ЛЕКЦИЯ №2

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ САР В СТАТИКЕ И ДИНАМИКЕ»

План:

1. Модели статики. Понятие о линейных элементах
2. Динамические характеристики линейных элементов и систем

1. МОДЕЛИ СТАТИКИ. ПОНЯТИЕ О ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

После выбора элементов функциональной схемы требуется произвести ее расчет с целью обеспечения заданных показателей качества работы САР. Этим занимается линейная теория автоматического регулирования (ЛТАР). С точки зрения ЛТАР безразлично, из каких элементов составлена САР, важно лишь математическое описание этих элементов.

Для получения математического описания системы обычно составляют описание её отдельных элементов. В частности, для получения уравнения системы, составляют уравнения отдельных элементов. Совокупность этих уравнений и даёт уравнение системы.

Уравнения, а также структурные схемы автоматической системы называют ее математической моделью.

Математические модели описывают элементы и системы автоматического регулирования в двух режимах: установившемся – статике и переходном – динамике.

Статикой называется установившийся режим звена или системы, при котором входной и выходной сигналы звена (или системы) постоянны во времени.

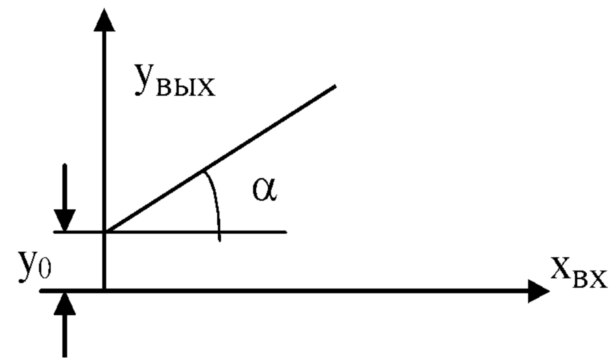
Поведение звена (системы) в статике наглядно отражается его <u>статической</u> <u>характеристикой</u>, под которой понимается зависимость между установившимися значениями выходной и входной величин.

$$y_{\text{вых. уст.}} = f(x_{\text{вх. уст.}})$$

По виду статической характеристики различают линейные и нелинейные звенья. Статическая характеристика линейного звена представляет собой уравнение прямой линии:

$$y_{вых} = kx_{вх} + y_o ,$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$



Звенья, статические характеристики которых не являются прямыми линиями, называются нелинейными.

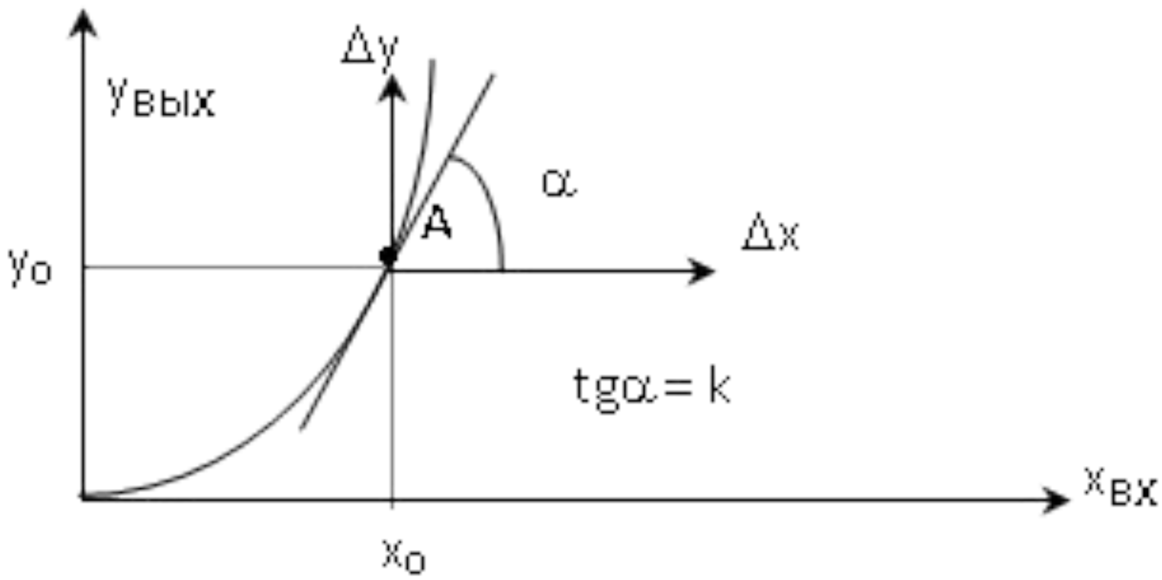
В основном все звенья в природе являются нелинейными.

