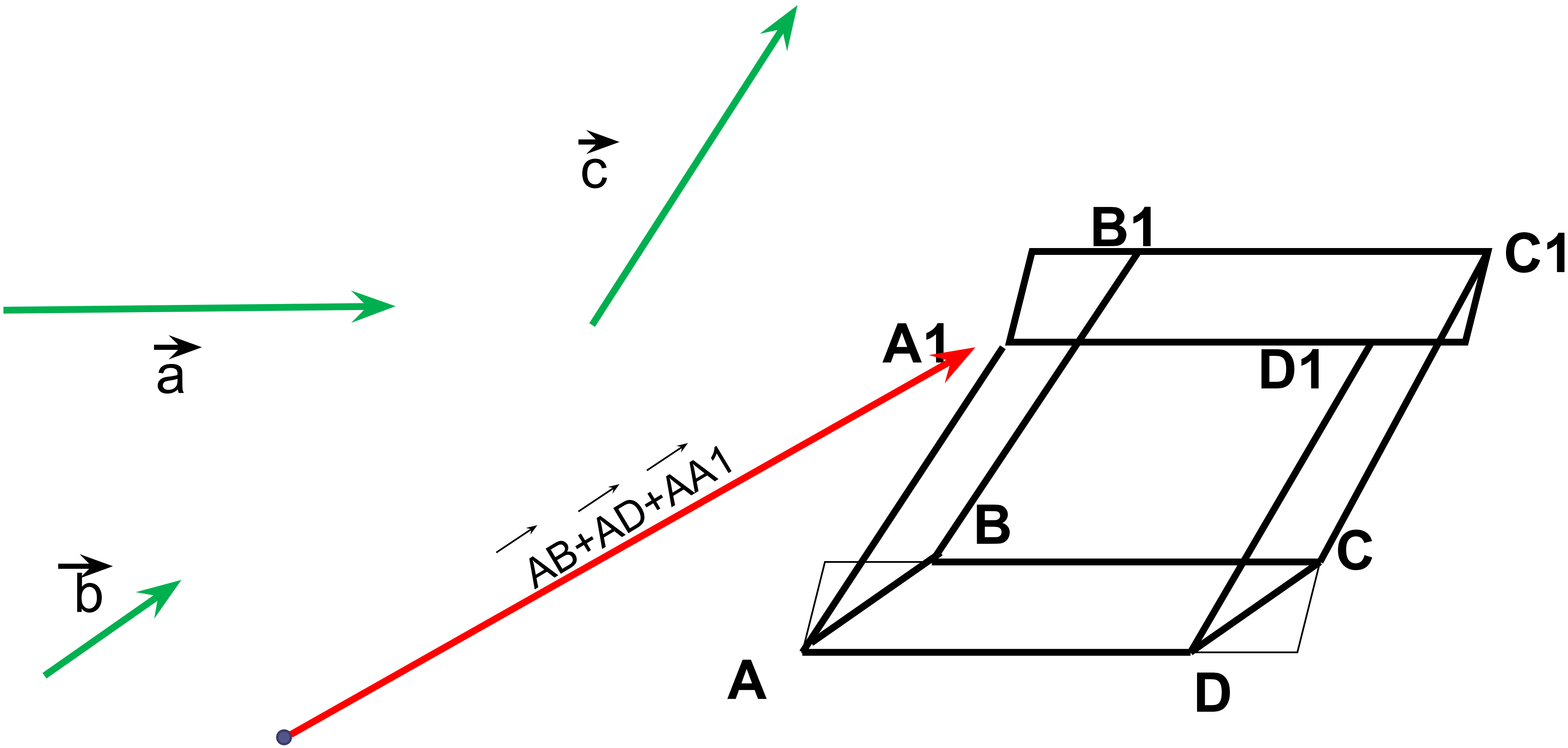

А) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{DD_1}$

Б) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