

ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

ЛЕКЦИЯ 13

**Математический факультет. Кафедра математического
моделирования**

Цель лекции – овладеть основными понятиями теории графов

Термины

Базовые понятия:

- множество,
- бинарное отношение

Ключевые слова:

- граф,
- вершина,
- ребро,
- дуга,
- смежность,
- инцидентность,
- степень вершины,
- мультиграф,
- псевдограф,
- СВЯЗНОСТЬ

Литература

- Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.
- Глускин Л.М., Шор Л.А., Шварц В.Я. Задачи и алгоритмы комбинаторики, и теории графов. Донецк, ДПИ, 1982. 368 с.
- Харари Ф. Теория графов: Пер. с англ. В.П. Козырева / Под ред. Г.П. Гаврилова. М.: Мир, 1973. 300 с.
- Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 263-268.
Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 47-62 с.

Теория графов – раздел дискретной математики. 1

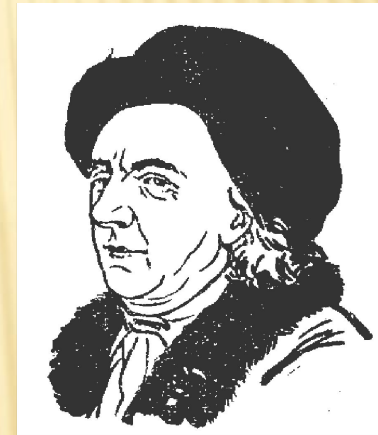
Природа говорит языком математики: буквы этого языка – круги, треугольники и иные математические фигуры
Г. Галилей

Теория графов связана с проектированием вычислительных машин, комбинаторным анализом, служит математической моделью для всякой системы, содержащей бинарное отношение



Теория графов – раздел дискретной математики. 2

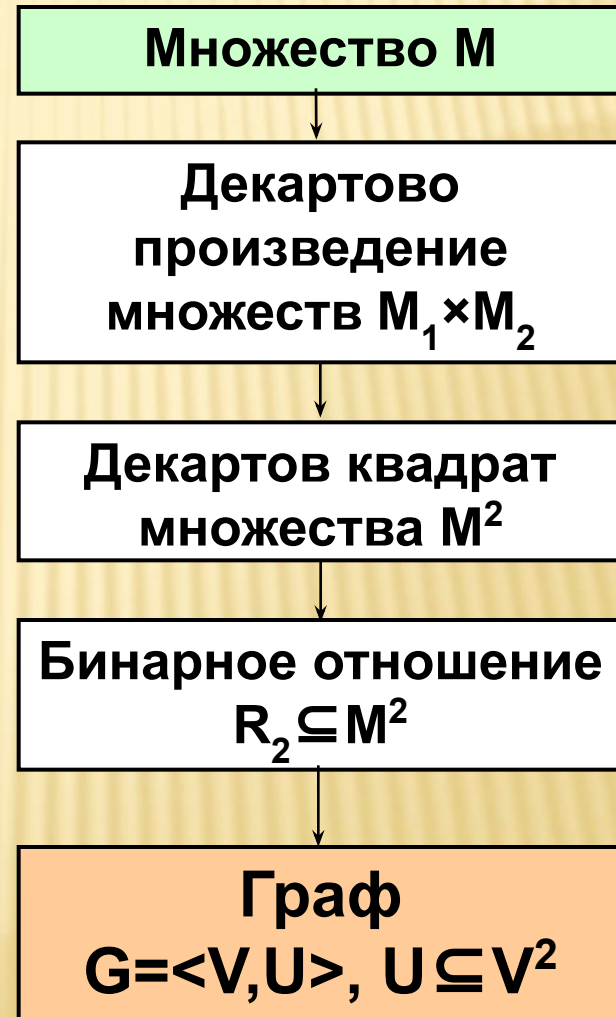
- ▣ В теории графов решалось много проблем, достойных внимания самых искушенных математиков
- ▣ Основателем теории графов считается Леонард Эйлер, который доказал невозможность маршрута прохождения всех четырех частей суши в задаче о кенигсбергских мостах (1736)
- ▣ Графы обладают эстетической привлекательностью благодаря их представлению в виде диаграмм



