Лекции №2 - №4

Тема 2: Эконометрические модели. Модели парной регрессии

План:

1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
2. Парная линейная регрессия.
3. Ковариация и корреляция.
4. Проверка значимости выборочного коэффициента корреляции.

5. Метод наименьших квадратов (МНК).
6. Предпосылки МНК – условия Гаусса – Маркова.
7. Ошибки исследования.
8. Коэффициент детерминации линейной регрессии.
9. Нелинейные модели регрессии и их линеаризация.

1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.

***1.* Функциональная зависимость -** это полное соответствие между зависимой (результативной) переменной **У** и независимыми (факторными) переменными **Xi**. Она задается в виде уравнения

$$y = f(x_i)$$

2. В экономике такая зависимость бывает редко, потому что на величины влияют случайные факторы ε_i , тогда уравнение примет вид $y = f(x_i) + \varepsilon_i$
в этом случае зависимость называется **статистической зависимостью.**

Пример.

Урожайности зерновых зависит от ряда факторов: удобрений, производительности труда, энерговооруженности сельского предприятия и т.п.

3. Корреляционная зависимость – это частный случай статистической зависимости, когда изменение средней величины результативной переменной **У** происходит в зависимости от математического ожидания изменения значения факторного признака **Х**.

Корреляция (от позднелат. correlatio – соотношение).

Для каждого значения **X=x** определено условное математическое ожидание **M (У/X=x)** величины У по X, которое равно среднему значению функции $\overline{y(x)}$ и называется регрессией величины У по X.

$$\overline{y(x)} = M(Y \mid X = x)$$

Термин **«корреляция»** впервые применил французский палеонтолог Ж. Кювье, который вывел **«закон корреляции частей и органов животных»** (этот закон позволяет восстанавливать по частям тела облик всего животного).

В статистику термин ввел **Френсис Гальтон (**не просто связь –relation, а «как бы связь»-co-relation).Формулу для подсчета коэффициента корреляции разработал его ученик – математик и биолог – **Карл Пирсон** (1857-1936).

Примеры корреляционной связи

1. **Закон Хика** – скорость переработки информации пропорциональна логарифму от числа альтернатив.
2. Корреляция личной **пластичности** человека и **склонности** его к смене социальных установок.
3. Чем выше личностная **тревожность**, тем больше **риск заболеть** язвой желудка.
4. Чем **боязливее** особь, тем меньше у нее шансов занять **ведущее** положение в группе.

Задачи корреляционного анализа

1. Установление **направления** зависимости двух и более переменных (положительное – прямая связь или отрицательное – обратная связь).
2. Определение **формы** зависимости (линейная, нелинейная).
3. Измерение **тесноты связи**.
4. **Проверка** уровня значимости полученных коэффициентов корреляции.

2. Парная линейная регрессия

Понятие **«регрессия»** возникло в психоанализе (лат. regressio – движение назад, возвращение к более раннему состоянию или образу действий).

В математике это понятие впервые употребил **Френсис Гальтон в 1886 г.** как возврат к среднему значению. Он исследовал зависимость роста сыновей от роста их отцов (рост очень высоких и очень низких отцов ближе к среднему росту детей в регионе).

Эконометрический анализ построения модели парной регрессии

По имеющимся данным m наблюдений зависимости y от $x_1, x_2, \ldots, x_m$

выбрать эконометрическую модель,

$$y = f(x_i) + \varepsilon_i$$

оценить ее параметры и статистически **обосновать**, что факторы существенны, и, что построенная функция наиболее точно соответствует данным наблюдений.

Задачи регрессионного анализа

1. **Спецификация модели** - определить вид уравнения регрессии.
2. **Параметризация модели** - оценить параметры уравнения.
3. **Верификация модели** – проверить адекватность уравнения эмпирическим данным и улучшить качество уравнения.
4. Сделать **прогноз** неизвестных значений зависимой переменной.

3. Ковариация и корреляция

Co-vary – совместное изменение.

Correlatio – соотношение.