$

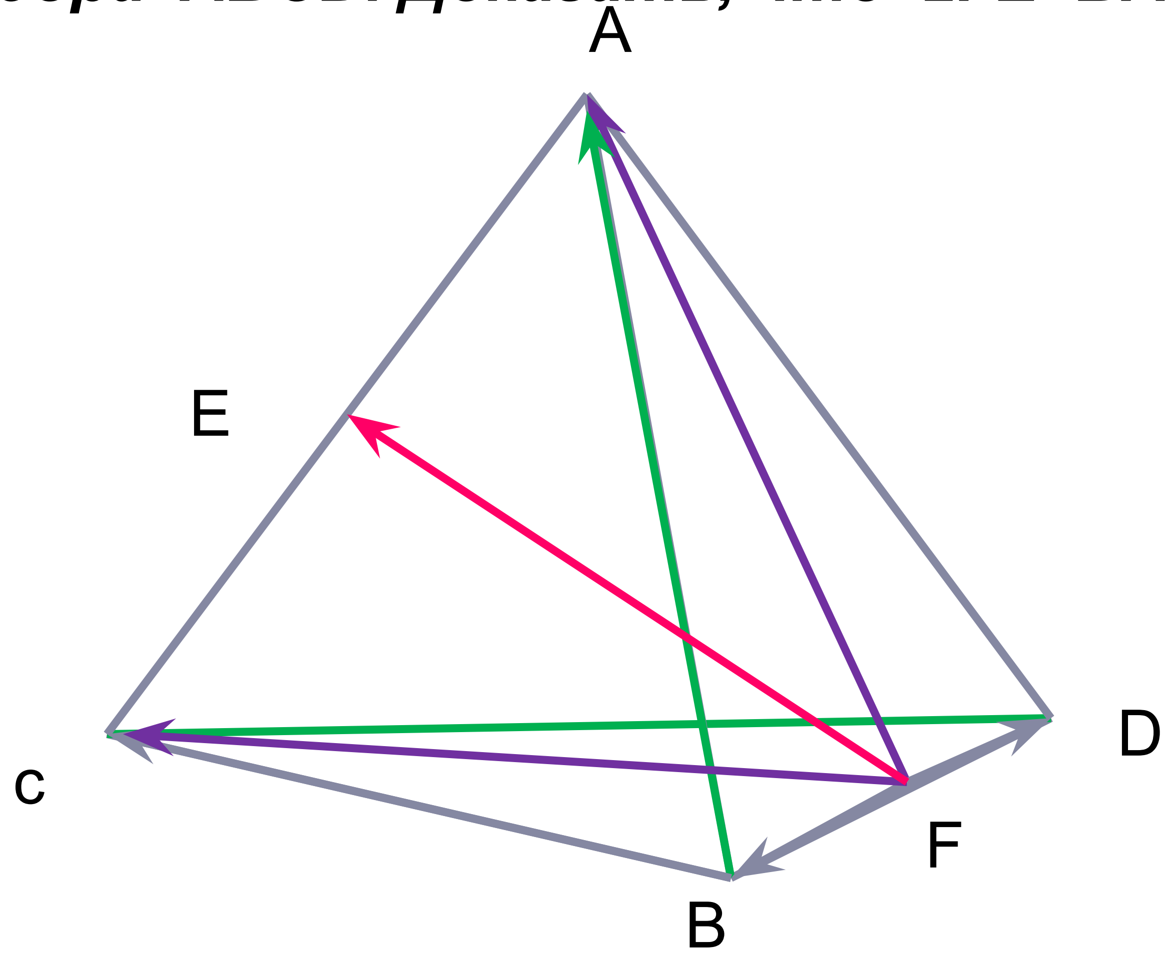
В) $\overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DD_1}$

