Динамика вращательного движения

Рассмотрим вначале движение материальной точки массой m, на которую действует сила $\vec{F}$; $\vec{r}$ – радиус-вектор мат. точки, проведенный из точки O (начала O), $\vec{p} \equiv m\vec{\upsilon}$ – ее импульс. Сформулируем два определения.

Моментом импульса материальной точки относительно точки *O* (начала O) называется величина

$$\vec{l} \equiv [\vec{r}, \vec{p}]. \tag{1}$$

Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки *O* (начала O) называется величина

$$\vec{M} \equiv [\vec{r}, \vec{F}]. \tag{2}$$

Определение момента силы распространяется и на случай, когда сила приложена, например, к твердому телу. Тогда под $\vec{r}$ в (2) понимается радиус вектор точки приложения силы.

Продифференцируем (1) по времени:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \tag{3}$$

Первое слагаемое в правой части (3) равно нулю, т.к. $d\vec{r}/dt$ – это скорость, сонаправленная с импульсом.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

получаем из (3)

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется **уравнением вращательного движения материальной точки**.

Моментом импульса механической системы относительно точки O (начала O) называется величина

$$\vec{L} \equiv \sum_i \vec{l}_i, \tag{5}$$

где $\vec{l}_i$ – момент импульса i-й материальной точки.

Продифференцировав (5) по времени и используя уравнение движения (4), получаем

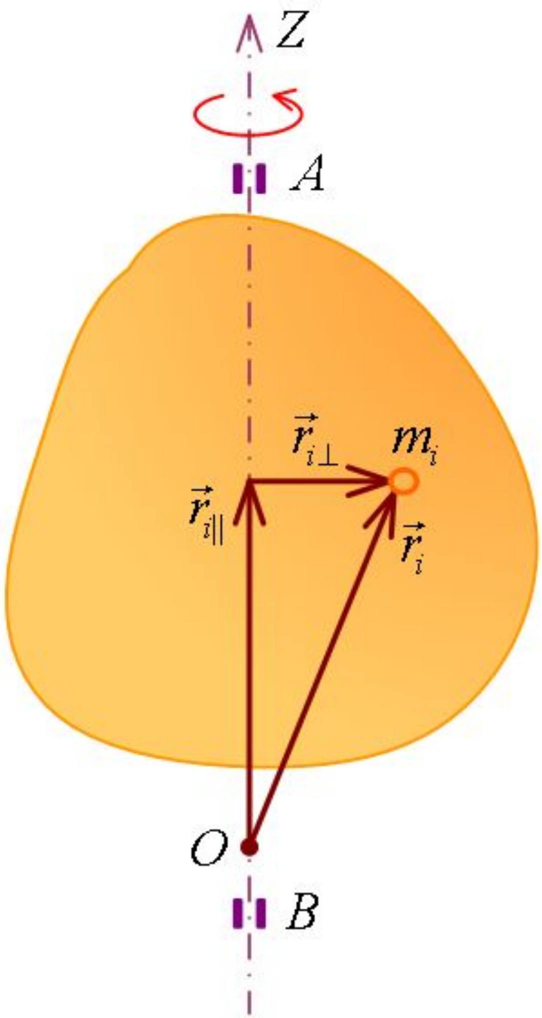
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i, \tag{6}$$

где $\vec{M}_i$ – сумма моментов внешних сил, действующих на систему.

Уравнение (6) называется **уравнением вращательного движения механической системы.** Его можно записать и в проекциях на координатные оси. Например, для оси OZ

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(ex)}.$$

На рисунке показано твердое тело с закрепленной в точках A и B осью. Тело может **только вращаться** вокруг этой оси. Начало отсчета O выбрано **на оси вращения**. С осью вращения совмещена координатная ось OZ. Угловая скорость $\vec{\omega}$ тела, она же – угловая скорость любой материальной точки, входящей в состав тела, – направлена либо по оси OZ, либо противоположно OZ.



Построим выражение для момента импульса $\vec{L}$ тела относительно начала O. Для этого определим момент импульса $\vec{l}_i$ материальной точки m_i, а затем просуммируем по i. Радиус-вектор $\vec{r}_i$ м. точки m_i представим в виде суммы

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i\|} + \vec{r}_{i\perp}. \tag{7}$$

Каждая материальная точка m_i движется по окружности, ее скорость

$$\vec{\upsilon}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}].$$

Отсюда получаем для импульса

$$\vec{p}_i = m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}].$$

Момент импульса $\vec{l}_i$ с учетом (7) запишем в виде суммы:

$$\vec{l}_i = m_i \left[\vec{r}_{i\|} [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]\right] + m_i \left[\vec{r}_{i\perp} [\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}]\right]. \tag{8}$$

Преобразуем двойное векторное произведение в (8) по известной формуле

$$[\vec{a}[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b}):$$

$$\left[\vec{r}_{i\parallel}\left[\vec{\omega},\vec{r}_{i\perp}\right]\right] = \vec{\omega}\left(\vec{r}_{i\parallel},\vec{r}_{i\perp}\right) - \vec{r}_{i\perp}\left(\vec{r}_{i\parallel},\vec{\omega}\right) = -\vec{r}_{i\perp}\left(\vec{r}_{i\parallel},\vec{\omega}\right), \tag{9}$$

$$\left[\vec{r}_{i\perp}\left[\vec{\omega},\vec{r}_{i\perp}\right]\right] = \vec{\omega}\left(\vec{r}_{i\perp},\vec{r}_{i\perp}\right) - \vec{r}_{i\perp}\left(\vec{r}_{i\perp},\vec{\omega}\right) = r_{i\perp}^2\vec{\omega}.$$

Учтем в равенстве (9)

$$\left(\vec{r}_{i\parallel},\vec{\omega}\right) = z_i\omega_z,$$

где z_i – продольная координата i-й материальной точки и представим момент импульса материальной точки $\vec{l}_i$ в виде суммы

$$\vec{l}_i = \vec{l}_{i\parallel} + \vec{l}_{i\perp}, \tag{10}$$

где

$$\vec{l}_{i\parallel} = m_i r_{i\perp}^2\vec{\omega}, \qquad \vec{l}_{i\perp} = -\omega_z z_i \vec{r}_{i\perp}.$$

Аналогично (10) запишем момент импульса тела относительно начала O:

$$\vec{L} = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}.$$

Здесь $\vec{L}_{\parallel} = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2\right)\vec{\omega}, \qquad \vec{L}_{\perp} = -\omega_z \sum_i z_i \vec{r}_{i\perp}.$

Величина

$$I \equiv \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \tag{11}$$

называется **моментом инерции тела относительно оси**.

С учетом определения (11) можно записать:

$$\vec{L}_{\parallel} = I\vec{\omega}, \tag{12}$$

или

$$L_z = I\omega_z. \tag{13}$$

Величина L_z – момент импульса тела относительно OZ.

В общем случае поперечная (по отношению к оси вращения (и оси OZ)) составляющая момента импульса $\vec{L}_{\perp}$ отлична от нуля. Однако, если ось вращения является осью симметрии однородного тела, то в этом случае

$$\vec{L}_{\perp} = 0, \quad \vec{L} = \vec{L}_{\parallel}.$$

Продифференцировав по времени (12) и (13) **получим уравнение вращательного движения твердого тела с закрепленной осью**:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\parallel}, \quad \text{где } \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

$$I\varepsilon_z = M_z,$$

где M_z – сумма моментов внешних сил относительно оси OZ. Модуль M_z

определяется как произведение величины силы $F_\perp$ на плечо:

$$|M_z| = F_\perp \cdot d,$$

а знак – по правилу:

$$M_z(\circlearrowright)<0, \qquad M_z(\circlearrowleft)>0,$$

т.е. $M_z > 0$ для силы, которая пытается вращать тело против часовой стрелки – это направление связано с направлением оси OZ **правилом буравчика**; $M_z < 0$, если наоборот.

Мы говорим “**относительно оси**”, имея в виду **ориентированную ось**, т.е. ось, на которой указано положительное направление (OZ).

Закон сохранения момента импульса: если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса системы сохраняется –

$$\vec{M}^{(ex)} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{L} = const\,.$$

$\vec{L} = const$ **при любом выборе начала** O, так как если сумма внешних сил равна нулю, то сумма моментов внешних сил не зависит от выбора начала, относительно которого вычисляются моменты.

Закон сохранения момента импульса относительно оси: если сумма моментов действующих на систему внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется.

$$M_z^{(ex)} = 0 \;\Rightarrow\; L_z = const\,.$$

Примеры вычисления моментов инерции твердых тел. Теорема Штейнера.

Рассмотрим два простых примера.

1. Пусть имеется тонкий однородный стержень длиной L и массой m. **Однородность** в данном случае означает, что масса участка стержня Δm пропорциональна длине этого участка Δl. Если ввести линейную плотность массы

$$\tau' \equiv \frac{\Delta m}{\Delta l},$$

то однородность стержня можно определить так: $\tau' = const \quad \forall \quad \Delta l.$

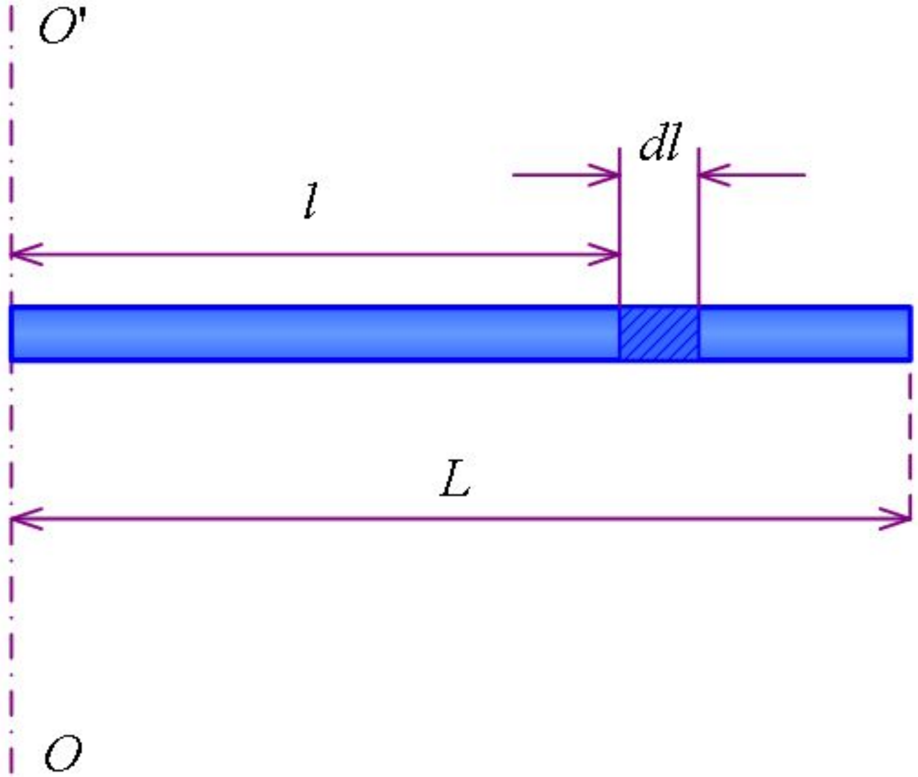
Неоднородность стержня удобнее описывать локально. Например, с помощью функции $\tau(l)$, где l – расстояние от данной точки стержня до его левого конца, а τ определить равенством:

$$\tau \equiv \frac{dm}{dl}. \tag{14}$$

По аналогии с известной вам объемной плотностью вещества ρ можно сказать так: величина τ' – средняя линейная плотность массы стержня, а τ – линейная плотность массы в точке.