Теоретической ковариацией СВ X и У называется средняя величина отклонений этих переменных от своих средних

$$Cov(X,Y)=M[(X-M(X))\bullet(Y-M(Y))]=$$

$$= M(XY)-M(X)\bullet M(Y)$$

Теоретический коэффициент корреляции

Недостатком Cov является ее зависимость от размерности СВ X и У. Для устранения этого вводится относительная (безразмерная) величина – **теоретический коэффициент корреляции**

$$\rho(X,У) = Cov(X,У) / \sigma(X) \cdot \sigma(У),$$

где ρ - читается «ро»

σ (сигма) – среднее квадратическое отклонение

Выборочная ковариация

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)$$

Расчетная формула

$$\operatorname{cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Выборочный коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left[\left(\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2\right) \cdot \left(\overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2\right)\right]}}$$

Характеристика тесноты линейной связи

Если $r = 0$, то связь отсутствует.

Если $0 < r < 1$, то связь положительная, прямая.

Если $-1 < r < 0$, то связь отрицательная, обратная.

Если $r = +1$ или $r = -1$, то связь строгая функциональная.

4. Проверка значимости выборочного коэффициента корреляции

Требуется проверить гипотезу Но о равенстве нулю истинного значения коэффициента корреляции для генеральной совокупности. Гипотезы:

Но: $\rho = 0$

Н1: $\rho \neq 0$. Проверка с помощью t-критерий Стьюдента с (n-2) степенями свободы и заданной доверительной вероятностью γ = (0,9; 0,95; 0,98)

$$t_{наблюдаемое} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Если **|tнабл.| < t-критерия** Стьюдента, то r незначим и Но принимается.

Если **|tнабд.| > t-критерия** Стьюдента, то r значим и Но отвергается.

Лекция № 3

Слайды 22-62

Уравнение линейной регрессии

Для генеральной совокупности зависимость У от Х представим в виде линейной модели первого порядка

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon$$

Для выборочной совокупности

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x + e$$

где $e=y-\hat{y}$ - оценка ошибки аппроксимации, отклонение, разность между выборочным и расчетным значением.

Традиционно уравнение линейной регрессии записывают в виде:

$$\hat{y} = a + b \cdot x$$

Экономический смысл параметров

b - коэффициент регрессии, показывает на сколько в среднем изменится **y** при изменении **x** на единицу.

Знак b указывает на направление связи. Если **b > 0**, то связь **прямая,** т.е. с увеличением **x** увеличивается **y** и наоборот.

Если **b < 0**, то связь **обратная**, т.е. с увеличением **x** **y** уменьшается и наоборот.

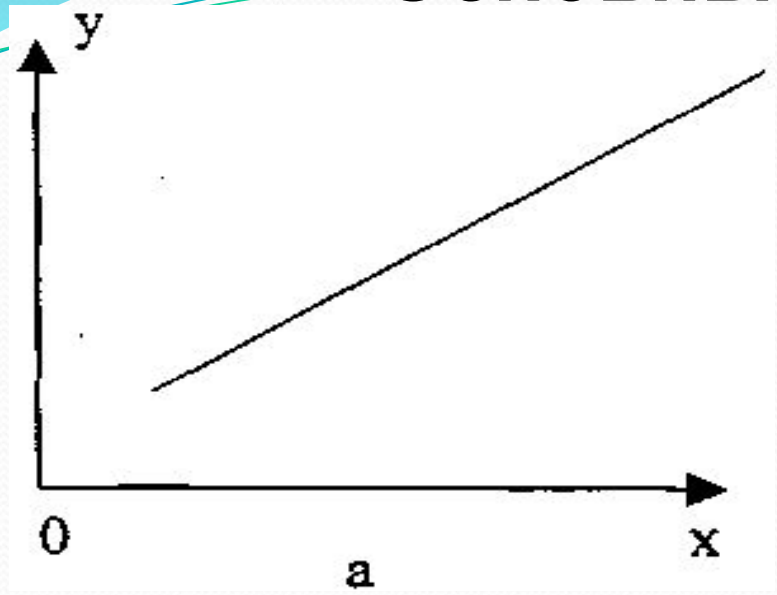
a – среднее значение **y** при **x=0**.

Форма уравнения определяется на основе визуальной (зрительной) оценки.