Г) $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{A_1B_1}$

# Правило параллелепипеда



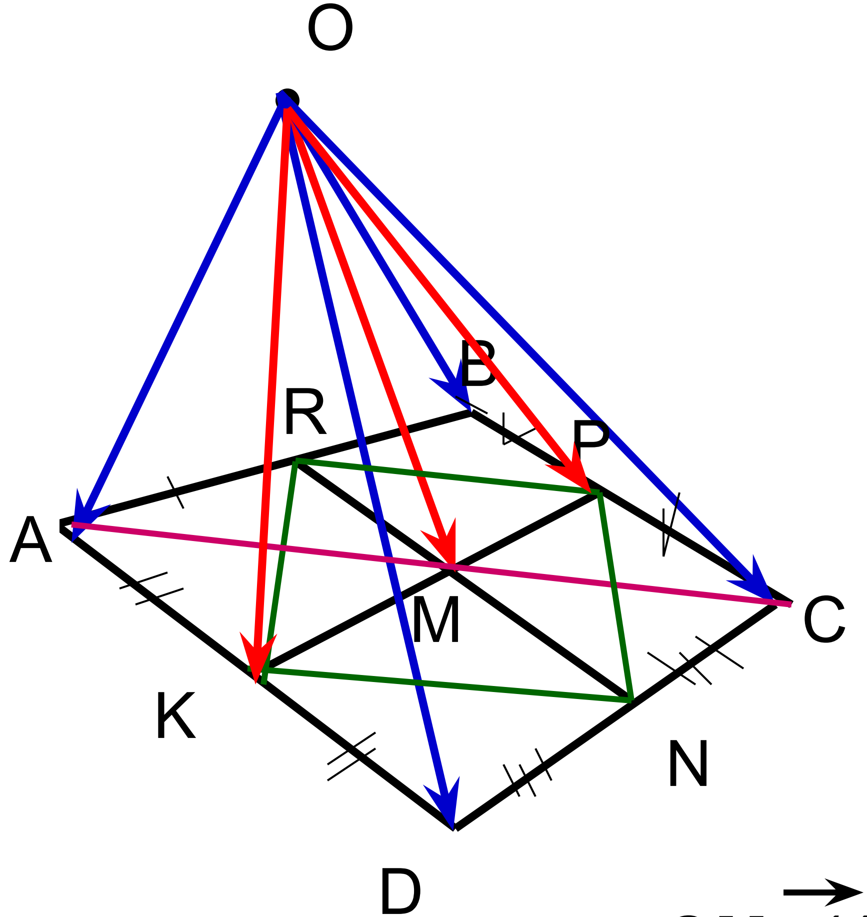
***№ 356 Точки E и F- середины ребер AC и BD тетраэдра ABCD. Доказать, что $2\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$***




***Компланарны ли векторы $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$***

**№ 385**

***Доказать, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$***




Определите вид многоугольника KRPN

M- середина KP

$\overrightarrow{OM} = 1/2\ (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP})$

$\overrightarrow{OK} = 1/2\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$

$\overrightarrow{OP} = 1/2\ (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

***$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$***

# Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

**Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде**

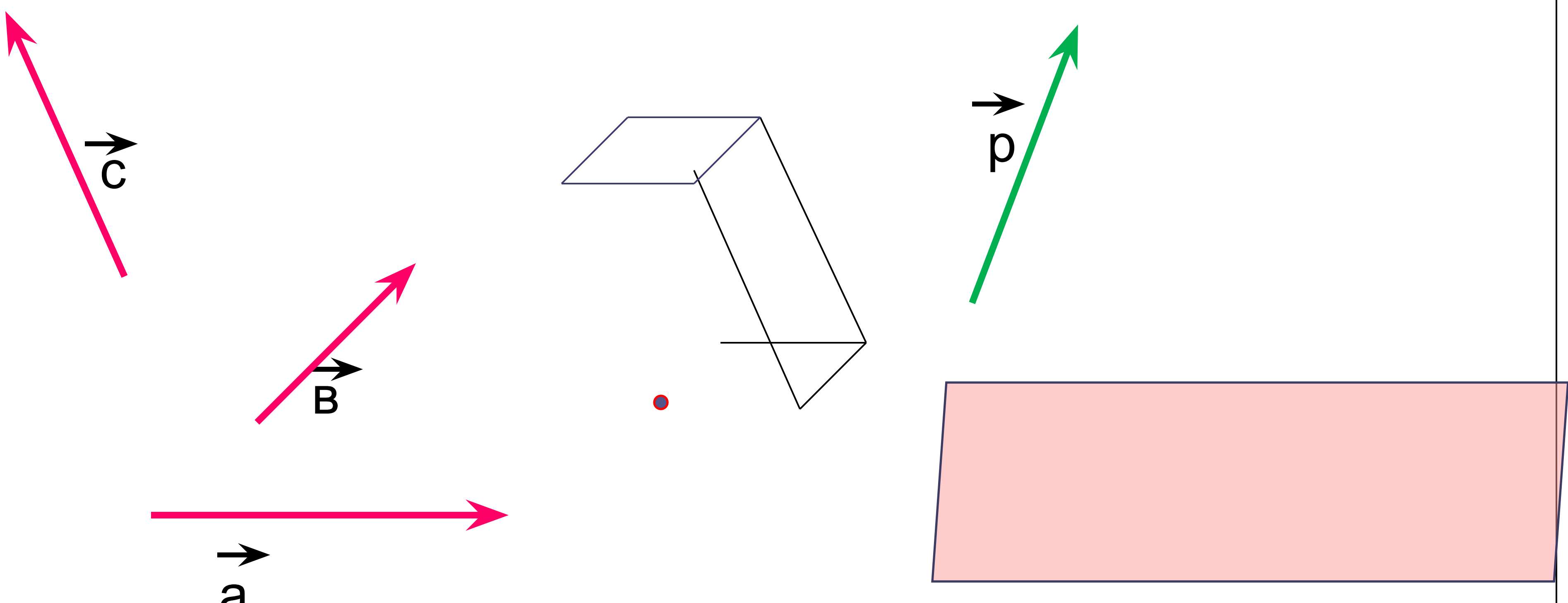
$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