Для наших целей удобнее использовать величину (14). **Однородность тонкого стержня** означает, что для всех точек стержня $l \in (0, L)$

$$\tau = const.$$



Найдем момент инерции стержня относительно оси OO', перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов. Поделим стержень на материальные точки m_i, найдем момент инерции каждой m_i относительно оси OO',

$$I_i = m_i r_{i\perp}^2,$$

а затем сложим:

$$I = \sum_i I_i.$$

Поскольку масса распределена вдоль стержня **непрерывным образом**, "размазана" по стержню, при вычислении момента инерции поступим так. Выделим бесконечно малый кусочек стержня (элемент) dl с массой dm (материальная точка). Найдем момент инерции этого элемента относительно оси,

$$dI = dm \cdot l^2,$$

и, предполагая, что момент инерции найден для каждого элемента стержня, просуммируем моменты инерции элементов. Суммирование - заменим интегрированием: $I = \int dI = \int l^2 dm.$

Эта замена обусловлена переходом от дискретного описания распределения массы к описанию непрерывному:

$$m_i \to dm, \quad r_{i\perp} \to l, \quad I_i \to dI, \quad \sum_i I_i \to \int dI.$$

Учитывая однородность стержня, запишем

$$\tau = \frac{m}{L} = const.$$

Тогда $dm = \tau dl$, $dm = \frac{m}{L} dl.$

Получаем выражение для момента инерции стержня в виде **определенного интеграла**:

$$I = \int dI = \int l^2 dm.$$

$$I = \int_0^L l^2 \frac{m}{L} dl.$$

Вычислив интеграл, получим $I = \frac{mL^2}{3}$..

Найдем момент инерции сплошного **однородного** цилиндра массы m и радиуса R относительно оси цилиндра. Пусть h – высота цилиндра. Тогда его плотность в любой точке

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h} = const.$$

Прежде всего, отметим следующее. Если имеется **тонкостенная труба** массы m' и радиуса r, момент инерции такой трубы относительно ее оси вычисляется по формуле

$$I' = m' r^2.$$

В самом деле, все материальные точки m_i, из которых состоит тонкостенная труба, находятся на одном и том же расстоянии

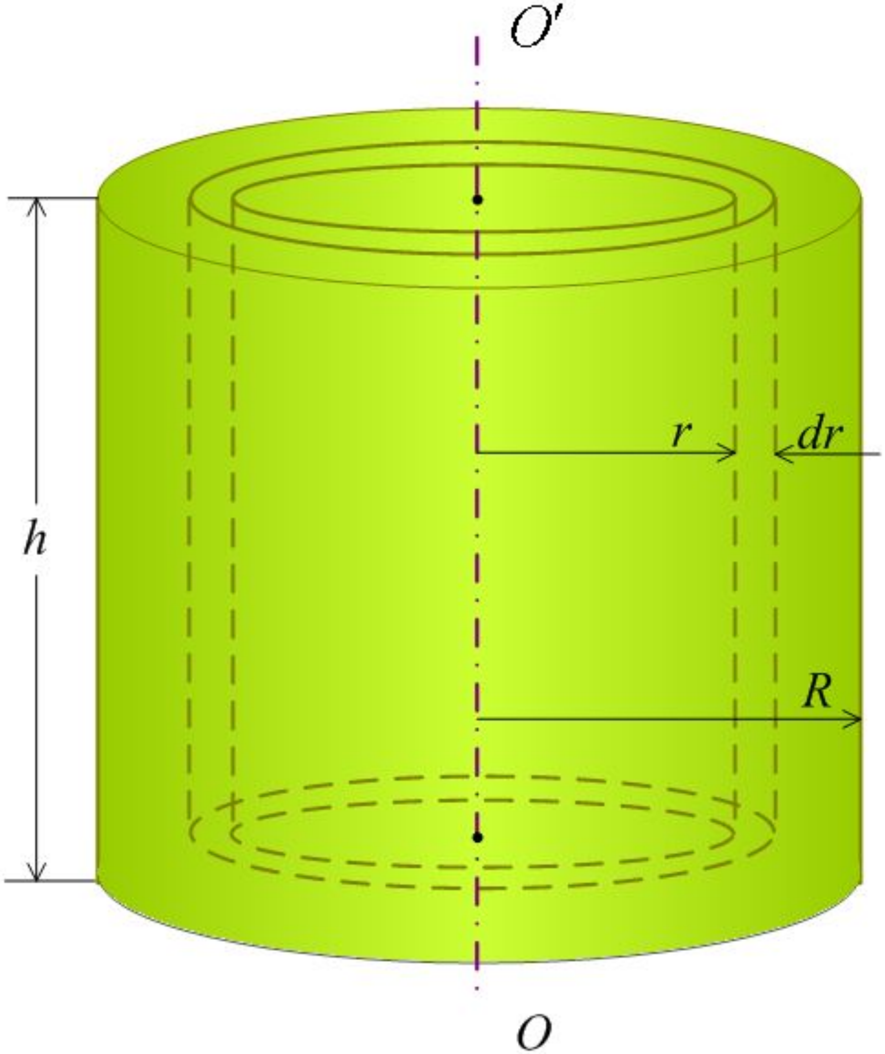
$$r_{i\perp} = r$$

от оси трубы.

Тогда

$$I' \equiv \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i r^2 = r^2 \sum_i m_i = m' r^2.$$

Воспользуемся этим результатом для вычисления момента инерции сплошного цилиндра.



Порежем цилиндр на соосные трубы с бесконечно тонкими стенками. На рисунке показаны сплошной цилиндр и одна из таких бесконечно тонких труб. Радиус трубы r, толщина стенки – dr. Масса трубы

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r\, dr \cdot h,$$

где dV – объем трубы.

Момент инерции трубы

$$dI = r^2 dm = 2\pi r^3 h\rho dr.$$

Интегрируя по r от 0 до R, получаем момент инерции цилиндра:

$$I = \int_0^R 2\pi r^3 h\rho dr = 2\pi h\rho \frac{R^4}{4}. \quad (*)$$

Подставив в (*) выражение для плотности цилиндра, найдем

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Полученный результат не зависит от высоты цилиндра, он годится для однородного диска, в том числе и сколь угодно тонкого, а в пределе – и бесконечно тонкого.

Пусть для тела массы m известен момент инерции I_0 относительно оси OO_1, проходящей через центр масс тела. Тогда момент инерции I этого тела относительно оси $O'O_1'$, параллельной OO_1, определяется по правилу

$$I = I_0 + md^2, \tag{15}$$

где d – расстояние между осями. Равенство (15) называется **теоремой Штейнера**.

Из этой теоремы, в частности следует, что для бесконечного множества параллельных осей вращения момент инерции тела **минимален** относительно той оси, которая проходит через центр масс тела. В примере, рассмотренном выше, мы нашли момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов,

$$I = \frac{mL^2}{3}, \tag{16}$$

где m – масса стержня, L – его длина.

Найдем момент инерции I_0 относительно параллельной оси, проходящей через центр масс стержня – его середину. Очевидно, расстояние между осями

$$d = L/2. \tag{17}$$

Подставим в теорему Штейнера (15) выражения (16) и (17), получаем

$$\frac{mL^2}{3} = I_0 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2. \quad \text{Откуда следует } I_0 = \frac{mL^2}{12}.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела. Работа при вращательном движении. Теорема о кинетической энергии

При вращении тела относительно некоторой оси скорости всех его материальных точек определяются равенством

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_{i\perp} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}\right], \tag{18}$$

где $\vec{\omega}$ – угловая скорость тела, а $\vec{r}_{i\perp}$ – поперечная составляющая радиуса-вектора материальной точки m_i. Начало отсчета O лежит на оси вращения, так что начало вектора $\vec{r}_{i\perp}$ также находится на оси.

Из (18) следует

$$\upsilon_i^2 = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_{i\perp}\right]^2 = \omega^2 r_{i\perp}^2. \tag{19}$$

Подставляя выражение (19) в определение кинетической энергии

$$K \equiv \sum_i \frac{m_i \upsilon_i^2}{2},$$

получаем

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2} \omega^2 r_{i\perp}^2 = \left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2 \right) \cdot \frac{\omega^2}{2}. \tag{20}$$

Сумма в скобках в (20) – это момент инерции тела I относительно оси. Поэтому **для вращающегося тела** окончательно имеем

$$K = \frac{I\omega^2}{2}.$$

В общем случае кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в виде суммы

$$K = K_{\text{пост}} + K_{\text{вр}}.$$

Здесь $K_{\text{пост}} = \dfrac{m\upsilon_c^2}{2}$ – **кинетическая энергия поступательного движения тела**, m – масса тела, $\vec{\upsilon}_c$ – скорость его центра масс; $K_{\text{вр}} = \dfrac{I_0\omega^2}{2}$ - **кинетическая энергия вращения тела относительно оси, проходящей через центр масс**. Величина $K_{\text{вр}}$ вычисляется в инерциальной CO, относительно которой центр масс тела **в данный момент времени** покоится.

Рассмотрим работу **внешней** силы $\vec{F}$, действующей на **твердое тело, вращающееся вокруг закрепленной оси**. Тело – набор материальных точек, и сила $\vec{F}$ оказывается приложенной к какой-то материальной точке.

Элементарная работа силы $\vec{F}$, по определению,

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r},$$

где $d\vec{r}$ – бесконечно малое перемещение этой материальной точки.

При вращательном движении $d\vec{r} = d\vec{r}_\perp = \left[\overrightarrow{d\boldsymbol{\varphi}}, \vec{r}_\perp\right]$, где $\overrightarrow{d\boldsymbol{\varphi}}$, – вектор бесконечно малого поворота **тела** (и любой точки тела).

Представим силу в виде суммы

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp},$$

перепишем выражение для элементарной работы:

$$\delta A = \vec{F}_{\parallel} d\vec{r}_{\perp} + \vec{F}_{\perp} d\vec{r}_{\perp}. \tag{21}$$

Первое слагаемое в правой части (21) равно нулю. Тогда

$$\delta A = \vec{F}_{\perp} d\vec{r}_{\perp} = \vec{F}_{\perp} \left[\overrightarrow{d\boldsymbol{\varphi}}, \vec{r}_{\perp} \right]$$

Используя циклическую перестановку в смешанном произведении, получаем

$$\delta A = \overrightarrow{d\boldsymbol{\varphi}} \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{F}_{\perp} \right] = \vec{M}_{\parallel} \overrightarrow{d\boldsymbol{\varphi}}. \tag{22}$$

Здесь $\vec{M}_{\parallel}$ – продольная составляющая вектора момента силы $\vec{F}$ относительно начала O, расположенного на оси вращения.

Введем ось OZ, совместив ее с осью вращения. Тогда

$$\overrightarrow{d\boldsymbol{\varphi}} = \vec{k} d\boldsymbol{\varphi}, \quad \vec{M}_{\parallel} = M_z \cdot \vec{k},$$

где $\vec{k}$ – орт оси OZ. Очевидно, (22) можно переписать в виде

$$\delta A = M_z d\varphi. \tag{23}$$

Выражение (23) – работа силы $\vec{F}$ при бесконечно малом повороте. Если $\vec{F}$ – сумма сил, приложенных в одной точке тела, то M_z в (23) – сумма моментов этих сил относительно оси OZ.

Работа силы $\vec{F}$ при повороте тела на конечный угол вычисляется по формуле

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z(\boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{\varphi}.$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}$ – угловая координата какой-либо помеченной материальной точки тела, φ_1 и φ_2 – начальное и конечное значение координаты этой точки; момент M_z силы $\vec{F}$ относительно оси считается функцией $\boldsymbol{\varphi}$.

Если сила $\vec{F}$ приложена все время к определенной материальной точке тела, то именно эту точку и следует пометить. Если – нет, то метка ставится в соответствии с соображениями удобства или наглядности.

Теорема о кинетической энергии, таким образом, приобретает вид

$$dK = M_z^{(ex)} d\boldsymbol{\varphi}$$

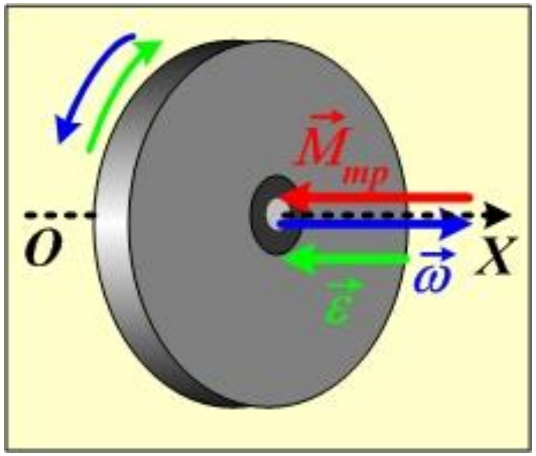
и, соответственно, для поворотов на конечные углы

$$\Delta K = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^{(ex)} d\boldsymbol{\varphi}.$$

Здесь $M_z^{(ex)} = M_z^{(ex)}(\boldsymbol{\varphi})$, величины $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2$ относятся, как обсуждалось выше, к помеченной точке твердого тела.