Вопрос линейности статических характеристик имеет чрезвычайно важное значение. Дело в том, что в динамике САР описываются дифференциальными уравнениями. И если в САР входит нелинейное звено, дифференциальное уравнение получается нелинейным. Решение нелинейных дифференциальных уравнений – процесс трудоёмкий и сложный. Поэтому на практике нелинейные элементы заменяют их линейными моделями для облегчения их описания. Этот процесс называется линеаризацией. Итак, линеаризация нелинейного звена – замена его линейной моделью с сохранением основных свойств нелинейного звена. **Простейшими методами линеаризации являются метод касательной, метод секущей и кусочно–линейная линеаризация.**

При линеаризации касательной полагают, что в процессе работы объекта рабочая точка статической характеристики будет совершать лишь незначительные колебания вокруг номинального режима и, следовательно, характеристику можно заменить касательной к характеристике в точке А (системы стабилизации).

Для получения уравнения касательной перенесем начало координат в точку А и запишем уравнение касательной в отклонениях от точки номинального режима:

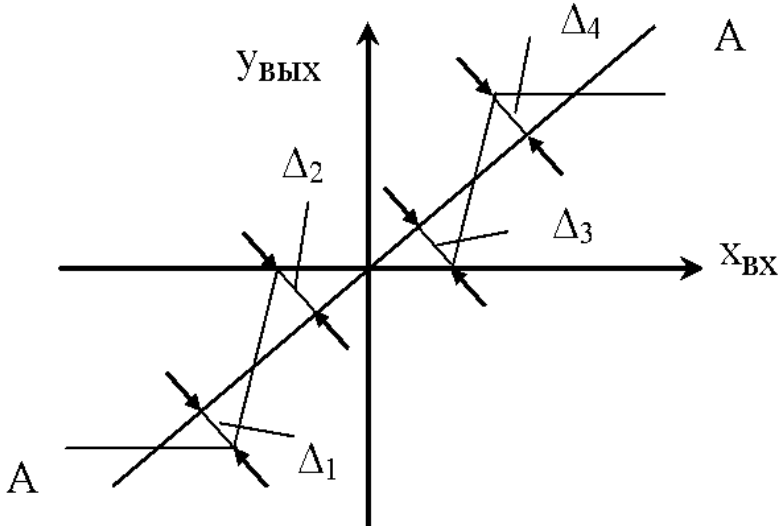
$$\Delta y = k\Delta x$$



Величина $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ - отношение выходной величины к входной – статический коэффициент передачи. Для нелинейных звеньев “*к*” – величина не постоянная и зависит от положения рабочей точки А.