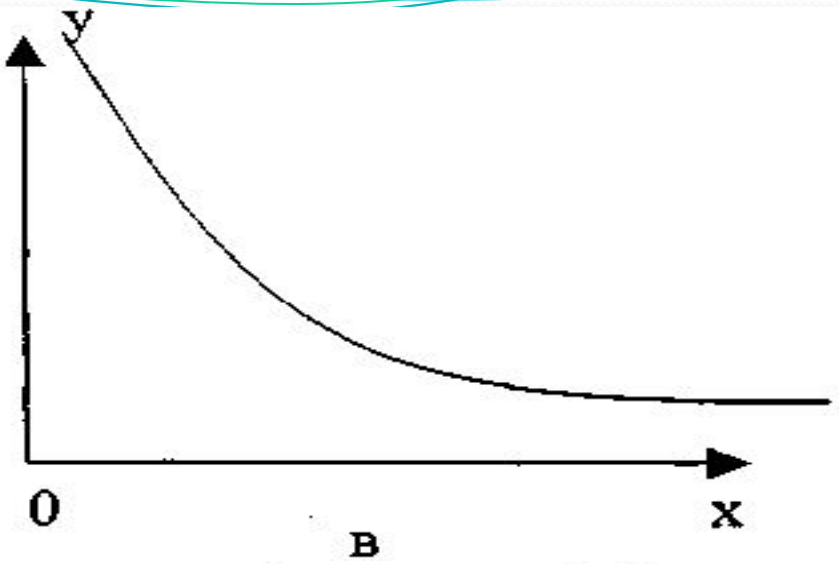
Строится график - **корреляционное поле**, т.е. оси абсцисс (ох) откладываются значения факторного (независимого) признака х, а по оси ординат (оу) – значения результативного признака у.

Соединяя точки графика отрезками прямой получим **эмпирическую линию**. По ее виду судят о наличии зависимости и о форме линии.