Леонард Эйлер

Связь теории графов с теорией множеств

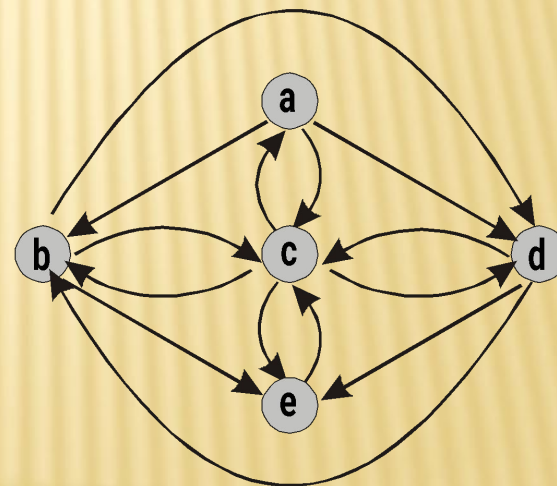
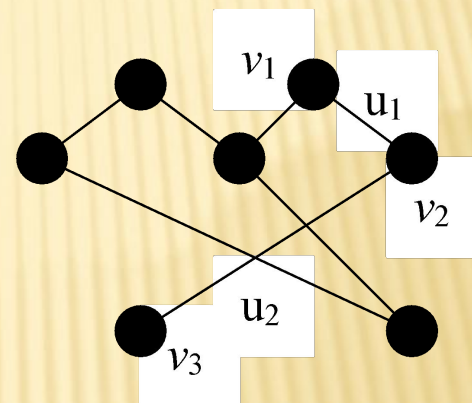
- **Граф имеет теоретико-множественное представление**
- **Граф определяется как множество вершин и множество ребер**
- **Множество ребер является бинарным отношением на множестве вершин**



Определение графа

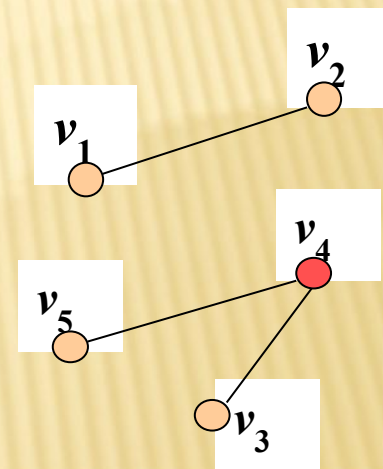
- Граф $G = \langle V, E \rangle$ – совокупность вершин V и ребер E , где множество E представляет собой бинарное отношение на множестве вершин:
 $|V| = n, E \subseteq V^{(2)}$

- Графом часто называют диаграмму, которой он представляется



Смежность и инцидентность

- ▣ **Вершины**, соединяемые некоторым ребром, называются **смежными**
- ▣ **Ребра**, имеющие общую вершину, называются **смежными**
- ▣ **Вершина** называется **инцидентной** ребру, если она является его началом или концом
- ▣ **Ребра**, инцидентные одной и той же вершине, называются **смежными**
- ▣ Понятие смежности относится к однородным объектам (вершинам или ребрам)
- ▣ Понятие инцидентности – к разнородным (вершинам и ребрам)
- ▣ Количество ребер, инцидентных данной вершине, называется **степенью** вершины и обозначается **deg v**

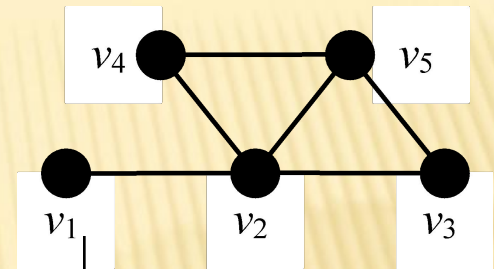


$$(v_5, v_4) \text{adj}(v_4, v_3)$$

$$\text{deg} v_4 = 2$$

Маршруты на графах

- **Маршрут** или **путь** на графе – последовательность вида $v_1, u_1, v_2, u_2, \dots \dots u_n, v_{n+1}$, где стоящие рядом ребра и вершины инцидентны
- **Цепь** – маршрут, в котором нет повторяющихся ребер
- **Простая цепь** – маршрут, в котором нет повторяющихся вершин и ребер
- **Цепь**, у которой первая и последняя вершины совпадают, называется **замкнутой**
- Замкнутая цепь называется **циклом**
- Замкнутый маршрут называется **простым циклом**, если все его n вершин различны и $n \geq 3$



