Теорія ймовірностей

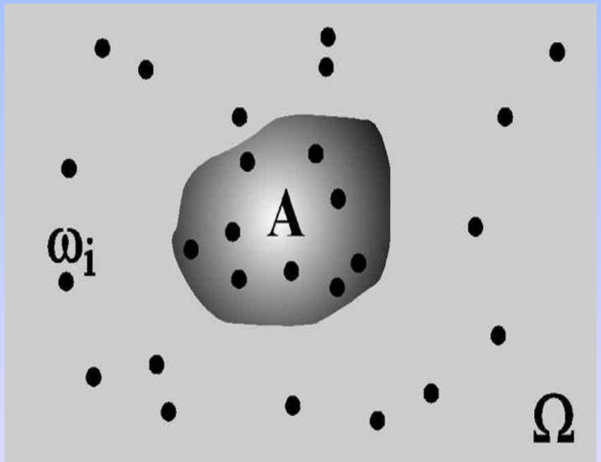
Лекція 5

Основні поняття теорії ймовірностей

Експеримент (випробування) – може повторюватися багаторазово при незмінних умовах, при цьому результат експерименту в кожному конкретному випадку точно передбачити неможливо

Результат експерименту (елементарна подія)

Множина всіх результатів експерименту



Подія – підмножина множини всіх результатів

Повна група подій – сукупність всіх подій, які можуть відбутися в даному випробуванні

ПРИКЛАД ВИКОРИСТАННЯ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ

Кубик кладеться в стаканчик, струшується, з стаканчика викочується на стіл і котиться до повної зупинки.

Результат: кількість точок на верхній грані, наприклад, $\omega_i = 2 \quad i = 1,...,6$
Множина всіх результатів –

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

A – випала парна кількість очок

B – випала непарна кількість очок

C – выпало більше 3 очків

$$A = \{2,4,6\} \qquad B = \{1,3,5\} \qquad C = \{4,5,6\}$$

Випадкова подія - це подія, яка за рівних умов може відбутися, а може і не відбутися в даному випробуванні, тобто її появу не можна гарантувати

ВИДИ ПОДІЙ

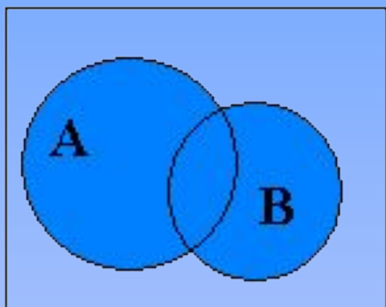
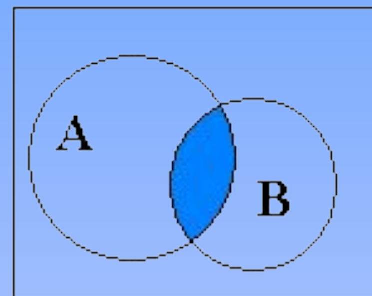
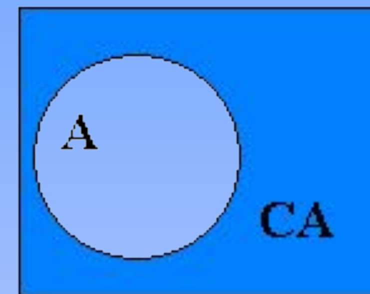
ПОДІЇ

- ДОСТОВІРНА
  (відбудеться обов'язково)
- **НЕМОЖЛИВА**
  (не відбудеться ні при яких обставинах)
- ВІРОГІДНА (ВИПАДКОВА)
  (може статися, а може і ні)

ПОДІЇ

- **СУМІСНІ-НЕСУМІСНІ**
- **ЗАЛЕЖНІ-НЕЗАЛЕЖНІ**
- **РІВНОМОЖЛИВІ**

ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ. ДІАГРАМИ ЕЙЛЕРА

		
Сума подій	**добуток**	**протилежна подія**
або … або	**і … і**	**(хоча б один) – (жодного)**
$A+B=\Omega$	$A\cdot B=\varnothing$	$\overline{A}=B$
$A+C=D$ $D=\{2,4,5,6\}$	$A\cdot C=E$ $E=\{4,6\}$	$\overline{C}=G$ $G=\{1,2,3\}$
$A=\{2,4,6\}$	$B=\{1,3,5\}$	$C=\{4,5,6\}$

<u>Класичне визначення ймовірності</u>

Ймовірність *події дорівнює відношенню кількості виходів, що сприяють події, до загальної кількості виходів, тобто*

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Ймовірність $P(A)$ може приймати значення від 0 до 1:

$$0 \le P(A) \le 1$$

ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ И ПРИМЕРЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Перестановки	*n* місць *n* об’єктів	$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ $0! = 1$
Сполучення $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	Вибір *m* об’єктів з *n* об’єктів; порядок не важливий	$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} =$ $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$
Розміщення $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	Вибір *m* об’єктів з *n* об’єктів; порядок важливий	$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} =$ $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6}{1} = 30$
Розміщення з повтореннями	*m* місць *n* об’єктів	з цифр 1 і 2 скласти 4-х значні номери $2^4 = 16$ 1111 1121 1222 1112 1211 і т.д. 1122 1212

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

- *Імовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

- **Наслідок.** *Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:*

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

- <u>Зауваження.</u> Якщо ймовірність подій позначена як p, то ймовірність протилежної події позначають як q, тоді:

$$p+q=1$$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Ймовірність реалізації однієї із двох сумісних випадкових подій, дорівнює сумі ймовірностей цих подій, без ймовірності їхньої спільної появи, тобто:

- $P(A \text{ або } B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Теорема множення ймовірностей

- Імовірність події , обчислена за умови, що відбулася інша подія , називається ***умовною ймовірністю*** події А і позначається $P_B(A)$,
- або $P\left(A/B\right)$

- Можливість спільної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену в припущенні, що перша вже відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

- Зокрема, для <u>незалежних подій</u>:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

тобто ймовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Імовірність появи хоча б однієї події

- Імовірність настання події A, що полягає в появі хоч би однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

Формула повної ймовірності

- Ймовірність події A, що може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що утворюють **повну групу**, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) \quad ,$$

де

$$P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$$

Повторні незалежні випробування

Схема випробувань Бернуллі: тільки два можливих результату – «успіх» та «невдача». Ймовірність успіху p і ймовірність невдачі q, $p+q=1$

- **Формула Бернуллі.** Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події А дорівнює p, подія настане рівно m раз (байдуже, в якій послідовності), дорівнює:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}.$$

Формула Пуассона:

- Використовують для рішення задач за схемою Бернулі, коли $n \geq 10$ і $p < 0{,}1$

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m e^{-\mu}}{m!}$$

$$\mu = np$$

Формула Муавра-Лапласа

- Використовують для рішення задач за схемою Бернулі, коли $n \geq 10$ і $p > 0{,}1$

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

- Для інтервала значень:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!