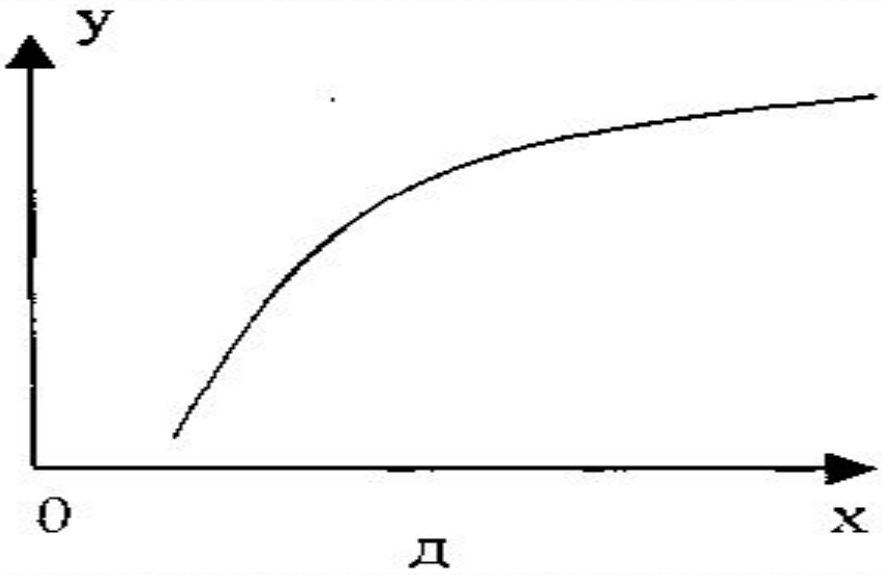
Основные типы линий



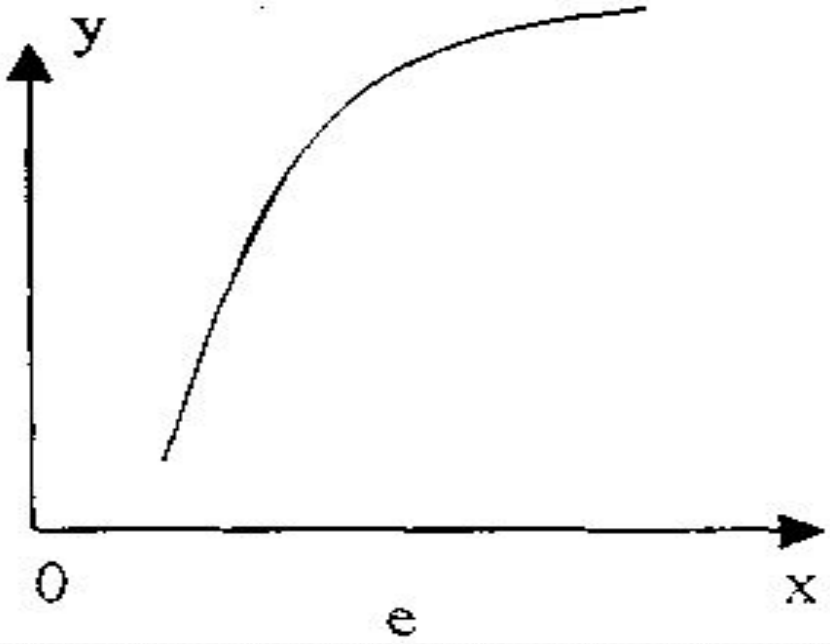
а



в



д



е

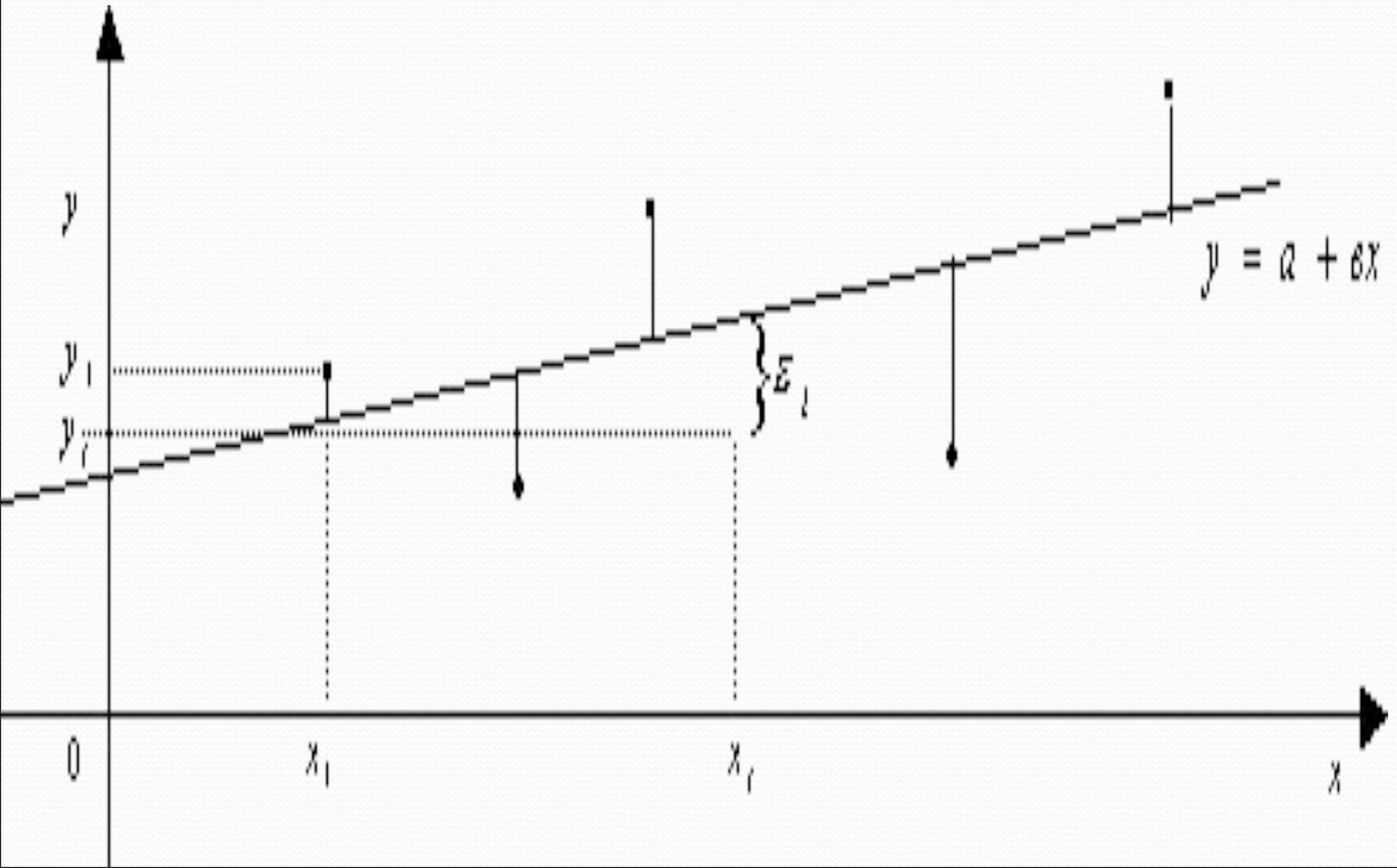
Линейная $y_x = a + b \cdot x;$

Гиперболическая $y_x = a + b / x;$

Степенная $y_x = a \cdot x^b;$

Показательная $y_x = a \cdot b^x;$

Корреляционное поле



Пояснения к графику

Случайная выборка значений $(x_1, x_2, \boxtimes, x_n)$ и $(y_1, y_2, \boxtimes, y_n)$