где ***x, y и z*– некоторые числа, то говорят, что $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.**

***Любой вектор можно разложить по трем некомпланарным векторам.***
***Причем коэффициенты разложения определяются единственным образом***

# Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

***Докажем, что*** $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, *где* ***x, y и z– некоторые числа, а*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ ***и*** $\vec{c}$ ***некомпланарны***

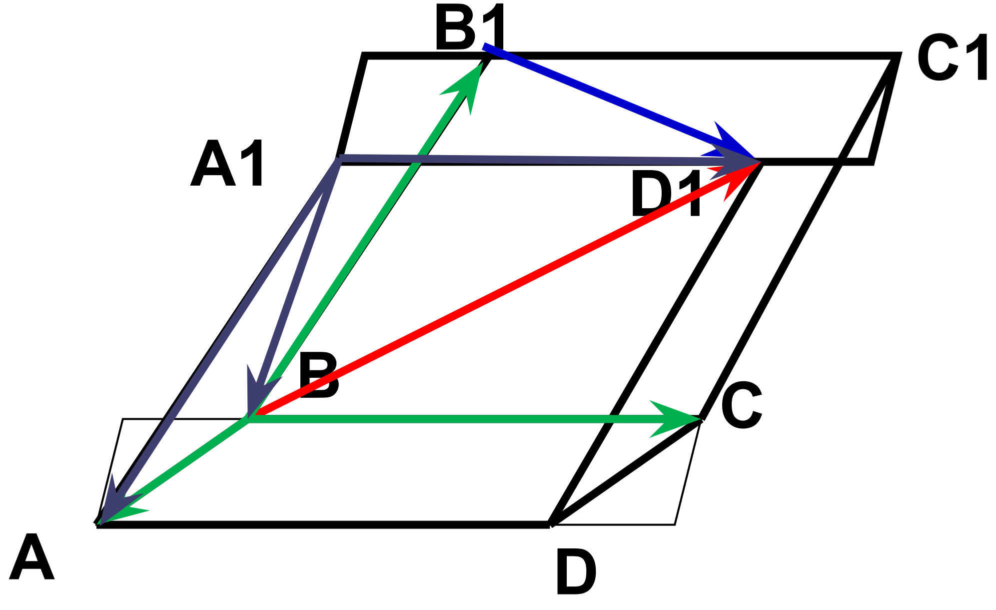



$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$,

**№ 359. Дан параллелепипед.**

**А) Разложите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BB_1}$**

**Б) Разложите вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$**



Источники

1. Геометрия 10-11  учебник для общеобразовательных учреждений . Авторы : Атанасян Л.С. , Бутузов В.Ф. и др.
2. Microsoft Office Power Point 2007