маршрут
 v_1, v_2, v_5, v_2, v_3
не является
цепью;

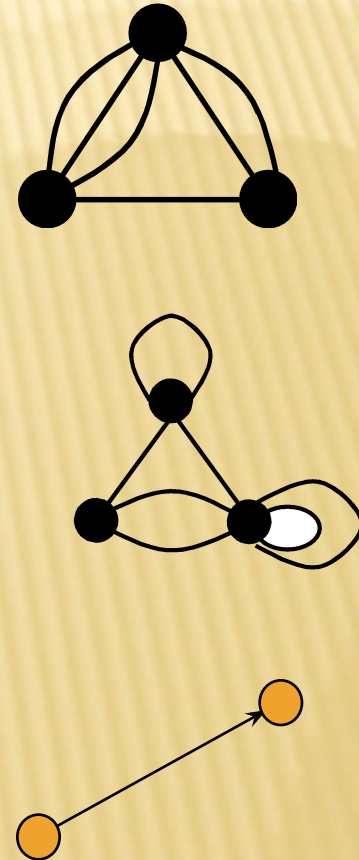
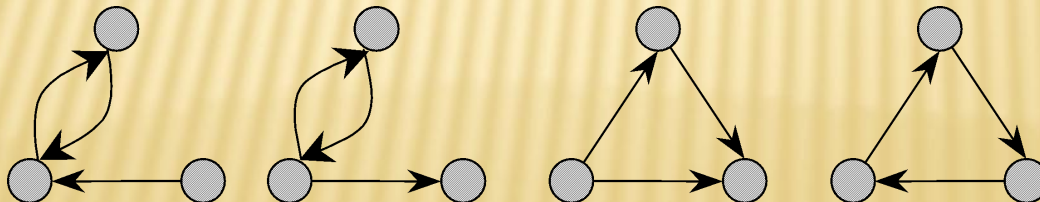
$v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3$ –
непростая
цепь;

v_1, v_2, v_5, v_4 –
простая цепь;

v_2, v_4, v_5, v_2 –
простой цикл

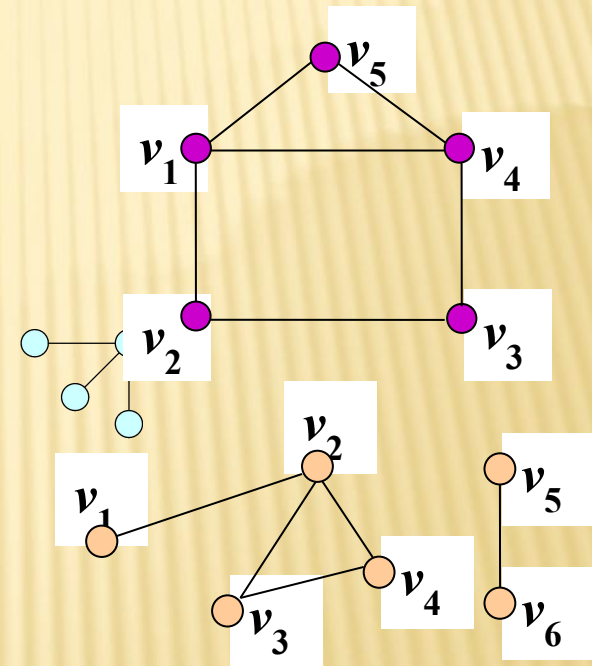
Типы графов

- **Мультиграф** – граф, в котором нет петель, но пары вершин могут соединяться более, чем одним ребром. Эти ребра называются **кратными**
- **Псевдограф** – граф с петлями и кратными ребрами, т.е. мультиграф с петлями
- **Ориентированный граф (орграф)** состоит из конечного непустого множества вершин V и заданного набора U упорядоченных пар различных вершин (ребер)
- **Дуга** – ориентированное ребро
- **Направленный граф** – это орграф, не имеющий симметричных пар ориентированных ребер