1. Маховое колесо, момент инерции которого $I = 245$ кг·м^2, вращается с частотой $\nu = 20$ об/с. Через время $t = 1$ мин после того, как на колесо перестал действовать момент сил $\boldsymbol{M}$, оно остановилось. Найти момент сил трения $\boldsymbol{M}_{тр}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском.

Решение



Дано:
$I = 245$ *кг·м²*
$\nu = 20$ об/с
$t = 1$ *мин*

$M_{тр}$ - ?
N - ?

Запишем уравнение основного закона динамики вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{тр}.$$

В проекциях на ось OX:

$$I\varepsilon_x = -M_{тр}.$$

Отсюда проекция вектора углового ускорения на ось OX:

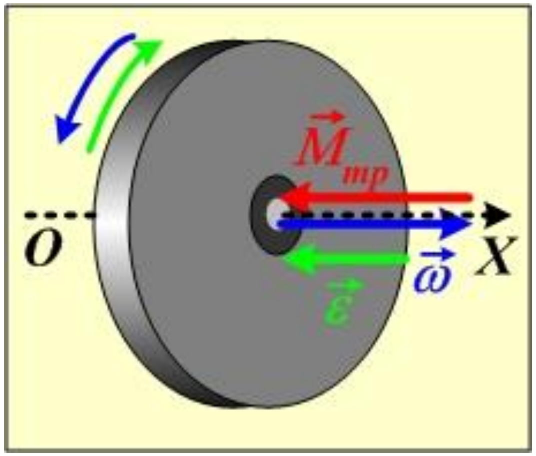
$$\varepsilon_x = -\frac{M_{тр}}{I}.$$

Величина углового ускорения постоянна, векторы углового ускорения и угловой скорости направлены противоположно. Проекция угловой скорости колеса на ось OX:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

1. Маховое колесо, момент инерции которого I = 245 кг·м^2, вращается с частотой ν = 20 об/с. Через время t = 1 мин после того, как на колесо перестал действовать момент сил $\boldsymbol{M}$, оно остановилось. Найти момент сил трения $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{тр}}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском.

<u>Решение (продолжение)</u>



Колесо остановится, поэтому $\omega_0 - \varepsilon t = 0.$

Величина (модуль) вектора углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t}, \qquad \omega_0 = 2\pi\nu, \qquad \varepsilon = \frac{2\pi\nu}{t}.$$

$$I\varepsilon = -M_{тр}.$$

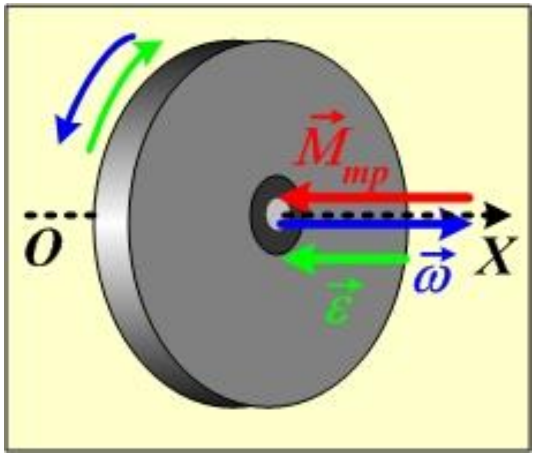
Для модулей векторов:

$$M_{тр} = I\varepsilon = I\frac{2\pi\nu}{t}.$$

$$M_{тр} = I\frac{2\pi\nu}{t} = 245\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 20}{60} \approx 513(\quad\cdot\quad).$$

1. Маховое колесо, момент инерции которого $I = 245$ кг·м^2, вращается с частотой $\nu = 20$ об/с. Через время $t = 1$ мин после того, как на колесо перестал действовать момент сил $\boldsymbol{M}$, оно остановилось. Найти момент сил трения $\boldsymbol{M}_{mp}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском.

Решение (продолжение)



Величина углового перемещения колеса изменяется как

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Из двух кинематических уравнений движения получаем систему уравнений:

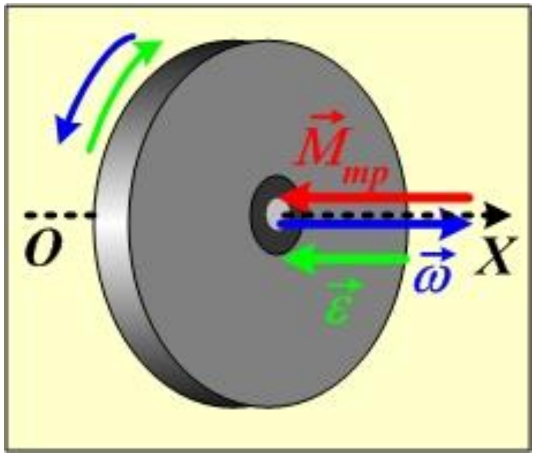
$$\begin{cases} \varphi = \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2}, \\ \omega_0 - \varepsilon t = 0. \end{cases}$$

Величину углового ускорения ε получим из второго уравнения и подставим в первое:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t}, \qquad \varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \omega_0 t - \frac{\omega_0 t^2}{2t} = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

$$\varphi = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

1. Маховое колесо, момент инерции которого $I = 245$ кг·м^2, вращается с частотой $\nu =$ 20 об/с. Через время $t = 1$ мин после того, как на колесо перестал действовать момент сил $\boldsymbol{M}$, оно остановилось. Найти момент сил трения $\boldsymbol{M}_{тр}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском.



Решение (продолжение)

$$\varphi = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

Величину углового перемещения φ выразим через число оборотов, сделанных до остановки, а начальную угловую скорость – через начальную частоту вращения:

$$\varphi = 2\pi N, \qquad \omega_0 = 2\pi\nu.$$

После подстановки получим:

$$2\pi N = \frac{2\pi\nu t}{2}.$$

Отсюда полное число оборотов колеса до остановки:

$$N = \frac{\nu t}{2} = \frac{20\cdot 60}{2} = 600.$$

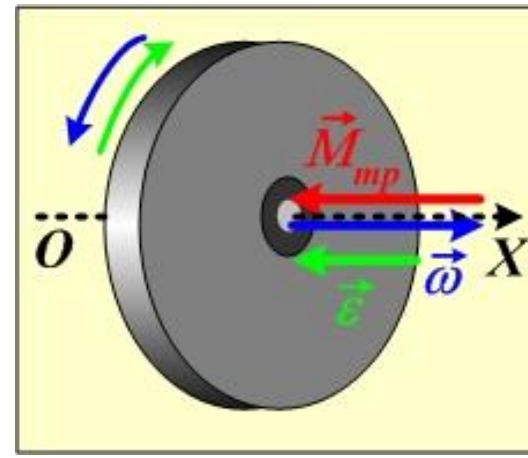
Ответ: *$M_{тр}$ = 513 Н·м, N = 600.*

5. Маховое колесо, момент инерции которого I = 245 кг·м^2, вращается с частотой ν = 20 об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав N = 1000 об. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающегося момента до остановки колеса.

Решение

Дано:
$I = 245$ *кг·м*^{2}
$\nu = 20$ об/*с*
$N = 1000$

$M_{тр}$ - ?
t - ?



Запишем уравнение основного закона динамики вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{тр}.$$

В проекциях на ось OX:

$$I\varepsilon_x = -M_{тр} \quad .$$

Отсюда проекция вектора углового ускорения на ось OX:

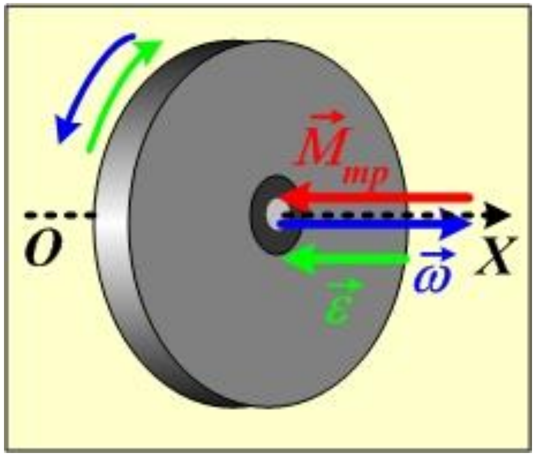
$$\varepsilon_x = -\frac{M_{тр}}{I}.$$

Величина углового ускорения постоянна, векторы углового ускорения и угловой скорости направлены противоположно. Угловое перемещение колеса

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

5. Маховое колесо, момент инерции которого I = 245 кг·м^2, вращается с частотой ν = 20 об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав N = 1000 об. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающегося момента до остановки колеса.

Решение (продолжение)



Величина угловой скорости колеса изменяется как

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

Колесо остановится, поэтому

$$\omega_0 - \varepsilon t = 0.$$

Из двух кинематических уравнений движения получаем систему уравнений:

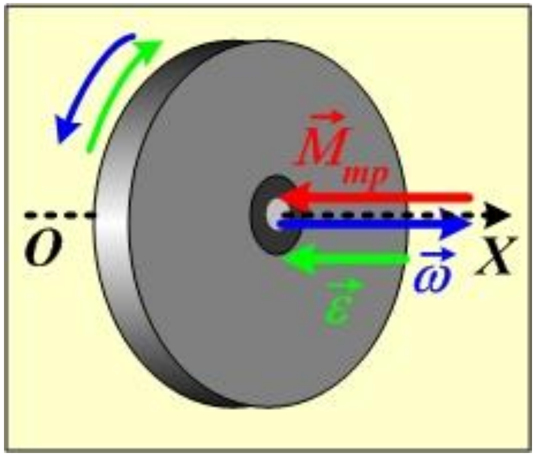
$$\left[\begin{array}{l} \varphi = \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2}, \\ \omega_0 - \varepsilon t = 0. \end{array}\right.$$

Величину углового ускорения ε получим из второго уравнения и подставим в первое:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t}, \qquad \varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \omega_0 t - \frac{\omega_0 t^2}{2t} = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

5. Маховое колесо, момент инерции которого I = 245 кг·м^2, вращается с частотой ν = 20 об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав N = 1000 об. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающегося момента до остановки колеса.

Решение (продолжение)



$$\varphi = \frac{\omega_0 t}{2}.$$

Величину углового перемещения φ выразим через число оборотов, сделанных до остановки, а начальную угловую скорость – через начальную частоту вращения:

$$\varphi = 2\pi N, \qquad \omega_0 = 2\pi\nu.$$

После подстановки получим:

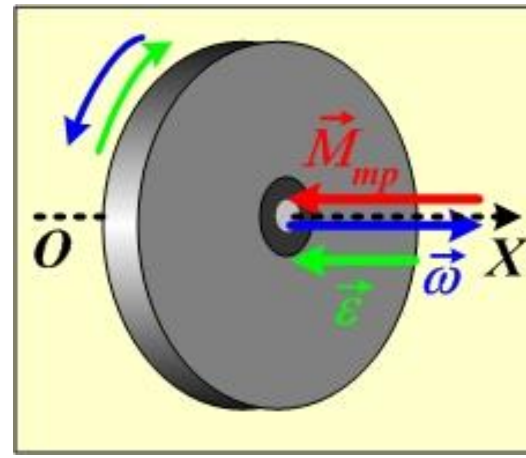
$$2\pi N = \frac{2\pi\nu t}{2}.$$

Откуда время движения до остановки:

$$t = \frac{2N}{\nu} = \frac{2\cdot 1000}{20} = 100\,(c).$$

5. Маховое колесо, момент инерции которого I = 245 кг·м^2, вращается с частотой ν = 20 об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав N = 1000 об. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающегося момента до остановки колеса.