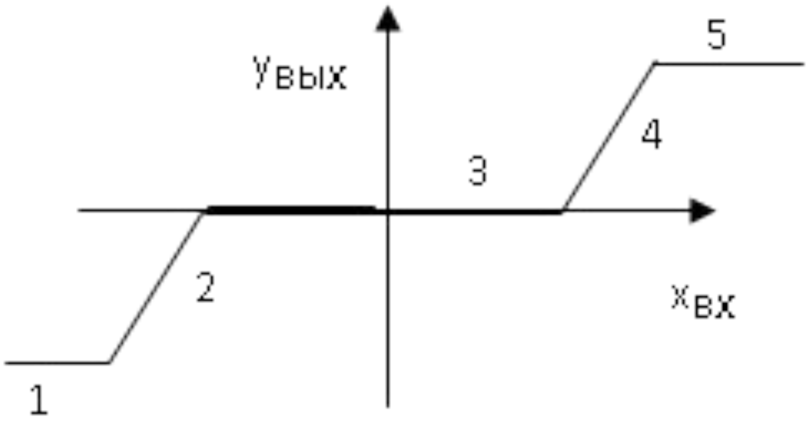
Метод секущей, может быть, применим к объектам, имеющим нелинейную статическую характеристику, кососимметричную относительно начала координат.

Характеристику такого типа можно заменить линейной секущей АА, причём провести её нужно так, чтобы ошибки $\Delta_{1,}$ $\Delta_{2,}$ $\Delta_{3,}$ Δ_{4} были минимальными.



Метод кусочно-линейной линеаризации применим для нелинейных объектов, статические характеристики которых могут быть представлены в виде отдельных отрезков прямой линии (1, 2, 3, 4, 5).

Для каждого отрезка характеристики справедливо линейное дифференциальное уравнение. Переход от одного участка к другому осуществляется «припасовыванием» отдельных решений. При этом решение для конца одного участка является начальным условием для следующего и т.д.



В статике все звенья можно разделить на два больших класса: статические и астатические. Статические звенья – звенья, поведение которых в статике описывается статической характеристикой типа $y_{вых} = kx_{вх}$

Существует большой класс звеньев, для которых статическую характеристику не удается получить, т.е. в зависимость $y_{вых} = f(x_{вх})$ входит время. Такие объекты называются астатическими. Условно в качестве статической характеристики для астатических звеньев считают зависимость: т.е. в астатических объектах каждому значению входного сигнала соответствует определенная скорость входного сигнала.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

Динамика – в общем, философском смысле слова, движение. В динамике выходная величина звена (системы) изменяется во времени вследствие изменения входной величины. Связь между входным и выходным параметрами в отдельном элементе (или системе) в динамике описывается дифференциальным уравнением. Дифференциальное уравнение аналитически выражает характер изменения во времени выходного параметра при определенном виде входного параметра.

В общем виде дифференциальное уравнение может быть записано следующим образом:

$$a_n \frac{d^n y_{вых}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_{вых}(t)}{dt} + a_0 y_{вых}(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m x_{вх}(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx_{вх}(t)}{dt} + b_0 x_{вх}(t),$$

где $m \leq n$ (условие физической реализуемости).

Решение дифференциальных уравнений высоких порядков представляет известные трудности, поэтому сделаны попытки упростить, решение дифференциальных уравнений. Для этого применяют операторный метод, основанный на преобразовании Лапласа.

Смысл преобразования Лапласа заключается в том, что функции действительного переменного x(t) ставится в соответствие функция комплексного переменного x(p), т.е.

x(t) x(p), где x(t)- оригинал; x(p)- изображение.

Операция преобразования записывается так:

L{x(t)}=x(p).

Соответствие выражается интегралом Лапласа:

$$x(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt, \quad где \quad p = \alpha + j\omega.$$

Таким образом, с помощью этого интеграла можно от функции x(t) перейти к функции (p).

Для того, чтобы записать дифференциальное уравнение в операторной форме, найдем преобразование производной:

L {x'(t)} = ?

$$L\{x'(t)\} = \int_0^{\infty} x'(t) e^{-pt} dt.$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

По формуле интегрирования по частям:

$U = e^{-pt}$; $dV = x'(t)dt$;

$dU = -pe^{-pt}dt$; $V = x(t)$,

тогда

$$\int_0^\infty x'(t)e^{-pt}dt = x(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\underbrace{\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt}_{x(p)} = px(p) - x(0),$$

где $x(0)-$ начальные условия, которые будем считать нулевыми.