Уравнение регрессии

$$\hat{y} = a + bx$$

Отклонения

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Для каждой точки (x_i, y_i) можно записать различные виды дисперсий:

Виды дисперсий

Дисперсия y_i

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

Дисперсия $\hat{y}_i$

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2$$

Дисперсия ε_i

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}\right)^2$$

Коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{\sigma^2_{\hat{y}}}{\sigma^2_y} = \frac{\sum\left(\hat{y}_i - \overline{y}\right)^2}{\sum\left(y_i - \overline{y}\right)^2}$$

$$0 \le R^2 \le 1$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{\sum \left(e_i - \bar{e}\right)^2}{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}$$

Коэффициент детерминации оценивает **качество (точность)** уравнения регрессии, это часть дисперсии (вариации) признака у объясненная уравнением регрессии.

Например: $R^2 = 0{,}56$ или 56% - это доля вариации у зависимая от вариации х и 100%-56%=44% вариации у зависимая от вариации других факторов, не учтенных в модели.

Для определения статистической **значимости коэффициента детерминации** используется

F– наблюдаемое Фишера по формуле

$$F = \frac{R^2 \cdot (n-2)}{1-R^2}$$

F- критическое определяется по таблице распределения Фишера

$$F_{\alpha,\nu_1,\nu_2},$$

$$где\ \nu_1 = 1,\ \nu_2 = n-2$$

Если $F > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$, то R^2 значим

5. Метод наименьших квадратов (МНК)

МНК минимизирует **сумму квадратов** разностей между фактическими и расчетными значениями зависимой переменной **y.**

МНК

$$S = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min$$

Необходимым условием минимума является равенство нулю ее частных производных по параметрам регрессии.

Для линейной регрессии получаем систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$b = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

Шкала Чеддока для качественной оценки тесноты связи между x и y

Теснота связи	Значение коэффициента корреляции при наличии	
	прямой связи	обратной связи
Слабая	0,1 – 0,3	(-0,1) – (-0,3)
Умеренная	0,3 – 0,5	(-0,3) – (-0,5)
Заметная	0,5 – 0,7	(-0,5) – (-0,7)
Высокая	0,7 – 0,9	(-0,7) – (-0,9)
Весьма высокая	0,9 – 0,99	(-0,9) – (-0,99)

6. Предпосылки МНК – условия Гаусса-Маркова

1. Математическое ожидание случайного отклонения ε_i равно нулю для всех наблюдений **M**(ε_i)=0.

2. Дисперсия случайного отклонения постоянная для всех наблюдений

D(ε_i) =**D**(ε_j) = σ^2

Постоянство дисперсии отклонения называется **гомоскедастичностью.**

Непостоянство дисперсии отклонения называется **гетероскедастичностью.**

3. Случайные отклонения ε_i и ε_j должны быть независимы друг от друга. Если данное условие выполняется, то говорят об отсутствии **автокорреляции.**

4. Случайные отклонения должны быть независимы от объясняющих переменных.

Теорема Гаусса-Маркова

«Если выполняются условия 1- 4, то оценки **(a, b)**, сделанные с помощью МНК, являются наилучшими линейными несмещенными оценками параметров(β_0,β_1), т.е. они обладают свойствами:

1) несмещенность;
2) эффективность;
3) состоятельность.»

- Оценка Θn (тэта) называется **состоятельной** , если она сходится по вероятности к значению оцениваемого параметра Θ при безграничном возрастании объема выборки.
- **Несмещенная** оценка Θn – это оценка параметра Θ, математическое ожидание которой равно значению оцениваемого параметра: M(Θn)=Θ.
- **Эффективная** оценка – это несмещенная оценка, имеющая наименьшую дисперсию из всех возможных несмещенных оценок параметра

Лекция № 4

(слайды 49-74)

7. Ошибки измерения

Средняя ошибка аппроксимации

или среднее относительное отклонение расчетных значений от фактических

(должно быть не более 8 – 10%)