Решение (продолжение)



Теперь вернёмся к динамическому уравнению движения и найдём величину момента сил трения. Для проекций на ось OX:

$$I\varepsilon_{x\,\text{тр}} = -M \quad .$$

Величина момента сил трения

$$\left|M_{\text{тр}}\right| = I\left|\varepsilon_x\right|.$$

Или, для краткости,

$$M_{\text{тр}} = I\varepsilon.$$

Как было получено ранее,

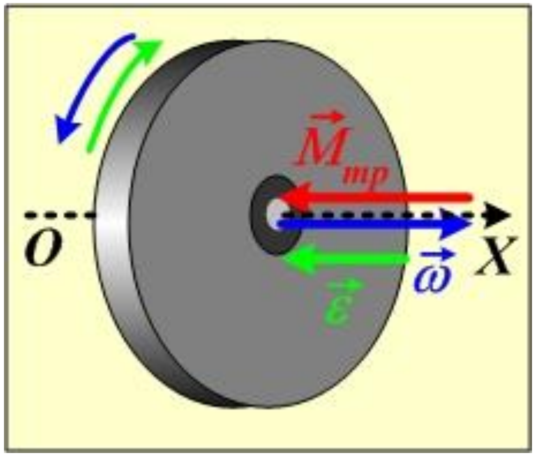
$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t}, \quad t = \frac{2N}{\nu}.$$

Теперь

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{\omega_0 \nu}{2N} = \frac{2\pi\nu \cdot \nu}{2N} = \frac{\pi\nu^2}{N}.$$

5. Маховое колесо, момент инерции которого I = 245 кг·м^2, вращается с частотой ν = 20 об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав N = 1000 об. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающегося момента до остановки колеса.

<u>Решение (продолжение)</u>



$$\varepsilon = \frac{\pi\nu^2}{N},$$

$$M_{тр} = I\varepsilon,$$

$$M_{тр} = I\frac{\pi\nu^2}{N} = 245\frac{3,14\cdot 400}{1000} \approx 308(\quad\cdot\quad).$$

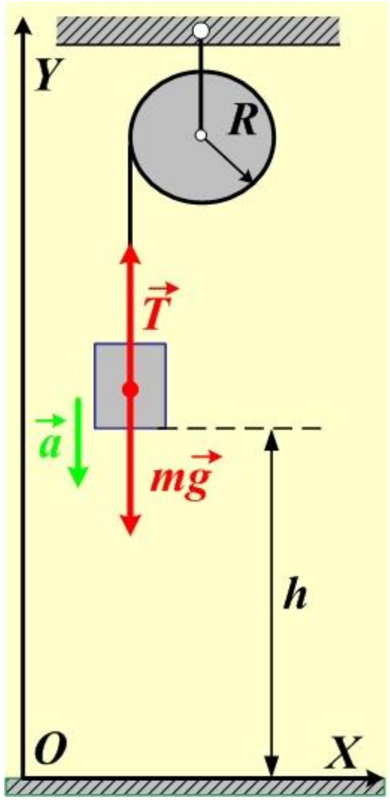
<u>Ответ:</u> *t = 100 с; $M_{тр}$ = 308 Н·м.*

2. На барабан радиусом R = 20 см, момент инерции которого $I = 0{,}1$ кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом h_0 = 1 м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $E_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

Решение

Дано:
m = 0,5 кг
I = 0,1 кг·м²
R = 20 см
h_0 = 1 м

t - ?
$E_к$ - ?
T - ?



Прежде всего, запишем динамическое уравнение движения груза. Из второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Для проекций на ось OY:

$$ma_y = -mg + T.$$

Если учесть, что груз опускается, то

$$-ma = -mg + T,$$

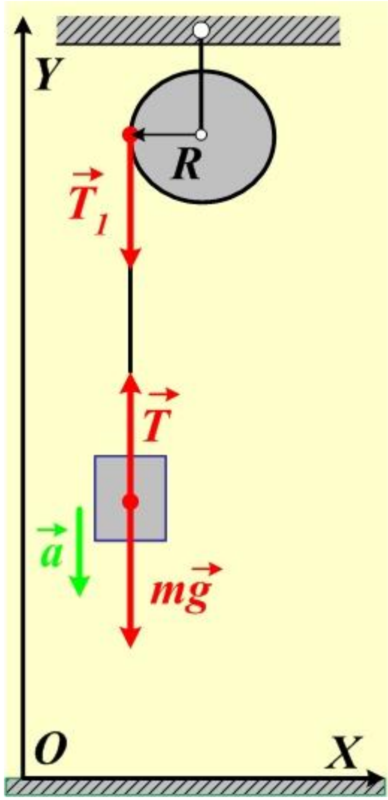
где a - величина (модуль) проекции ускорения на ось OY.

$a = const.$, начальная скорость груза равна нулю, следовательно кинематическое уравнение движения можно записать так:

$$y = h - \frac{at^2}{2}.$$

2. На барабан радиусом R = 20 см, момент инерции которого I = 0,1 кг · м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом h_0 = 1 м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $E_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

Решение (продолжение)



Через время *t* груз окажется на земле (*y = 0*), поэтому

$$y = h - \frac{at^2}{2} = 0, \qquad h = \frac{at^2}{2}, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Величину ускорения можно определить из уравнения второго закона Ньютона

$$-ma = -mg + T,$$

но для этого нужно знать величину силы натяжения нити *T*.

Запишем уравнение основного закона динамики вращательного движения для барабана:

$$I\vec{\varepsilon} = \left[\vec{T}_1, \vec{R}\right].$$

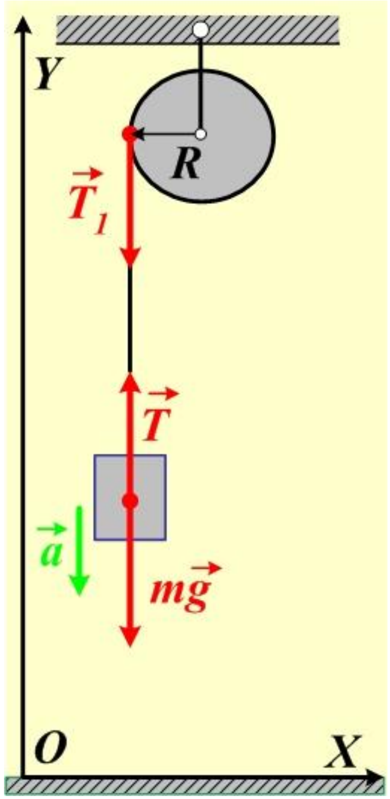
В проекциях на ось OZ, перпендикулярную плоскости рисунка:

$$I\varepsilon = T_1 \cdot R.$$

Из третьего закона Ньютона

$$\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{T}_1\right| = T.$$

2. На барабан радиусом R = 20 см, момент инерции которого I = 0,1 кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом h_0 = 1 м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $E_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.



Решение (продолжение)

$$I\varepsilon = T_1 \cdot R,$$

$$I\varepsilon = TR.$$

Величину углового ускорения ε можно выразить через величину линейного ускорения *a:*

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Теперь можно записать систему уравнений, из которой можно определить *a* и *T*:

$$\begin{cases} I\dfrac{a}{R} = TR, \\ ma = mg - T. \end{cases}$$

$$a = \frac{TR^2}{I}, \qquad m\frac{TR^2}{I} = mg - T, \qquad T\left(\frac{mR^2}{I} + 1\right) = mg,$$

$$T = mg\frac{I}{I + mR^2}.$$

2. На барабан радиусом R = 20 см, момент инерции которого I = 0,1 кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом h_0 = 1 м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $E_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

Решение (продолжение)

$$T = mg\frac{I}{I + mR^2} = 0,5 \cdot 9,8\frac{0,1}{0,1 + 0,5 \cdot 0,2^2} \approx 4,1(H)$$

Найдём величину линейного ускорения *a:*

$$a = \frac{TR^2}{I} = \frac{R^2}{I}mg\frac{I}{I + mR^2} = \frac{mR^2}{I + mR^2}g.$$

Подставим выражение для *a* в формулу для времени движения груза:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g} \cdot \frac{I + mR^2}{mR^2}}.$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g} \cdot \frac{I + mR^2}{mR^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9,8} \cdot \frac{0,1 + 0,5 \cdot 0,2^2}{0,5 \cdot 0,2^2}} \approx 1,1(c).$$

2. На барабан радиусом R = 20 см, момент инерции которого I = 0,1 кг · м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом h_0 = 1 м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $E_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

<u>Решение (продолжение)</u>

Кинетическая энергия груза

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

Скорость груза

$$v = at,$$

где

$$a = \frac{mR^2}{I + mR^2} g, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g} \cdot \frac{I + mR^2}{mR^2}}.$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{ma^2t^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{mR^2}{I + mR^2} g\right)^2 \cdot \frac{2h}{g} \cdot \frac{I + mR^2}{mR^2} = mgh\frac{mR^2}{I + mR^2}.$$

$$E_k = mgh\frac{mR^2}{I + mR^2} = 0,5 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot \frac{0,5 \cdot 0,2^2}{0,1 + 0,5 \cdot 0,2^2} \approx 0,82(\text{Дж}).$$

<u>Ответ:</u> *t = 1,1 с;* E_k *= 0,82 Дж; T = 4,1 Н.*

3. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого I = 50 кг·м^2 и радиус R = 20 см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр}$ = 98,1 Н·м. Найти разность сил натяжения нити $T_2 - T_1$ по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с угловым ускорением ε = 2,36 рад/с^2. Блок считать однородным диском.

Дано:
$M_{тр}$ = 98,1 Н·м
I = 50 кг·м^2
R = 20 см
ε = 2,36 рад/с^2

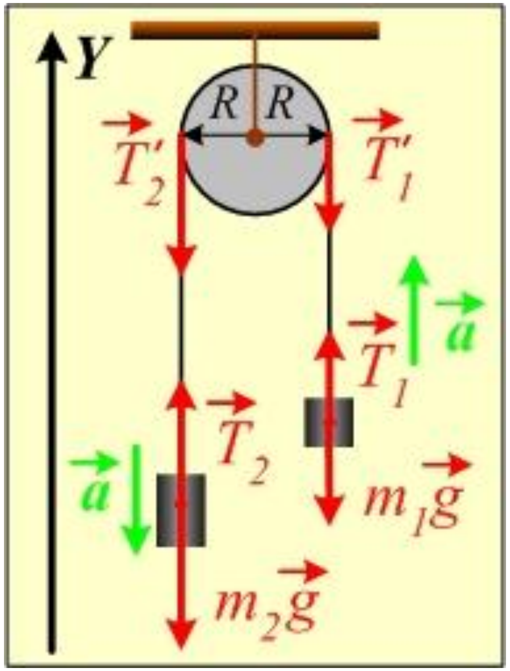
$T_2 - T_1$ - ?

Решение

Вращательное движение блока описывается основным законом динамики вращательного движения.

Запишем для блока:

$$I\vec{\varepsilon} = \left[\vec{T}_1', \vec{R}\right] + \left[\vec{T}_2', \vec{R}\right] + \vec{M}_{тр}.$$



Для проекций на ось OZ, направленную перпендикулярно плоскости рисунка.

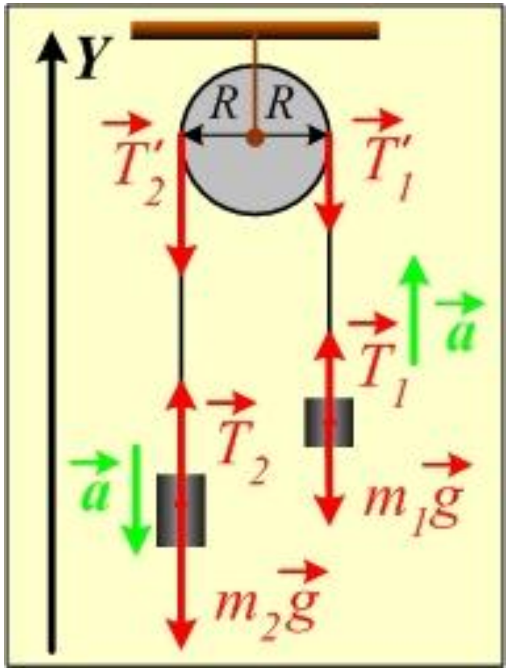
$$I\varepsilon = -T_1'R + T_2'R - M_{тр}.$$

Согласно третьему закону Ньютона

$$\left|\vec{T}_1'\right| = \left|\vec{T}_1\right|, \qquad \left|\vec{T}_2'\right| = \left|\vec{T}_2\right|, \qquad \left|\vec{T}_2\right| \neq \left|\vec{T}_1\right|.$$

$$I\varepsilon = \left(T_2 - T_1\right)R - M_{тр}.$$

3. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого I = 50 кг·м^2 и радиус R = 20 см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр}$ = 98,1 Н·м. Найти разность сил натяжения нити $T_1 - T_2$ по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с угловым ускорением ε = 2,36 рад/с^2. Блок считать однородным диском.