При нулевых начальных условиях справедливо утверждение:

Дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на оператор **p**:

$$\frac{d}{dt} \div p$$

Это свойство Лапласа позволяет свести дифференциальное уравнение к алгебраическому и ввести понятие передаточной функции линейного элемента (системы):

$\alpha_n p^n y_{вых}(p) + \alpha_{n-1} p^{n-1} y_{вых}(p) + \ldots. + \alpha_1 p y_{вых}(p) + \alpha_0 y_{вых}(p) = b_m p^m x_{вх}(p) + \ldots. + b_1 p x_{вх}(p) + +b_0 x(p)$

Далее уравнение решается как обыкновенное алгебраическое:

$$y_{вых}(p) = \frac{(b_m p^m + \ldots. + b_1 p + b_0) x_{вх}(p)}{a_n p^n + \ldots. + a_1 p + a_0}$$

Операции нахождения оригинала выходной величины по изображению, называется обратным преобразованием Лапласа:

$$y_{вых}(t) = L^{-1}\{y_{вых}(p)\}$$

Обратное преобразование совершается с помощью следующего интеграла:

$$L^{-1}\{y_{вых}(p)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} x(p)e^{+pt}dp$$

Для облегчения задачи нахождения оригинала по изображению созданы таблицы преобразования Лапласа, позволяющие не решая интеграла, находить оригинал по изображению и обратно.

Оригинал f(t)	Изображение f(p)
$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
kt	$\frac{k}{p^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$

Отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях называется <u>передаточной функцией:</u>

$$W(p) = \frac{y_{вых}(p)}{x_{вх}(p)} = \frac{b_m p^m + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + ... + a_1 p + a_0}$$

Статистический коэффициент передачи тоже есть отношение выхода ко входу, но в установившемся режиме, т. е.

$$k = \frac{y_{вых.уст.}}{x_{вх.уст.}}$$

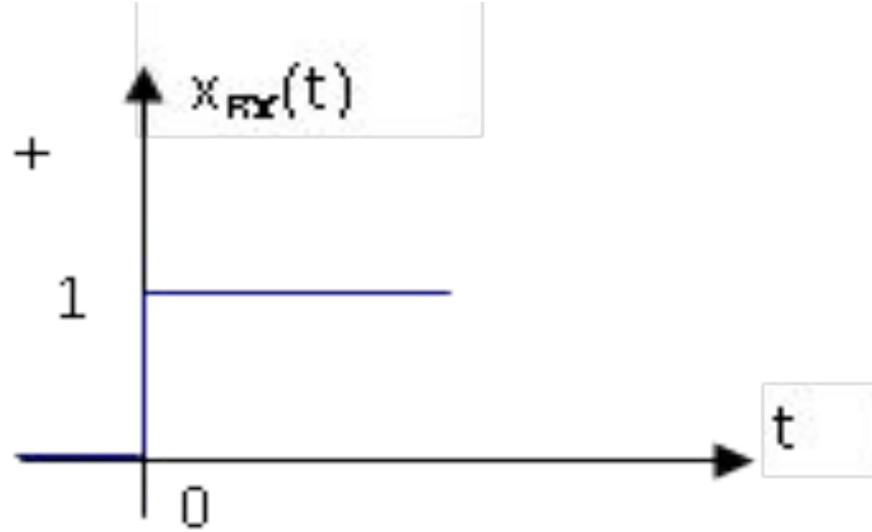
следовательно, k – частный случай W(p), т.к. в статике $\frac{d}{dt} = 0$, то и p=0, следовательно:

$$k = W(p)\Big|_{p=0}$$

Временные характеристики звена (системы) представляют собой изменение выходной величины во времени при передаче на ее вход типового апериодического воздействия. В качестве последнего используют единичное ступенчатое воздействие или единичный импульс.