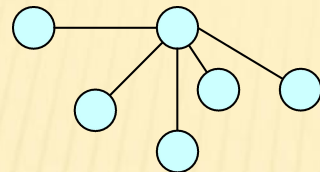
Связность и деревья

- Граф называется **связным**, если любые две его вершины можно соединить простой цепью
- Максимальный **связный** подграф графа называется **компонентой связности**
- Связный граф без циклов называется **деревом**

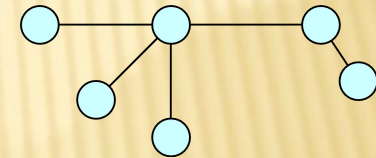


Деревья – пример

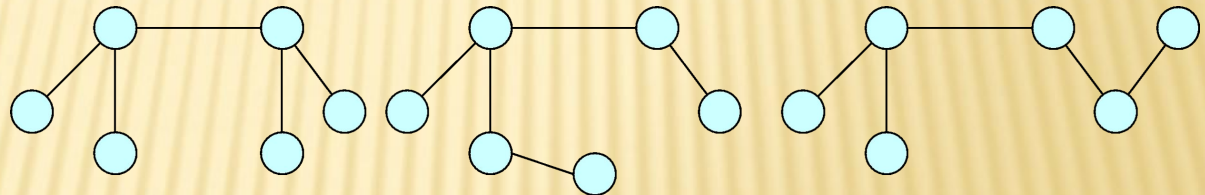
- Описать все деревья, содержащие 6 вершин



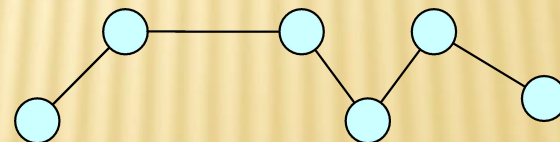
- Максимальная степень вершины 5



- Максимальная степень вершины 4



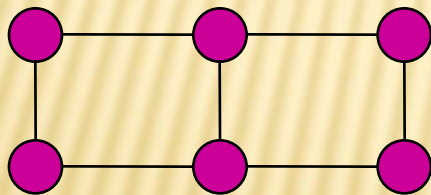
- Максимальная степень вершины 3



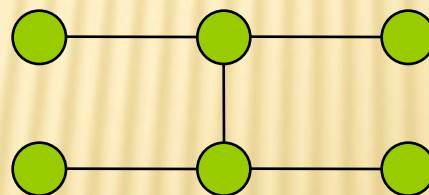
- Максимальная степень вершины 2

Подграфы графов

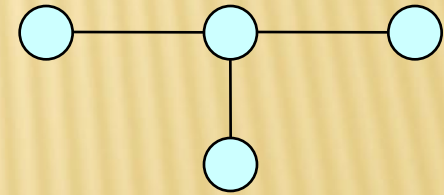
- **Подграфом** T графа G называется граф, у которого все вершины и ребра принадлежат графу G ;
 G – **надграф** графа T
- **Остовный подграф** (**остов** или **частичный граф**) – связный подграф графа G , содержащий все его вершины
- Для любого подмножества $S \subseteq V$ вершин графа **порожденным подграфом** $\langle S \rangle$ называется максимальный подграф графа G , множеством вершин которого является S