Решение (продолжение)

$$I\varepsilon = (T_2 - T_1)R - M_{тр}.$$

Из этого уравнения получаем:

$$(T_2 - T_1) = \frac{I\varepsilon + M_{тр}}{R}.$$

$$(T_2 - T_1) = \frac{50 \cdot 2,34 + 98,1}{0,2} \approx 1080(H).$$

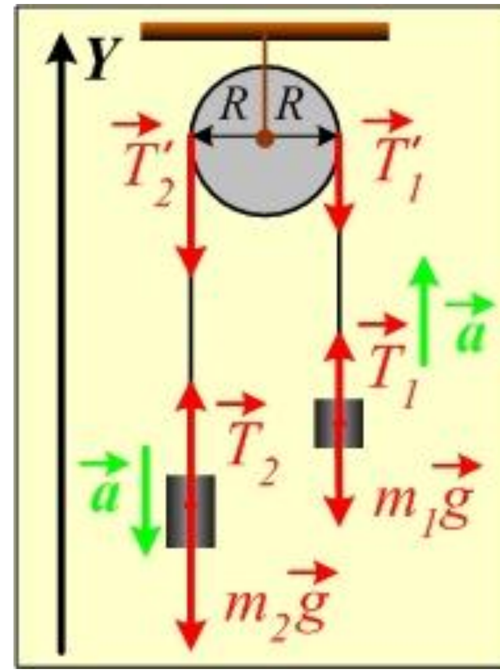
Ответ: *$T_2 - T_{21}$ =1,08 кН.*

3А. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого I = 50 кг·м^2 и радиус R = 20 см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр}$ = 98,1 Н·м. Найти разность сил натяжения нити $T_2 - T_1$ по обе стороны блока, если известно, что массы гирь m_1 = 1 кг, m_2 = 1,5 кг. Блок считать однородным диском.

Дано:
$M_{тр}$ = 98,1 Н·м
I = 50 кг·м^2
R = 20 см
m_1 = 1 кг
m_2 = 1,5 кг

$T_2 - T_1$ - ?

Решение



Поступательное движение гирь описывается вторым законом Ньютона, а вращательное движение блока – основным законом динамики вращательного движения.

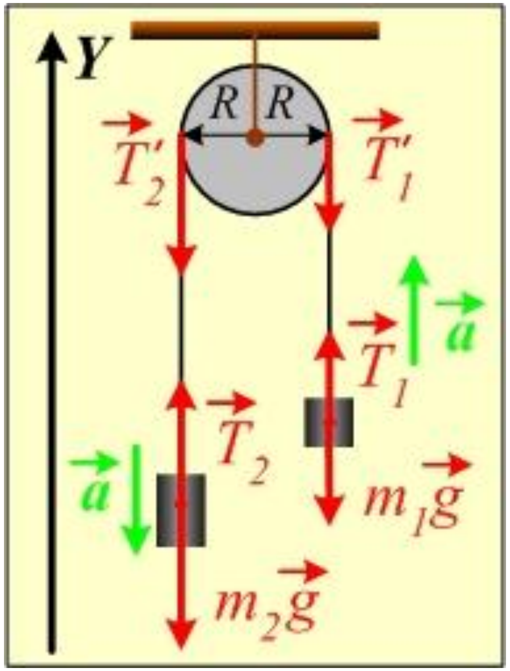
Запишем для гирь и блока:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1. \\ m_2\vec{a}_1 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2. \\ I\vec{\varepsilon} = \left[\vec{T}'_1, \vec{R}\right] + \left[\vec{T}'_2, \vec{R}\right] + \vec{M}_{тр}. \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений. Для этого первое и второе уравнения запишем для проекций на вертикальную ось OY, а третье – для проекций на ось OZ, направленную перпендикулярно плоскости рисунка.

3А. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого I = 50 кг·м^2 и радиус R = 20 см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр}$ = 98,1 Н·м. Найти разность сил натяжения нити $T_2 - T_1$ по обе стороны блока, если известно, что массы гирь m_1 = 1 кг, m_2 = 1,5 кг. Блок считать однородным диском.

Решение (продолжение)



$$\left[\begin{aligned} m_1 a_1 &= -m_1 g + T_1, \\ -m_2 a_1 &= -m_2 g + T_2, \\ I\varepsilon &= -T_1' R + T_2' R - M_{тр}. \end{aligned}\right.$$

Согласно третьему закону Ньютона

$$\left|\vec{T}_1'\right| = \left|\vec{T}_1\right|, \qquad \left|\vec{T}_2'\right| = \left|\vec{T}_2\right|, \qquad \left|\vec{T}_2\right| \neq \left|\vec{T}_1\right|.$$

Нить нерастяжима, поэтому $\left|\vec{a}_2\right| = \left|\vec{a}_1\right| = a.$

Величину углового ускорения ε можно выразить через величину линейного ускорения *a:*

$$\varepsilon = \frac{a}{R}.$$

3А. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого I = 50 кг·м^2 и радиус R = 20 см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр}$ = 98,1 Н·м. Найти разность сил натяжения нити $T_2 - T_1$ по обе стороны блока, если известно, что массы гирь m_1 = 1 кг, m_2 = 1,5 кг. Блок считать однородным диском.

<u>Решение (продолжение)</u>

Система уравнений приобретает вид:

$$\left[\begin{array}{l} m_1 a = -m_1 g + T_1, \\ -m_2 a = -m_2 g + T_2, \\ I\dfrac{a}{R} = T_2 R - T_1 R - M_{тр}. \end{array}\right.$$

Вычтем из второго уравнения первое и выполним элементарные преобразования в третьем:

$$\left[\begin{array}{l} -(m_1 + m_2)a = (-m_2 + m_1)g + (T_2 - T_1), \\ I\dfrac{a}{R} = (T_2 - T_1)R - M_{тр}. \end{array}\right.$$

3А. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого I = 50 кг·м^2 и радиус R = 20 см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр}$ = 98,1 Н·м. Найти разность сил натяжения нити $T_2 - T_1$ по обе стороны блока, если известно, что массы гирь m_1 = 1 кг, m_2 = 1,5 кг. Блок считать однородным диском.

Решение (продолжение)

$$\left[\begin{array}{l}(m_1+m_2)a=(m_2-m_1)g-(T_2-T_1),\\ I\dfrac{a}{R}=(T_2-T_1)R-M_{тр}.\end{array}\right.$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{(m_1+m_2)R}{I}=\frac{(m_2-m_1)g-(T_2-T_1)}{(T_2-T_1)R-M_{тр}},$$

$$(m_1+m_2)\left[(T_2-T_1)R-M_{тр}\right]R=I\left[(m_2-m_1)g-(T_2-T_1)\right],$$

$$(m_1+m_2)(T_2-T_1)R^2-(m_1+m_2)M_{тр}R=I(m_2-m_1)g-I(T_2-T_1),$$

3А. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого I = 50 кг·м^2 и радиус R = 20 см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр}$ = 98,1 Н·м. Найти разность сил натяжения нити $T_2 – T_1$ по обе стороны блока, если известно, что массы гирь m_1 = 1 кг, m_2 = 1,5 кг. Блок считать однородным диском.

Решение (продолжение)

$$(m_1+m_2)(T_2-T_1)R^2-(m_1+m_2)M_{тр}R=I(m_2-m_1)g-I(T_2-T_1),$$

$$(T_2-T_1)\left[I+(m_1+m_2)R^2\right]=(m_1+m_2)M_{тр}R+Ig(m_2-m_1),$$

$$(T_2-T_1)=\frac{(m_1+m_2)M_{тр}R+Ig(m_2-m_1)}{I+(m_1+m_2)R^2}.$$

$$(T_2-T_1)=\frac{(1+1,5)\cdot 98,1\cdot 0,2+50\cdot 9,81(1,5-1)}{50+(1+1,5)0,2^2}\approx 5,9(H).$$

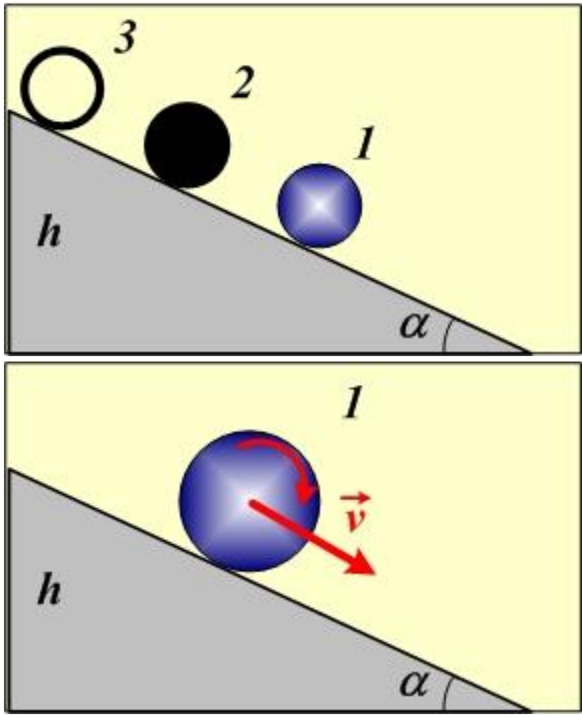
4. Найти линейные скорости υ движения центров шара, диска и обруча, скатывающихся без проскальзывания с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости h = 0,5 м, начальная скорость всех тел $\upsilon_0 = 0$. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение

Дано:
$h = 0,5$ м
$\upsilon_0 = 0$

v - ?

Задачу решим с помощью закона сохранения энергии. Любое из трёх перечисленных в условии тел участвует в двух движениях – поступательном с скоростью v и вращательном вокруг своего центра масс. Поэтому кинетическая энергия тела складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения.



В системе действуют только консервативные силы (трения нет), поэтому изменение полной механической энергии равно нулю.

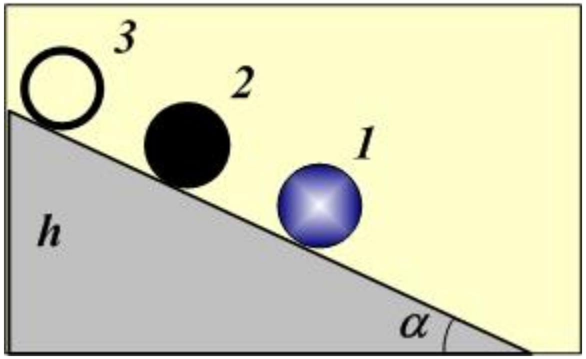
$$\Delta E = 0.$$

$$\Delta E_k + \Delta U = 0.$$

$$\Delta E_k^{пост} + \Delta E_k^{вращ} + \Delta U = 0.$$

4. Найти линейные скорости υ движения центров шара, диска и обруча, скатывающихся без проскальзывания с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости h = 0,5 м, начальная скорость всех тел $\upsilon_0 = 0$. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение (продолжение)



$$\Delta E_k^{пост} + \Delta E_k^{вращ} + \Delta U = 0.$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -mgh,$$

потенциальная энергия тела в поле силы тяжести уменьшилась.

$$\Delta E_k^{пост} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

кинетическая энергия поступательного движения тела увеличилась.

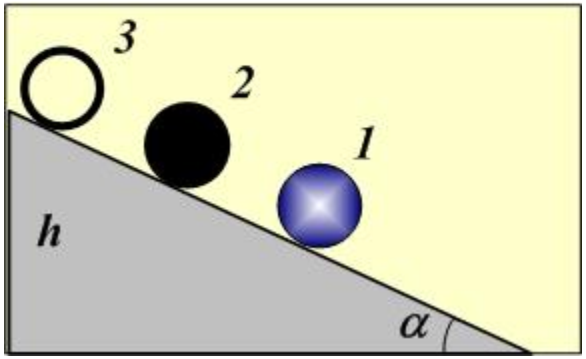
$$\Delta E_k^{вращ} = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2},$$

кинетическая энергия вращательного движения тела увеличилась. Здесь ω - угловая скорость вращения тела.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mgh = 0.$$

4. Найти линейные скорости υ движения центров шара, диска и обруча, скатывающихся без проскальзывания с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости h = 0,5 м, начальная скорость всех тел $\upsilon_0 = 0$. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение (продолжение)



$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mgh = 0.$$

Любое из тел катится без проскальзывания, поэтому

$$\omega = \frac{v}{R}.$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2R^2} = mgh. \qquad \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = mgh.$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{R^2}}}.$$

По этой общей формуле можно найти скорость любого из трёх тел, для этого достаточно подставить выражение для момента инерции соответствующего тела.