При единичном ступенчатом воздействии входная величина мгновенно возрастает от 0 до 1 и далее остается неизменной, т. е.

$$1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$



Реакция звена на единичную ступенчатую функцию называется <u>переходной характеристикой</u> звена (обозначается h(t))

$$h(t) = y_{вых}(t)\Big|_{x_{вх}(t)=1(t)}$$

Очевидно h(t) представляет решение дифференциального уравнения для единичного ступенчатого входного сигнала.

Выражение для h(t) может быть получено из передаточной функции W(p).

По определению:

$$W(p)=\frac{y_{вых}(p)}{x_{вх}(p)}$$, т. е.

$$y_{вых}(p)=W(p)\cdot x_{вх}(p);$$

$$x_{вх}(t)=1(t); L\{1(t)\}=\frac{1}{p};$$

$$y_{вых}(t)=h(t); L\{h(t)\}=h(p);$$

$$\frac{h(p)}{1/p}=W(p); h(p)=W(p)\cdot\frac{1}{p}=\frac{W(p)}{p}$$

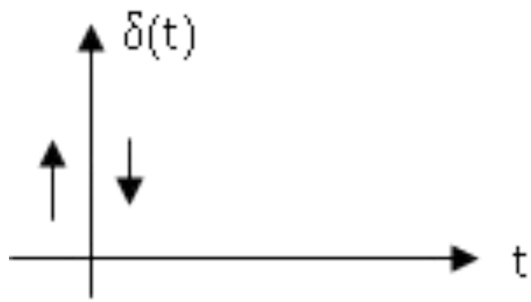
Оригинал переходной характеристики находится из таблицы:

$$h(t) = L^{-1}\{\frac{W(p)}{p}\}$$

Реакция звена на единичный импульс [δ(t) – дельта - функция] называется импульсной переходной характеристикой (весовой функцией).

Дельта – функцию [δ(t)] определяют как импульс, длительность которого равна 0, амплитуда ∞, а площадь 1, т. е. δ(t) можно определить как производную от 1(t):

$$\delta(t) = 1(t)' = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \geq 0 \end{cases}$$



Весовую функцию (обозначают ω(t)) также можно найти из передаточной функции звена (системы).

$$x_{вх}(t) = \delta(t); L\{\delta(t)\} = \delta(p) = 1;$$
$$y_{вых}(t) = \omega(t); L\{\omega(t)\} = \omega(p);$$
$$\frac{\omega(p)}{1} = W(p); \omega(p) = W(p);$$

Оригинал весовой функции находится из таблиц преобразования Лапласа:

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(p)\}$$

Частотные характеристики определяют поведение звена (системы) при подаче на его вход гармонического (синусоидального) сигнала.

Пусть $x_{вх}(t)=A_{вх}\sin\ \omega t$, где $A_{вх}=const$, ω – круговая частота входного сигнала.

На выходе звена (системы) тоже появится гармонический (синусоидальный) сигнал, амплитуда и фаза которого будут другими, зависящими от частоты входного сигнала.

$$y_{вых}(t)=A_{вых}(\omega)\sin[\omega t+\varphi_{вых}(\omega)]$$

Зависимость отношения выходного сигнала к входному от частоты входного сигнала называется комплексной передаточной функцией звена (системы).

Нас интересует одновременная зависимость 2-х величин: $A_{вых}$ и $\varphi_{вых}$, поэтому входной и выходной сигналы удобно рассматривать в комплексной плоскости, а для их описания применить аппарат теории функций комплексного переменного.