G

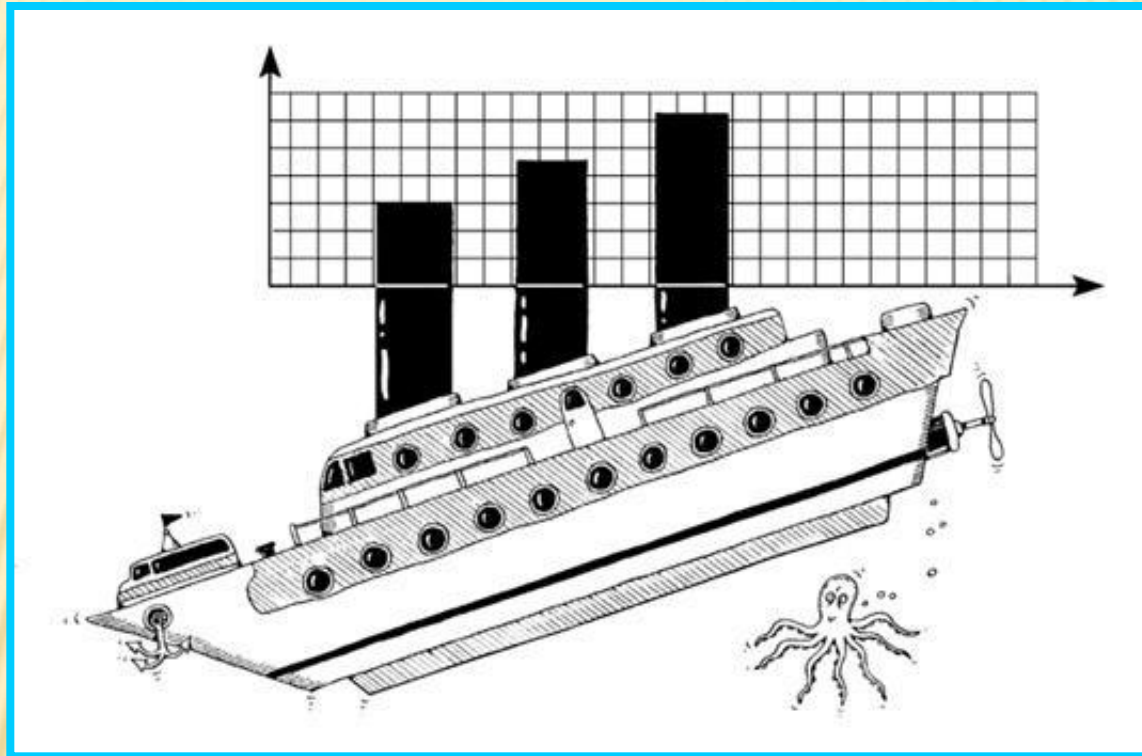


T



$\langle S \rangle$

TIME-OUT



Изоморфизм графов. 1

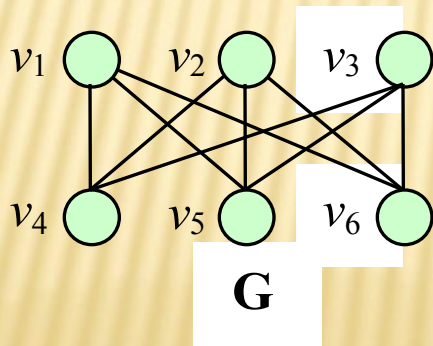
- **Изоморфизм** – взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее свойства объектов
- Известны: изоморфизм множеств, изоморфизм упорядоченных множеств, изоморфизм алгебр
- **Изоморфизм графов** – взаимно-однозначное соответствие между множествами вершин и множествами ребер, сохраняющее смежность

Изоморфизм графов. 2

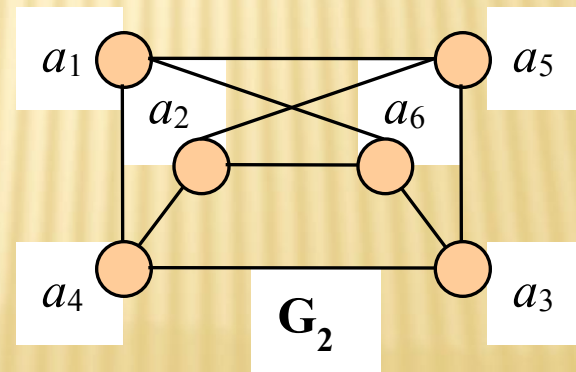
- Def:** два графа $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ называются **изоморфными**, если между множествами их вершин V_1 и V_2 существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее смежность:

$$f : V_1 \rightarrow V_2, \{a, b\} \in U_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in U_2$$

- Пример:** графы G_1 и G_2 изоморфны. Изоморфизм устанавливается при помощи соответствия $f : v_i \leftrightarrow a_i, i = \overline{1,6}$