4. Найти линейные скорости υ движения центров шара, диска и обруча, скатывающихся без проскальзывания с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости h = 0,5 м, начальная скорость всех тел $\upsilon_0 = 0$. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение (продолжение)

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{R^2}}}.$$

1. Шар: $$I_1 = \frac{2}{5} mR^2.$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cancel{m}gh}{m + \frac{2mR^2}{5R^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{10}{7} gh} \approx 2{,}65 \left(\frac{\ }{c}\right).$$

2. Диск: $$I_1 = \frac{1}{2} mR^2.$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cancel{m}gh}{m + \frac{1mR^2}{2R^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{4}{3} gh} \approx 2{,}56 \left(\frac{\ }{c}\right).$$

4. Найти линейные скорости υ движения центров шара, диска и обруча, скатывающихся без проскальзывания с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости h = 0,5 м, начальная скорость всех тел $\upsilon_0 = 0$. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение (продолжение)

3. Обруч: $$I_1 = mR^2.$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cancel{m}gh}{m + \frac{mR^2}{R^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}} = \sqrt{gh} \approx 2,21\left(\frac{\ }{c}\right).$$

4. Для тела, соскальзывающего без вращения по наклонной плоскости

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = 0.$$

$$v = \sqrt{2gh} \approx 3,13\left(\frac{м}{c}\right).$$

Ответ: *υ_1 = 2,65 м/с, υ_2 = 2,56 м/с, υ_3 = 2,21 м/с; υ = 3,13 м/с.*

6. Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2 и через время $t_1 = 15$ с после начала движения приобретает момент импульса $L_1 = 73{,}5$ кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию T колеса через время $t_2 = 20$ с после начала движения.

Дано:
$\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2
$\omega_0 = 0$
$t_1 = 15$ с
$t_2 = 20$ с
$L_1 = 73{,}5$ кг·м^2/с

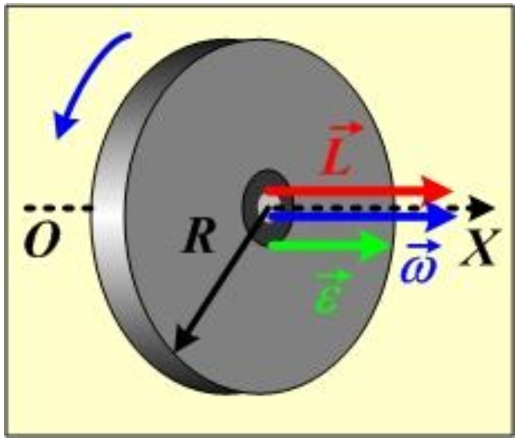
T - ?

Решение

Кинетическую энергию вращающегося колеса можно найти как

$$T = \frac{I\omega_2^2}{2},$$

где I – момент инерции колеса, ω_2 – угловая скорость колеса в момент времени t_2.



Колесо вращается равноускоренно, начальная угловая скорость вращения равна нулю.

$$\omega_1 = \varepsilon t_1, \qquad \omega_2 = \varepsilon t_2.$$

Величина (модуль) момента импульса колеса

$$L = I\omega.$$

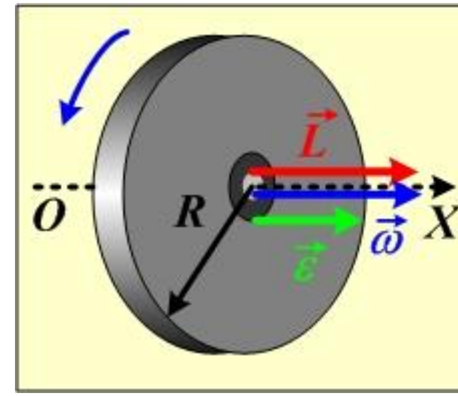
$$L_1 = I\omega_1 = I\varepsilon t_1.$$

Отсюда

$$I = \frac{L_1}{\varepsilon t_1}.$$

6. Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением ε = 0,5 рад/с^2 и через время t_1 = 15 с после начала движения приобретает момент импульса L_1 = 73,5 кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию T колеса через время t_2 = 20 с после начала движения.

Решение (продолжение)



$$T = \frac{I\omega_2^2}{2}, \qquad \omega_2 = \varepsilon t_2, \qquad I = \frac{L_1}{\varepsilon t_1}.$$

Подставим в формулу для кинетической энергии полученные выражения для момента инерции и угловой скорости.

$$T = \frac{I\omega_2^2}{2} = \frac{L_1}{\varepsilon t_1}\frac{\omega_2^2}{2} = \frac{L_1}{\varepsilon t_1}\frac{\varepsilon^2 t_2^2}{2} = \frac{L_1 \varepsilon t_2^2}{2t_1}.$$

$$\text{Дж}\ \frac{L_1 \varepsilon t_2^2}{2t_1} = \frac{73{,}5\cdot 0{,}5\cdot 20^2}{2\cdot 15} = 490(\qquad).$$

Ответ: T=490 Дж.

7. К ободу диска массой m = 5 кг приложена касательная сила F = 19,6 Н. Какую кинетическую энергию T будет иметь диск через время t = 5 с после начала действия силы?

<u>Решение</u>

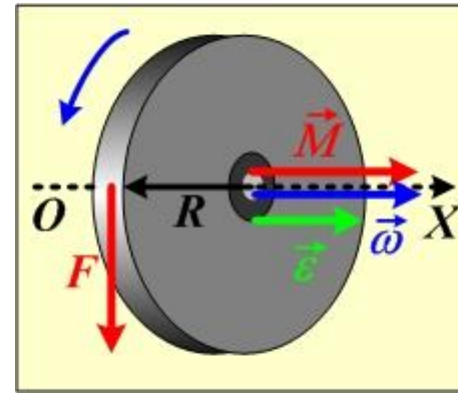
Дано:
m = 5 кг
$\omega_0 = 0$
t = 5 с
F = 19,6 Н

T - ?

Кинетическую энергию вращающегося диска можно найти как

$$T = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I – момент инерции диска, ω – угловая скорость колеса в момент времени t.



Сила F создаёт постоянный вращающий момент, что приводит к равноускоренному вращению диска. Основной закон динамики вращательного движения можно записать так:

$$I\vec{\varepsilon} = \left[\vec{R}, \vec{F}\right].$$

Для проекций на ось ОХ (см. рисунок):

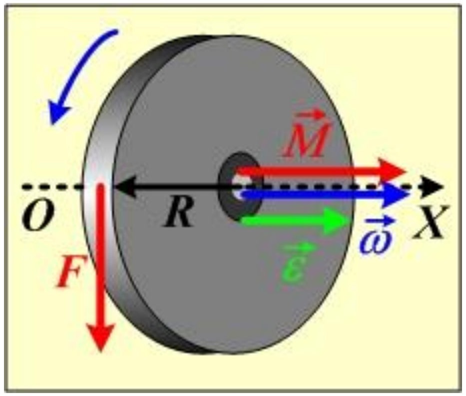
$$I\varepsilon = RF. \qquad \varepsilon = \frac{RF}{I}.$$

Диск вращается равноускоренно, начальная угловая скорость вращения равна нулю,

$$\omega = \varepsilon t = \frac{RF}{I} t.$$

7. К ободу диска массой m = 5 кг приложена касательная сила F = 19,6 Н. Какую кинетическую энергию T будет иметь диск через время t = 5 с после начала действия силы?

Решение (продолжение)



$$T = \frac{I\omega^2}{2}, \qquad \omega = \varepsilon t = \frac{RF}{I}t.$$

$$T = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I}{2}\left(\frac{RF}{I}t\right)^2 = \frac{R^2F^2}{2I}t^2.$$

Момент инерции диска относительно данной оси вращения $I = \dfrac{mR^2}{2}.$

$$T = \frac{R^2F^2}{2I}t^2 = \frac{2R^2F^2t^2}{2mR^2} = \frac{F^2t^2}{m}.$$

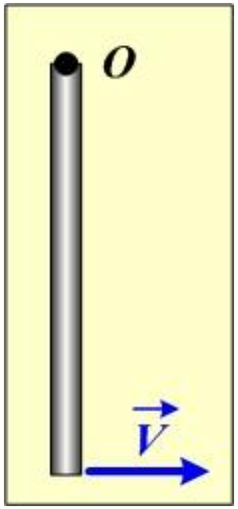
$$Дж\,\frac{F^2t^2}{m} = \frac{19,6^2\cdot 5^2}{5} \approx 1920(\qquad).$$

Ответ: T=1,92 кДж.

8. Однородный стержень длиной l = 85 см подвешен к горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую минимальную скорость υ надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

Дано:
l = 85 см

v - ?

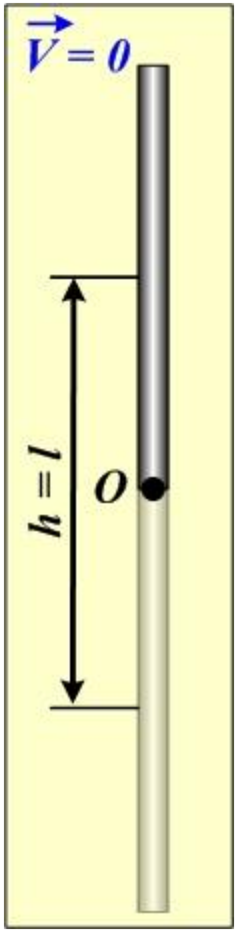


Решение

Если мы сообщим нижнему концу стержня некоторую скорость, он сможет совершить полный оборот вокруг оси, проходящей через точку О.

Если эта скорость минимальная из всех возможных, при которых стержень совершит оборот, то в верхней точке скорость стержня будет очень близка к нулю (рис. 2).

Для определения минимальной скорости, при которой возможен полный оборот стержня применим закон сохранения энергии. Трение в системе отсутствует, поэтому можно считать, что все силы, действующие в системе консервативны.



$$\Delta E = 0.$$

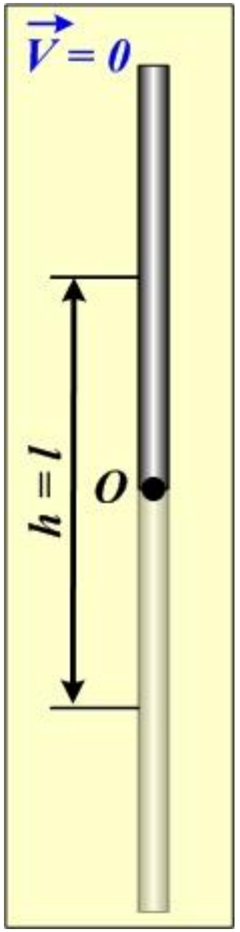
$$\Delta E_k^{вращ} + \Delta U = 0.$$

Изменение потенциальной энергии в поле сил тяжести определим по изменению положения центра тяжести стержня, который совпадает с его геометрическим центром.

$$\Delta U = +mgh = +mgl.$$

8. Однородный стержень длиной l = 85 см подвешен к горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую минимальную скорость υ надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

Решение (продолжение)



$$\Delta U = +mgh = +mgl.$$

Потенциальная энергия стержня в поле сил тяжести увеличилась.

Кинетическая энергия стержня уменьшилась, так как в верхней точке он практически остановился.

$$\Delta E_k = 0 - \frac{I\omega^2}{2} = -\frac{I\omega^2}{2}.$$

Здесь ω - начальная угловая скорость стержня.