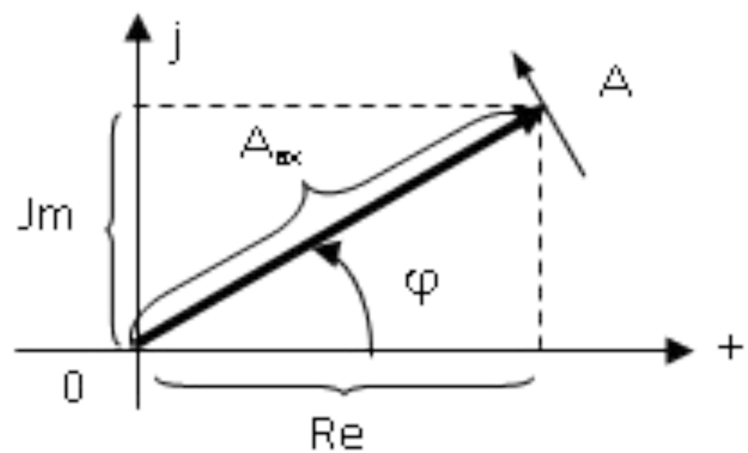
Синусоидальный входной сигнал можно изобразить вектором ОА на комплексной плоскости, вращающимся вокруг начала координат.

$x_{вх}(t)=A_{вх}\sin\omega t;$

$$\left|j=\sqrt{-1}\right|$$

$$A_{вх} = |OA| = \sqrt{Re^2 + Jm^2};$$

$$\omega t = \varphi, \quad tg\varphi = \frac{Jm}{Re}.$$



Тогда $x_{вх}(t) = Re(\omega) + jJm(\omega) = A_{вх}e^{j\omega \cdot t}$

По аналогии: $y_{вых}(t) = A_{вых}(\omega)e^{j[\omega \cdot t + \varphi_{вых}(\omega)]}$

По определению комплексная передаточная функция [K(jω)] может быть записана как

$$K(j\omega) = \frac{A_{вых}(\omega)e^{j[\omega t + \varphi_{вых}(\omega)]}}{A_{вх}e^{j\omega t}} = \frac{A_{вых}(\omega)}{A_{вх}}e^{j\varphi_{вых}(\omega)}\bigg|_{A_{вх}=1} = A_{вых}(\omega)e^{j\varphi_{вых}(\omega)}$$

Выражение K(jω) можно найти из дифференциального уравнения системы:

$x_{вх}(t) = A_{вх}\, e^{j\,\omega t}$;

$y_{вых}(t) = A_{вых}(\omega)e^{j[\omega t + \phi вых(\omega)]}$;

$$\frac{dx_{вх}(t)}{dt} = j\omega A_{вх}e^{j\omega \cdot t};$$

$$\frac{d^m x_{вх}(t)}{dt^m} = (j\omega)^m A_{вх}e^{j\omega \cdot t};$$

$$\frac{dy_{вых}(t)}{dt} = j\omega A_{вых}(\omega)e^{j[\omega t + \varphi]};$$

$$\frac{d^n y_{вых}(t)}{dt} = (j\omega)^n A_{вых}(\omega)e^{j[\omega t + \varphi]}.$$

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, найдем К(jω)

$$K(j\omega)=\frac{A_{вых}e^{j[\omega\cdot t+\varphi]}}{A_{вх}e^{j\omega\cdot t}}=\frac{b_m(j\omega)^m+\dots+b_1j\omega+b_0}{a_n(j\omega)^n+\dots+a_1j\omega+a_0}$$

Сравнив это выражение с выражением передаточной функции будем определять комплексную передаточную функцию звена (системы) из передаточной функции, заменив в ней оператор «р» на оператор «jω»,

$$K(j\omega)=W(p)\Big|_{p=j\omega}$$

Из выражения K(jω) видим, что каждой частоте ω соответствует вектор K(jω), который при изменении частоты от 0 до ∞ описывает в комплексной плоскости кривую (годограф), называемую амплитудно-фазо-частотной характеристикой звена (системы) (АФЧХ).

АФЧХ показывает одновременно, как изменяется амплитуда и фаза выходного сигнала при изменении частоты входного сигнала.

Можно построить отдельно амплитудно-частотную (АЧХ) и фазо-частотную (ФЧХ) характеристики, показывающие как изменяется амплитуда и фаза в функции от частоты (ω).