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right| \cdot 100\%$$

Коэффициент эластичности показывает, на сколько % изменяется функция y=f(x) при изменении независимой переменной x на 1 %.

$$\overline{Э_{yx}} = b \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$$

Мерой разброса переменной y служит **стандартная ошибка регрессии**

$$S^2 = S_e^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum e_i^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum e_i^2}$$

Стандартные **ошибки коэффициентов регрессии** оцениваются по формулам:

$$S_a^2 = \frac{\left(\overline{x}\right)^2 S^2}{n \cdot \sum \left(x - \overline{x}\right)^2}, \quad S_b^2 = \frac{S^2}{n \cdot \sum \left(x - \overline{x}\right)^2}$$

Оценка **значимости коэффициентов регрессии** с помощью t – наблюдаемого Стьюдента по формулам:

$$t_a = \frac{a}{S_a}, \quad t_b = \frac{b}{S_b}$$

t- критические определяются по таблицам распределения Стьюдента $t_{\alpha,n-2}$

Если $|t_a| > t_{\alpha,n-2}$ и $|t_b| > t_{\alpha,n-2}$

то коэффициенты a и b значимы

Предсказание и прогнозирование на основе линейной модели регрессии

Поиск значений У для Х, находящихся между известными значениями, называется **предсказанием**.

Прогнозирование – это оценка значений У для некоторого будущего набора независимых переменных.

Для предсказания достаточно поставить в уравнение регрессии нужное значение x. Для прогноза используется понятие

доверительной вероятности

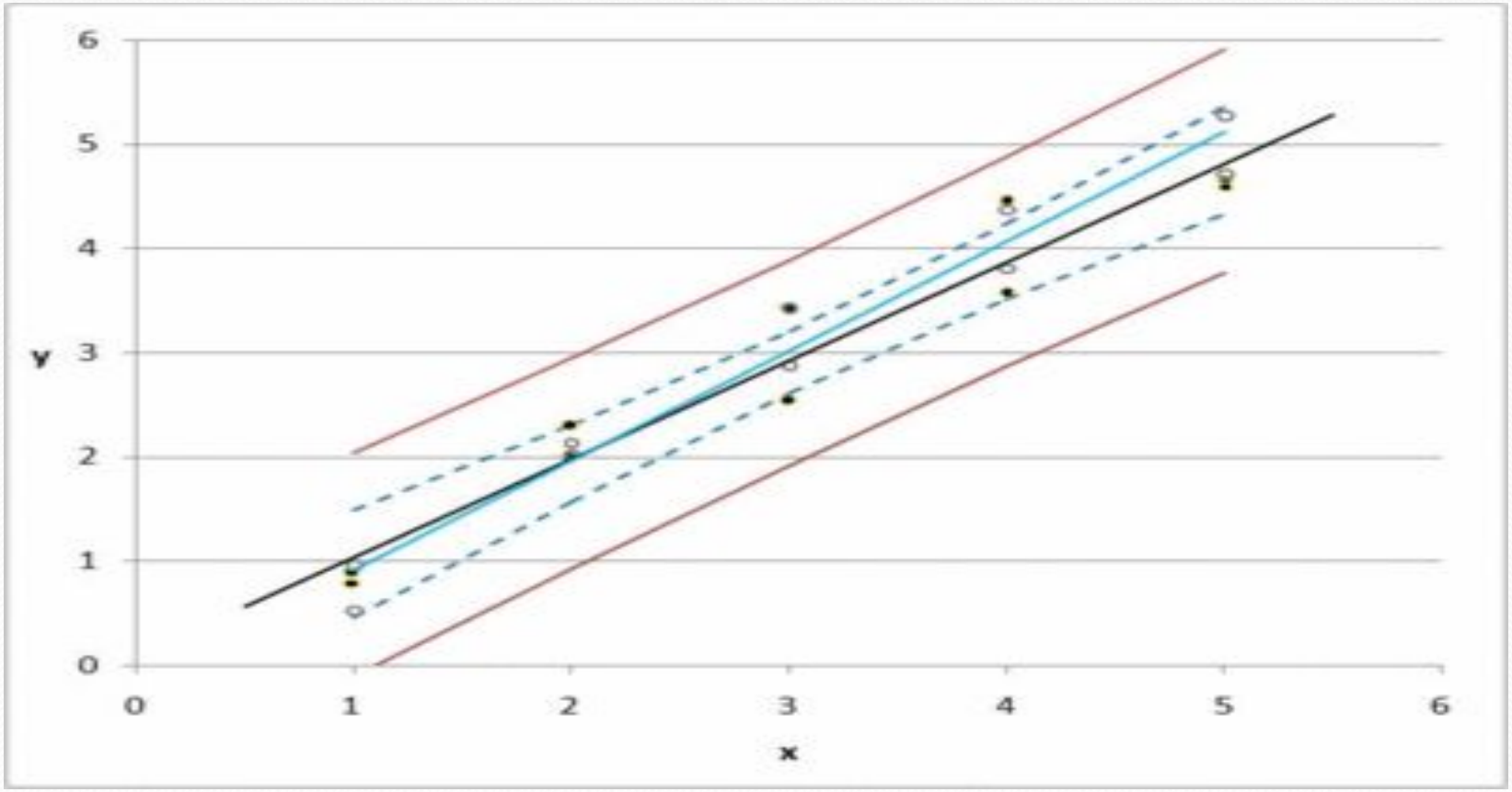
$$\gamma = (0{,}9; \quad 0{,}95; \quad 0{,}99)$$

и **уровня значимости**

$$\alpha = 1 - \gamma = (0{,}1; \quad 0{,}05; \quad 0{,}01)$$

Доверительные интервалы

Линия регрессии и 95%-е доверительные области для линии регрессии (пунктиром) и для значений границы (сплошные)



Доверительный интервал для y

$$\hat{y} - t_{\frac{1-\alpha}{2},n-2} \cdot S_{\hat{y}} < y < \hat{y} + t_{\frac{1-\alpha}{2},n-2} \cdot S_{\hat{y}}$$

Доверительный интервал для $\overline{y}$

$$\hat{y} - t_{\frac{1-\alpha}{2},n-2} \cdot S_y < \overline{y} < \hat{y} + t_{\frac{1-\alpha}{2},n-2} \cdot S_y$$

Пояснения к формулам доверительных интервалов (m –кратность измерений y)

$$S_e^2 = \sum \frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}$$

$$S_{\hat{y}} = S_e \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{x})^2}{\sum (x_i - \overline{x})^2}}$$

$$S_y = S_e \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{x})^2}{\sum (x_i - \overline{x})^2}}$$

Коэффициент детерминации для линейной регрессии

$$R^2 = r^2$$

показывает долю общей вариации (дисперсии) зависимой переменной y, обусловленной регрессией или изменчивостью объясняемой переменной x.

9. Нелинейные модели регрессии и их линеаризация.

Экспоненциальная регрессия

$$\tilde{y} = e^{ax+b}$$

Линеаризующие преобразования

$$x' = x \qquad y' = \ln y$$

Параметры уравнения экспоненциальной регрессии

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i \ln y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \ln y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln y_i - \frac{1}{n} b \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Логарифмическая регрессия

$$\tilde{y} = a + b \ln x$$

$$x' = \ln x \qquad y' = y$$

Параметры уравнения логарифмической регрессии

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{1}{n} b \sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

Решение задач на компьютере

Microsoft Excel

Вычисление выборочной средней

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad \bar{x} = СРЗНАЧ(массив\ x)$$

Выборочная дисперсия (вариация)

$$d_B = D_B = \mathrm{var}(x) = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

$$d_B = ДИСПР(массив\ x)$$

Исправленная дисперсия

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} \cdot d_B = \frac{\sum \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2\right]$$

$$S_x^2 = ДИСП(массив\ x)$$

Стандартное отклонение

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

$$S_x = СТАНДОТКЛОН(массив\ x)$$

Коэффициент корреляции Пирсона

$$r_{xy} = \sqrt{\frac{\sum\left(\tilde{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) \cdot \left(\overline{y^2} - \bar{y}^2\right)}}$$

$$r_{xy} = PEARSON(массив\ x, массив\ y) =$$

$$= КОРРЕЛ(массив\ x, массив\ y)$$

Коэффициенты уравнения регрессии

a = ОТРЕЗОК (массив x, массив y)

b = НАКЛОН (массив x, массив y)

t- критическое Стьюдента

t = СТЬЮДРАСПОБР (α; $n-2$; 2)

F – критическое Фишера значимости коэффициента детерминации

$$F_{критич.} = FРАСПОБР\ (\alpha;\ 1;\ n\text{-}2)$$