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{v}{l}.$$

$$\Delta E_k = -\frac{I\omega^2}{2} = -\frac{Iv^2}{2l^2}.$$

Момент инерции стержня относительно точки O $I = \dfrac{ml^2}{3}.$

$$\Delta E_k = -\frac{Iv^2}{2l^2} = -\frac{ml^2v^2}{3 \cdot 2l^2} = -\frac{mv^2}{6}.$$

8. Однородный стержень длиной l = 85 см подвешен к горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую минимальную скорость υ надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

Решение (продолжение)

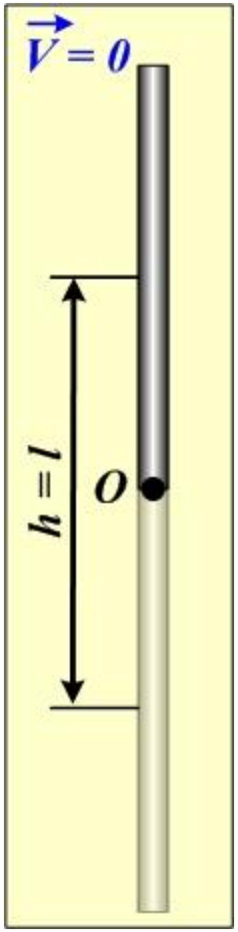
$$\Delta E_k^{вращ} + \Delta U = 0, \qquad \Delta U = +mgl, \qquad \Delta E_k = -\frac{mv^2}{6}.$$

$$mgl - \frac{mv^2}{6} = 0.$$

$$mgl = \frac{mv^2}{6}.$$

$$v = \sqrt{6gl}.$$

$$v = \sqrt{6gl} = \sqrt{6 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}85} \approx 7{,}1\left(\frac{м}{с}\right).$$



Ответ: υ=7,1 м/с.

9. Горизонтальная платформа массой m = 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $\nu_1 = 10$ об/мин. Человек массой $m_0 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой ν_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека − точечной массой. Трения нет.

Решение

Дано:

m = 100 кг

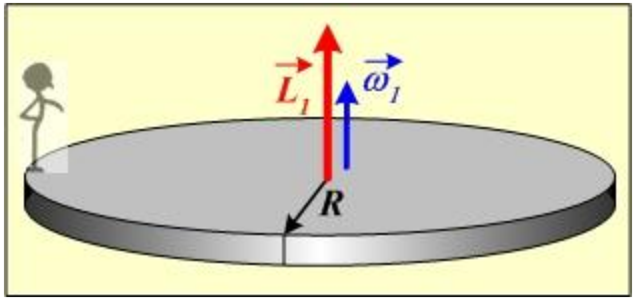
m_0 = 60 кг

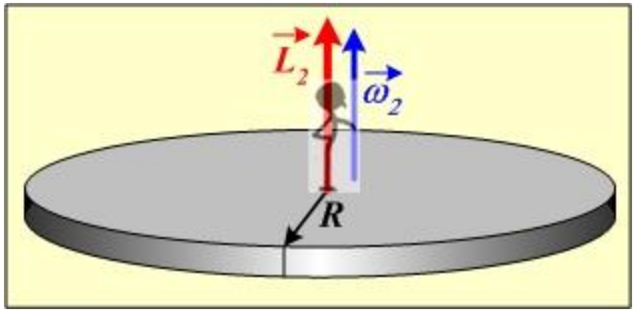
ν_1 = 10 об/мин

ν_2 - ?

На рассматриваемую систему не действуют внешние моменты сил, следовательно её момент импульса сохраняется.

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2.$$





Направлены моменты импульса системы одинаково. Для проекций на вертикальную ось OZ:

$$L_1 = L_2.$$

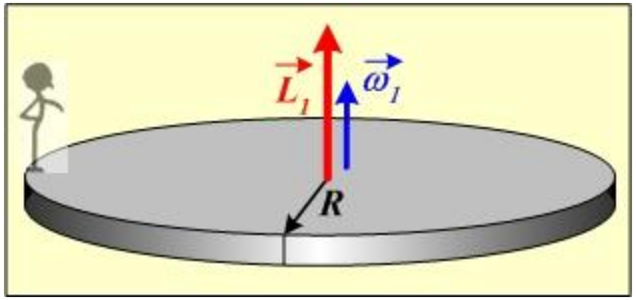
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

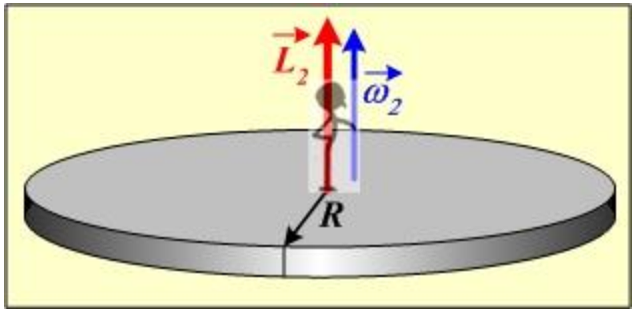
В случае, когда человек стоит на краю платформы, момент инерции системы

$$I_1 = I_{диска} + m_0 R^2 = \frac{mR^2}{2} + m_0 R^2.$$

9. Горизонтальная платформа массой m = 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой ν_1 = 10 об/мин. Человек массой m_0 = 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой ν_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека − точечной массой. Трения нет.

Решение (продолжение)





В случае, когда человек стоит в центре платформы, его момент инерции относительно рассматриваемой оси равен нулю, а момент инерции системы

$$I_2 = I_{диска} = \frac{mR^2}{2}.$$

Подставим выражения для моментов инерции в закон сохранения момента импульса:

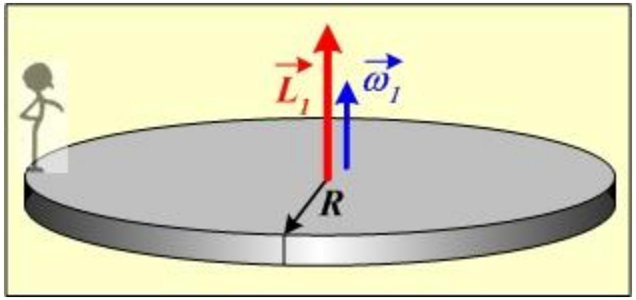
$$\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)\omega_1 = \frac{mR^2}{2}\omega_2.$$

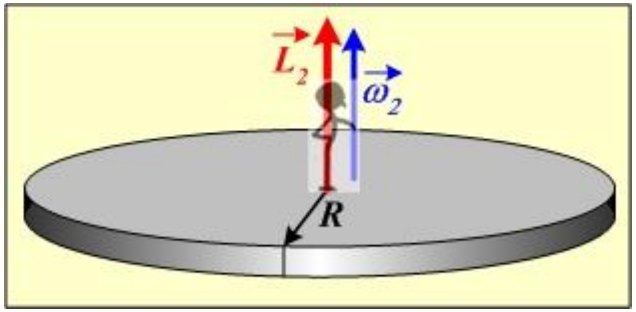
Угловая скорость связана с частотой вращения соотношением:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

9. Горизонтальная платформа массой m = 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой ν_1 = 10 об/мин. Человек массой m_0 = 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой ν_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека − точечной массой. Трения нет.

Решение (продолжение)





$$\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)\omega_1 = \frac{mR^2}{2}\omega_2, \qquad \omega = 2\pi\nu.$$

$$\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)2\pi\nu_1 = \frac{mR^2}{2}2\pi\nu_2,$$

$$\left(mR^2 + 2m_0R^2\right)\nu_1 = mR^2\nu_2,$$

$$\left(m + 2m_0\right)\nu_1 = m\nu_2,$$

$$\nu_2 = \frac{m + 2m_0}{m}\nu_1 = \frac{100 + 2\cdot 60}{100}\cdot 10 = 22\left(\frac{об}{мин}\right).$$

Ответ: ν_2 = 22 об/мин.

10. Горизонтальная платформа массой m = 80 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой ν_1 = 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ν_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от I_1 = 2,94 кг·м^2 до I_2 = 0,98 кг·м^2? Считать платформу однородным диском. Трения нет.

Решение

Дано:

m = 80 кг

R = 1 м

ν_1 = 20 об/мин

I_1=2,94 кгм^2

I_2=0,98 кг·м^2

ν_2 - ?

На рассматриваемую систему не действуют внешние моменты сил, следовательно её момент импульса сохраняется.

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2.$$

Направлены моменты импульса системы одинаково. Для проекций на вертикальную ось OZ:

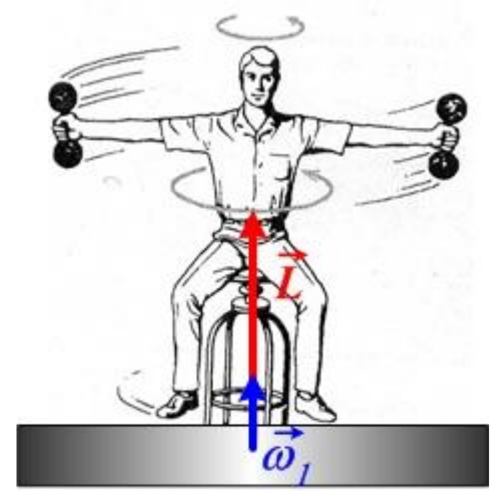
$$L_1 = L_2.$$

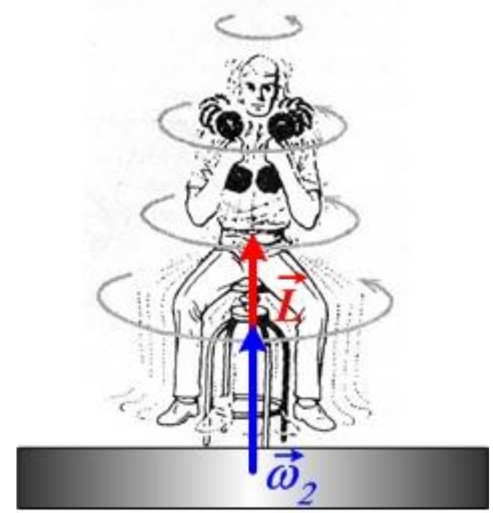
$$I_{c1}\omega_1 = I_{c2}\omega_2.$$

Угловая скорость связана с частотой вращения соотношением:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

$$I_{c1}2\pi\nu_1 = I_{c2}2\pi\nu_2.$$





10. Горизонтальная платформа массой m=80 кг и радиусом R=1 м вращается с частотой ν_1=20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ν_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от I_1=2,94 кгм^2 до I_2=0,98 кг·м^2? Считать платформу однородным диском. Трения нет.

Решение (продолжение)

$$I_{c1} 2\pi\nu_1 = I_{c2} 2\pi\nu_2.$$

Частота вращения после изменения момента инерции

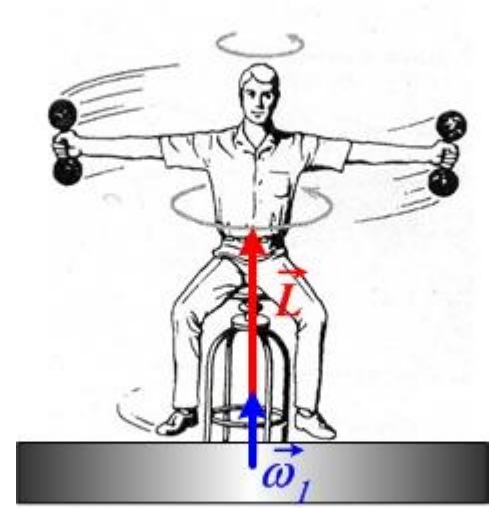
$$\nu_2 = \frac{I_{c1}\nu_1}{I_{c2}}.$$

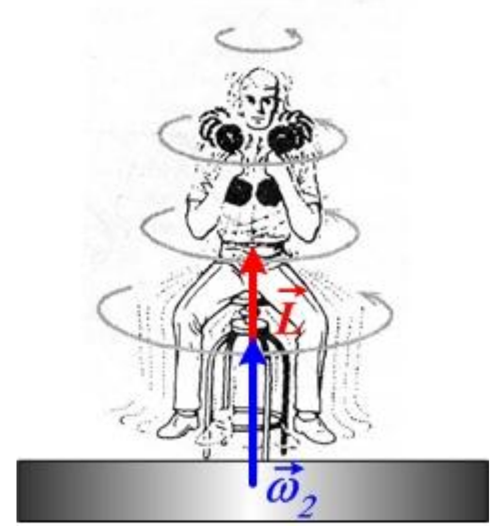
Момент инерции системы

$$I = I_{диска} + I_{человека} .$$

Момент инерции диска

$$I_{диска} = \frac{mR^2}{2}.$$





10. Горизонтальная платформа массой m = 80 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой ν_1 = 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой ν_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $I_1 = 2{,}94$ кг·м^2 до $I_2 = 0{,}98$ кг·м^2? Считать платформу однородным диском. Трения нет.