1



Операции над графами

- Для графов $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ с непересекающимися множествами вершин (носителей графов) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и ребер (сигнатур графов) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ вводятся операции:

объединение

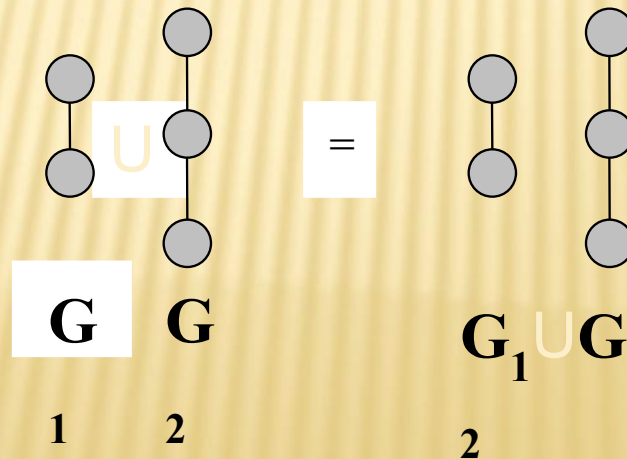
соединение

декартово произведение

КОМПОЗИЦИЯ

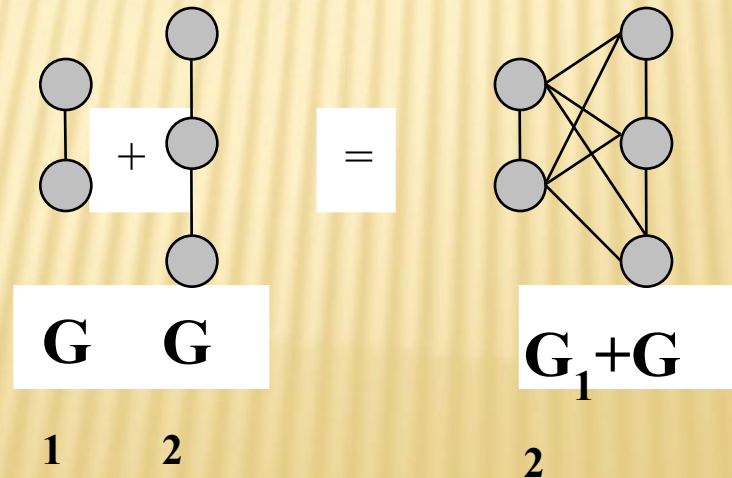
Операции над графами: объединение

- Для графов $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ с непересекающимися множествами вершин (носителей графов) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и ребер (сигнатур графов) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ операция **объединение** $G_1 \cup G_2$ понимается в смысле теоретико-множественного объединения носителей и сигнатур $V_1 \cup V_2$, $U_1 \cup U_2$.



Операции над графами: соединение

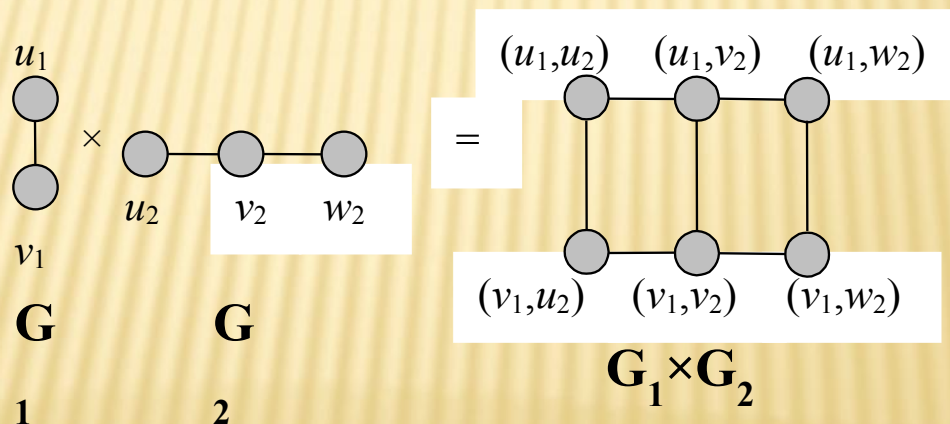
- Для графов $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ с непересекающимися множествами вершин (носителей графов) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и ребер (сигнатур графов) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ операция **соединение** $G_1 + G_2$ заключается в объединении носителей и сигнатур $V_1 \cup V_2$, $U_1 \cup U_2$ и всех ребер, соединяющих вершины множеств V_1 , V_2 :