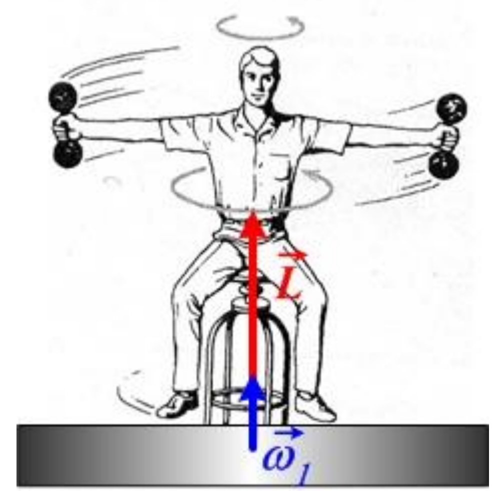
Решение (продолжение)

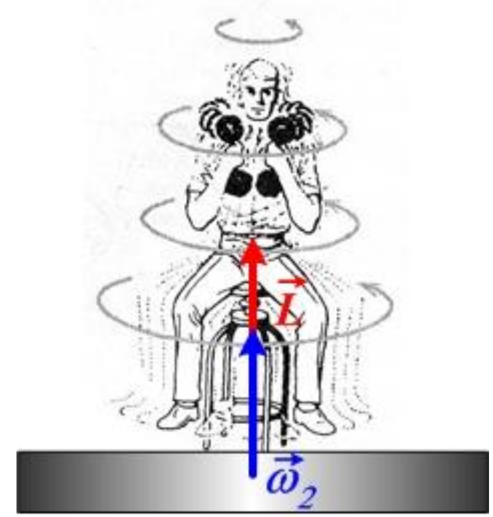
$$I = I_{диска} + I_{человека}, \qquad I_{диска} = \frac{mR^2}{2}.$$

$$I_{c1} = \frac{mR^2}{2} + I_1, \qquad I_{c2} = \frac{mR^2}{2} + I_2.$$

$$\nu_2 = \frac{I_{c1}\nu_1}{I_{c2}} = \frac{\dfrac{mR^2}{2} + I_1}{\dfrac{mR^2}{2} + I_2}\nu_1 = \frac{mR^2 + 2I_1}{mR^2 + 2I_2}\nu_1.$$

$$\nu_2 = \frac{mR^2 + 2I_1}{mR^2 + 2I_2}\nu_1 = \frac{80\cdot 1 + 2\cdot 2{,}94}{80\cdot 1 + 2\cdot 0{,}98}20 = 21\left(\frac{об}{мин}\right).$$





Ответ: ν_2=21 об/мин.

11. Человек массой $m_0 = 60$ кг находится на неподвижной платформе массой $m = 100$ кг. С какой частотой ν будет вращаться платформа, если человек начнет движение по краю платформы вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы $\upsilon_0 = 4$ км/ч. Радиус платформы $R = 10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека − точечной массой. Трения нет.

Решение

Дано:

$m_0 = 60$ *кг*

$m = 100$ *кг*

$\upsilon_0 = 4$ *км/ч*

$R = 10$ *м*

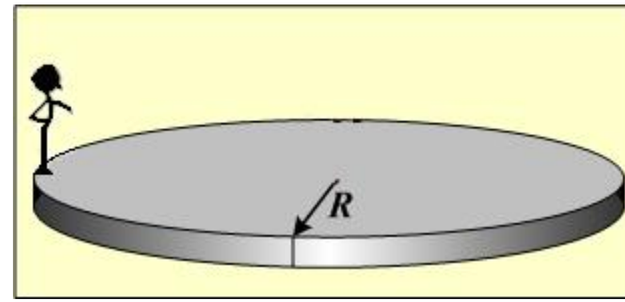
ν *- ?*

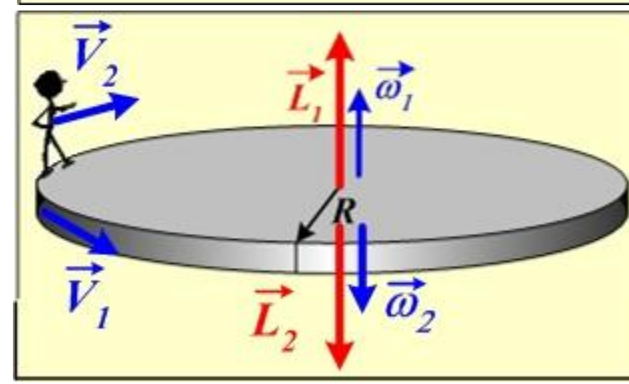
На рассматриваемую систему не действуют внешние моменты сил, следовательно её момент импульса сохраняется.

$$\vec{L} = \vec{L}'.$$

$\vec{L}$ - момент импульса системы до начала движения человека;

$\vec{L}'$ - момент импульса системы после начала движения человека.





В лабораторной системе отсчёта

$$\vec{L} = \vec{L}' = 0.$$

В лабораторной системе отсчёта $\vec{L}' = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 0.$

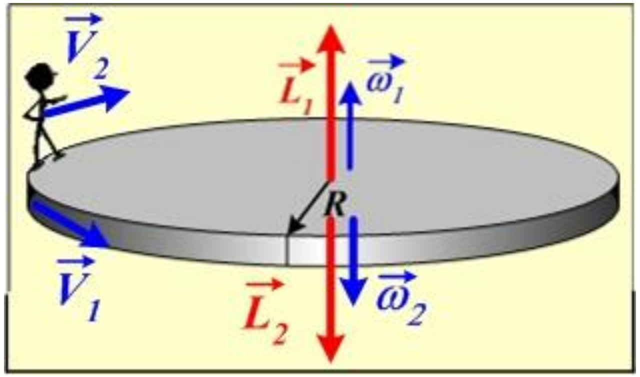
$\vec{L}_1 = I\vec{\omega}_1$ - момент импульса платформы;

$\vec{L}_2 = m_0\left[\vec{R}, \vec{v}_2\right]$ - момент импульса человека.

11. Человек массой m_0 = 60 кг находится на неподвижной платформе массой m = 100 кг. С какой частотой ν будет вращаться платформа, если человек начнет движение по краю платформы вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы υ_0 = 4 км/ч. Радиус платформы R = 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека − точечной массой. Трения нет.

Решение (продолжение)

$$\vec{L}' = m_0\left[\vec{R},\vec{v}_2\right] + I\vec{\omega}_1 = 0.$$



Направлены моменты импульса человека и платформы в противоположные стороны. Для проекций на вертикальную ось OZ:

$$-m_0 R v_2 + I\omega_1 = 0.$$

В уравнение входит величина проекции скорости человека в лабораторной системе отсчёта, а в условии дана скорость относительно платформы. Найдём величину скорости в лабораторноё системе отсчёта.

Как только человек начнёт движение, платформа начнёт вращаться в противоположном направлении (см. рисунок). Поэтому по закону сложения скоростей

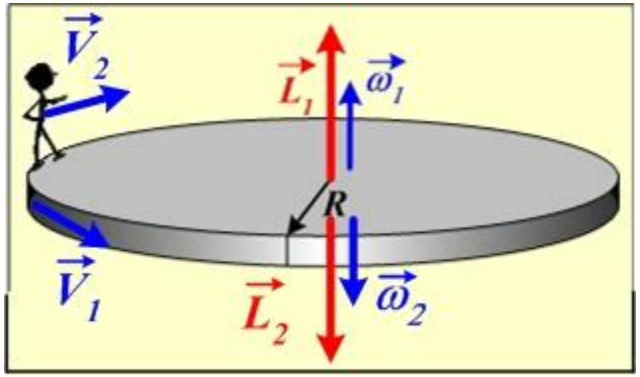
$$v_2 = v_0 - v_1.$$

Величина линейной скорости края платформы

$$v_1 = \omega_1 R.$$

11. Человек массой m_0 = 60 кг находится на неподвижной платформе массой m = 100 кг. С какой частотой ν будет вращаться платформа, если человек начнет движение по краю платформы вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы υ_0 = 4 км/ч. Радиус платформы R = 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека − точечной массой. Трения нет.

Решение (продолжение)



$$v_2 = v_0 - v_1, \qquad v_1 = \omega_1 R.$$

Величина линейной скорости человека в лабораторной системе отсчёта

$$v_2 = v_0 - v_1 = v_0 - \omega_1 R.$$

Подставим выражение для величины линейной скорости человека в лабораторной системе отсчёта в уравнение закона сохранения момента импульса:

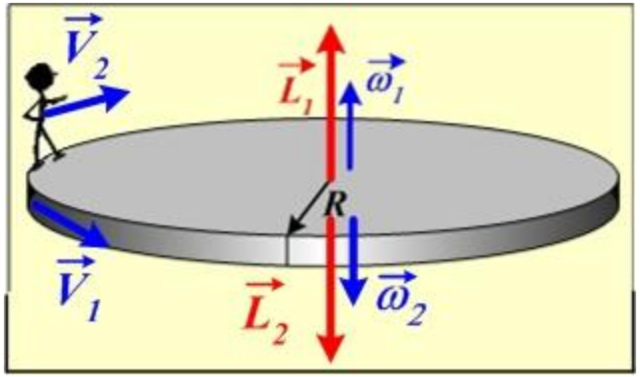
$$-m_0 R v_2 + I\omega_1 = 0,$$

$$m_0 R v_2 = I\omega_1,$$

$$m_0 R\left(v_0 - \omega_1 R\right) = I\omega_1.$$

Теперь осталось определить угловую скорость вращения платформы из последнего уравнения.

11. Человек массой m_0 = 60 кг находится на неподвижной платформе массой m = 100 кг. С какой частотой ν будет вращаться платформа, если человек начнет движение по краю платформы вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы υ_0 = 4 км/ч. Радиус платформы R = 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека − точечной массой. Трения нет.



Решение (продолжение)

$$m_0R\left(v_0-\omega_1R\right)=I\omega_1,$$

$$m_0Rv_0-m_0\omega_1R^2=I\omega_1,$$

$$m_0Rv_0=m_0\omega_1R^2+I\omega_1,$$

$$\omega_1=\frac{m_0Rv_0}{m_0R^2+I}.$$

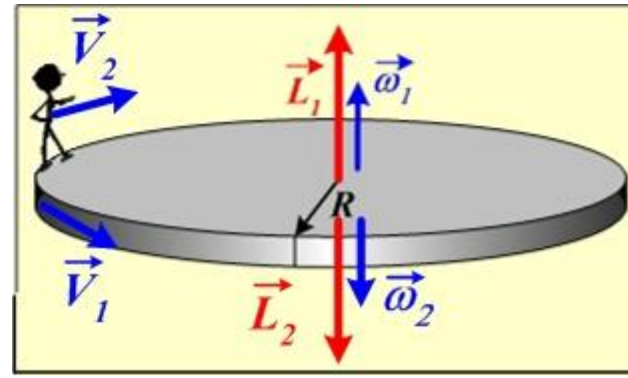
Напомним, что *I* – момент инерции платформы, которая имеет форму диска.

$$I=\frac{1}{2}mR^2.$$

$$\omega_1=\frac{m_0Rv_0}{m_0R^2+\frac{1}{2}mR^2}=\frac{2m_0v_0}{2m_0R+mR}.$$

11. Человек массой m_0 = 60 кг находится на неподвижной платформе массой m = 100 кг. С какой частотой ν будет вращаться платформа, если человек начнет движение по краю платформы вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы υ_0 = 4 км/ч. Радиус платформы R = 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека − точечной массой. Трения нет.

Решение (продолжение)



$$\omega_1 = \frac{2m_0v_0}{2m_0R + mR}.$$

Угловая скорость связана с частотой вращения соотношением:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{2m_0v_0}{2m_0R + mR}.$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{2m_0v_0}{2m_0R + mR} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \frac{2 \cdot 60 \cdot 1{,}11}{2 \cdot 60 \cdot 10 + 100 \cdot 10} \approx 0{,}06\left(\frac{\text{об}}{\ }\right) = 3{,}6\left(\frac{\text{об}}{\text{мин}}\right).$$

Ответ: ν = 3,6 об/мин.