Операции над графами: декартово произведение

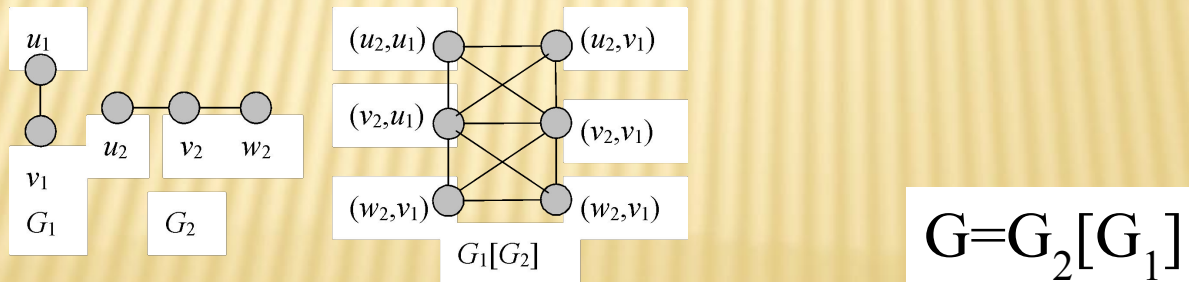
- Для графов $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ с непересекающимися множествами вершин (носителей графов) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и ребер (сигнатур графов) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ операция **декартово произведение** $G_1 \times G_2$ определяется следующим образом:

$$G_1 \times G_2 = \langle V, U \rangle, V = V_1 \times V_2, \forall u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V, \\ u \text{ adj } v \Leftrightarrow (u_1 = v_1, u_2 \text{ adj } v_2) \text{ или } (u_2 = v_2, u_1 \text{ adj } v_1)$$



Операции над графами: композиция

- Для графов $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ с непересекающимися множествами вершин (носителей графов) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и ребер (сигнатур графов) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ результат композиции $G = G_1[G_2]$ имеет в качестве множества вершин $V_1 \times V_2$ и вершина $u = (u_1, u_2)$ смежна с $v = (v_1, v_2)$ тогда и только тогда, когда $[u_1 \text{ adj } v_1]$ или $[u_1 = v_1 \text{ и } u_2 \text{ adj } v_2]$:



Операции над графами: количество вершин и ребер

- Если $G_1 = \langle V_1, U_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, U_2 \rangle$ – это (p_1, q_1) - и (p_2, q_2) -графы соответственно, то для каждой из определенных выше операций можно найти число вершин и ребер в получающемся графе:

Операции	Число вершин	Число ребер
$G_1 \boxtimes G_2$	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2$
$G_1 + G_2$	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2 + p_1 p_2$
$G_1 \times G_2$	$p_1 \cdot p_2$	$p_1 q_2 + p_2 q_1$
$G_1[G_2]$	$p_1 \cdot p_2$	$p_1 q_2 + p_2 q_1$

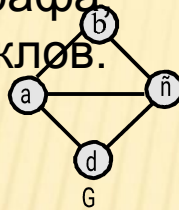
Тест-вопросы

1. Дерево есть:

- А) связный граф,
- Б) граф без циклов,
- В) остовный подграф графа
- Г) связный граф без циклов.

2. Простая цепь это:

- А) маршрут, где нет повторяющихся вершин,
- Б) маршрут, где нет повторяющихся ребер,
- В) маршрут, где нет повторяющихся вершин и ребер.



3. Если любые две вершины графа можно соединить простой цепью то граф называется:

- А) связным,
- Б) несвязным,
- В) деревом,
- Г) остовом.

4. Две вершины графа, соединенные одним ребром, называются:

- А) инцидентными;
- Б) смежными.

5. Какие из графов являются подграфами данного графа G:

