

Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость.

Плоскости обозначают греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$



АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ



```
graph TD; A[АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ] --> B[Какова бы ни была плоскость, существуют точки, которые принадлежат этой плоскости, и точки, которые ей не принадлежат.]; A --> C[Если две разные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.]; A --> D[Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.];
```

Какова бы ни была плоскость, существуют точки, которые принадлежат этой плоскости, и точки, которые ей не принадлежат.

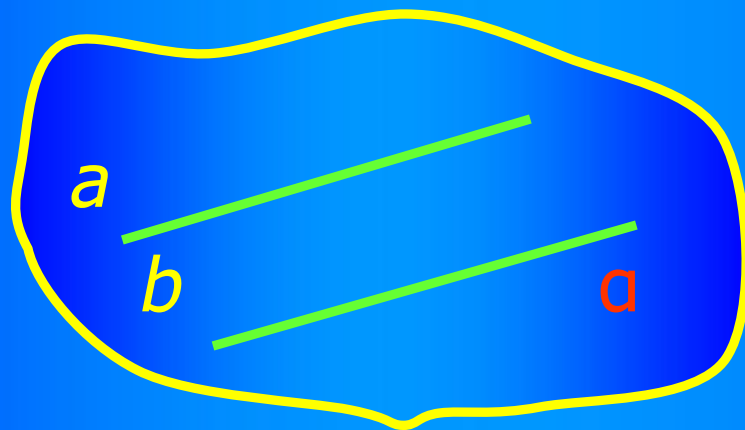
Если две разные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Взаимное размещение прямых в пространстве

- параллельные;
- скрещивающиеся;
- пересекающиеся.

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

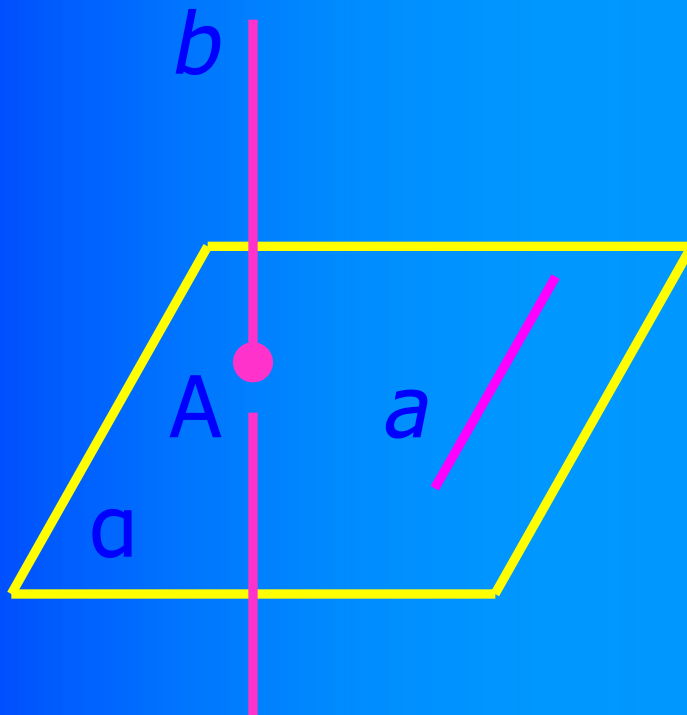


$$a \in a$$

$$b \in a$$

$$a \parallel b$$

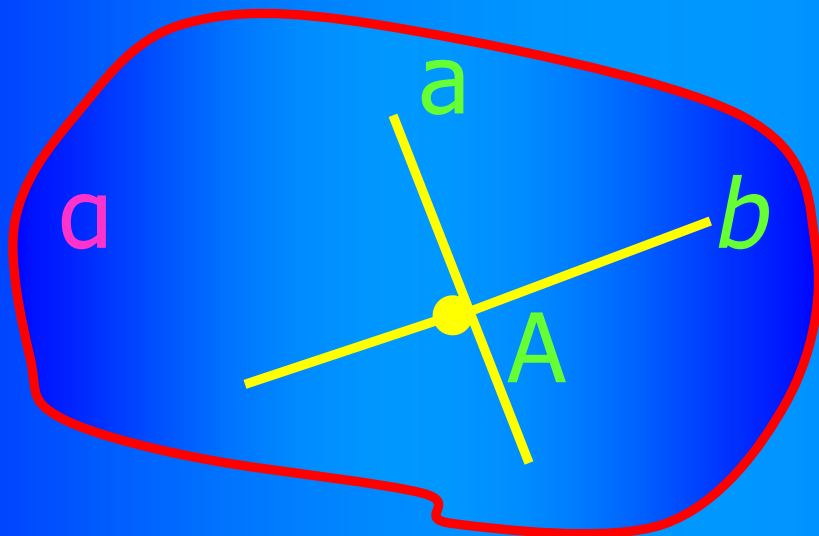
Две прямые называются скрещивающимися, если они не пересекаются и не лежат в одной плоскости.



$$a \in \alpha$$

$$b \notin \alpha$$

Две прямые называются пересекающимися, если они имеют общую точку. Если они пересекаются под прямым углом, то они перпендикулярные.



$$a \cap b = A$$

$$a \in a$$

$$b \in a$$

Взаимное размещение плоскостей в пространстве:

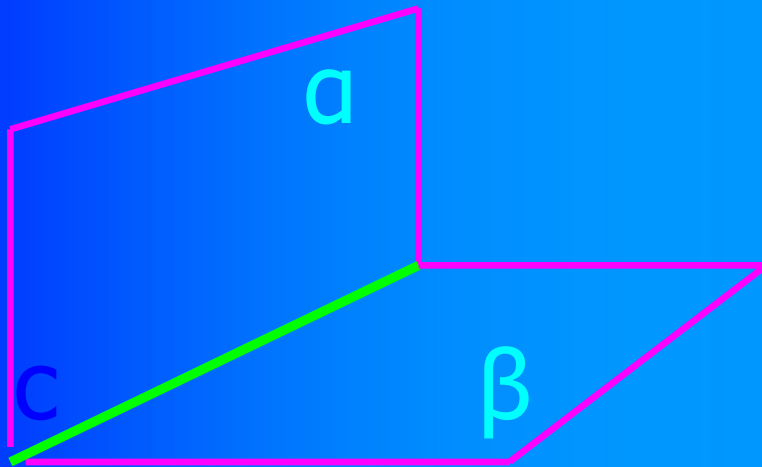
- параллельные;
- пересекающиеся.

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.



$$\alpha \parallel \beta$$

Две плоскости пересекаются,
если они имеют общую прямую.

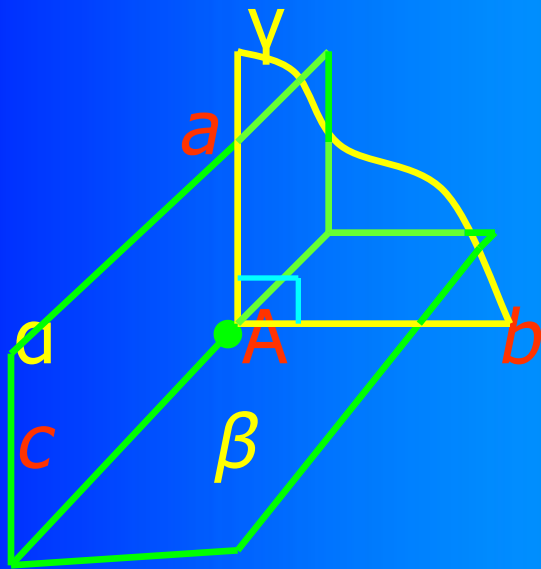


$$\alpha \cap \beta = \gamma$$

$$\gamma \in \alpha$$

$$\gamma \in \beta$$

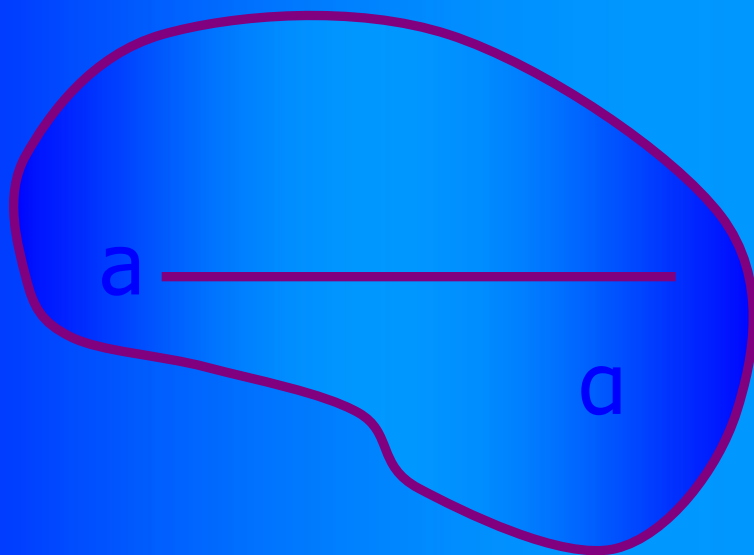
Две пересекающиеся плоскости, называются перпендикулярными, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.



$$\begin{aligned} \gamma \cap \alpha &= a, \quad \gamma \perp a \\ \gamma \cap \beta &= b, \quad a \perp b \end{aligned}$$

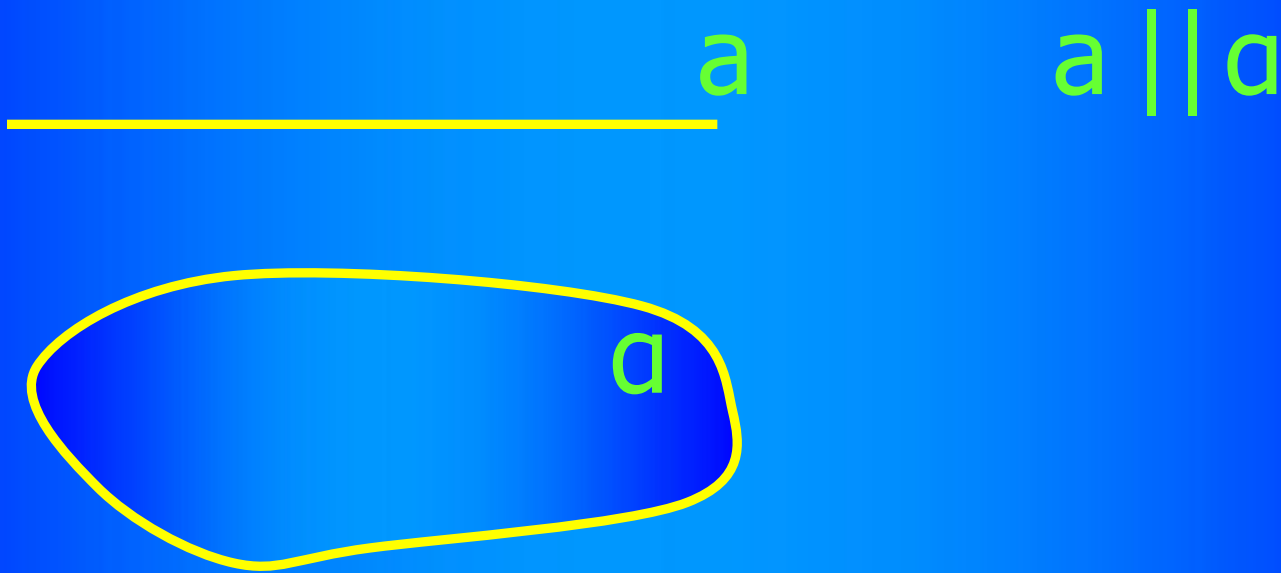
WYOMING STATE COLLEGE OF AGRICULTURE AND MECHANICAL ARTS

Прямая лежит в ПЛОСКОСТИ

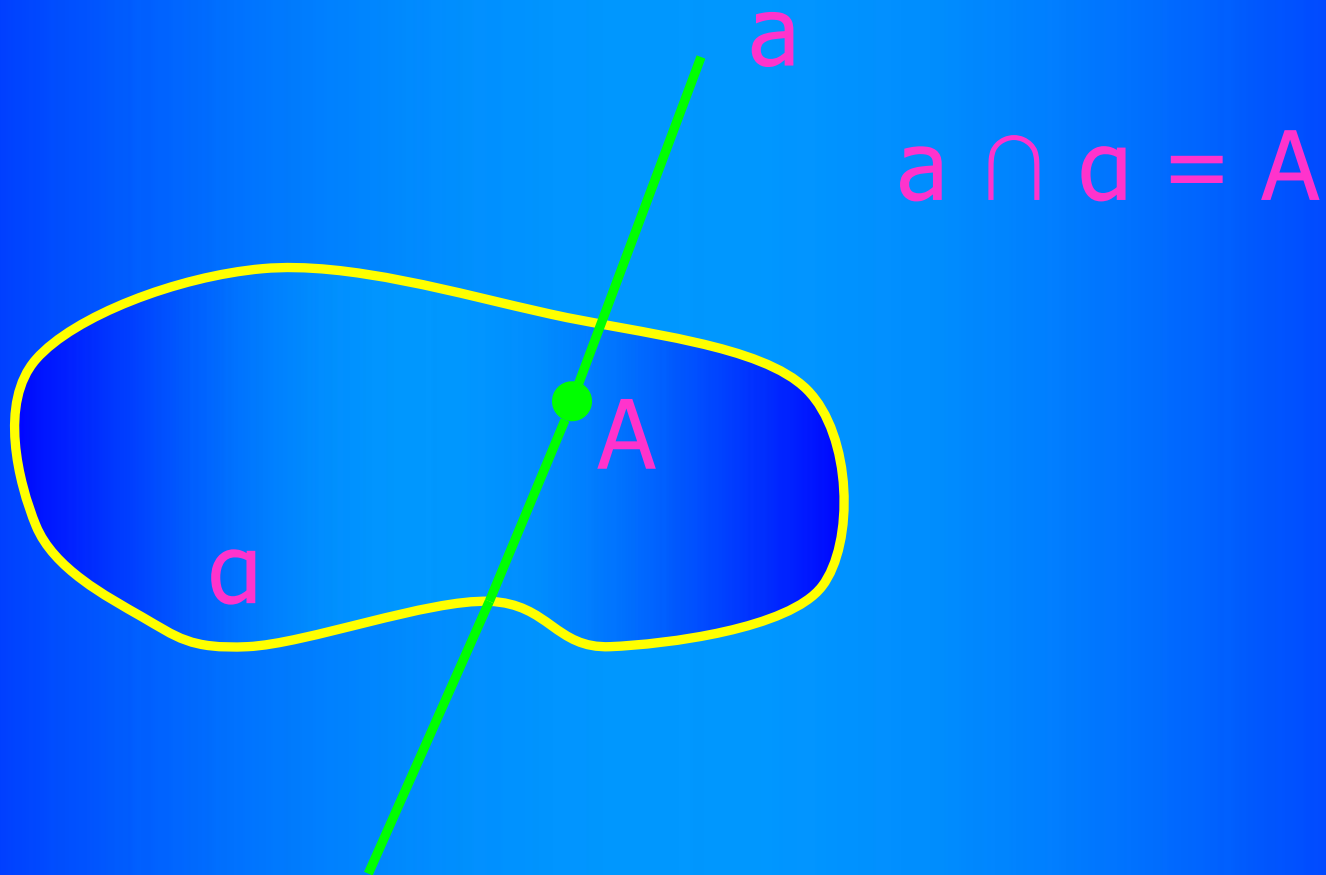


$$a \in a$$

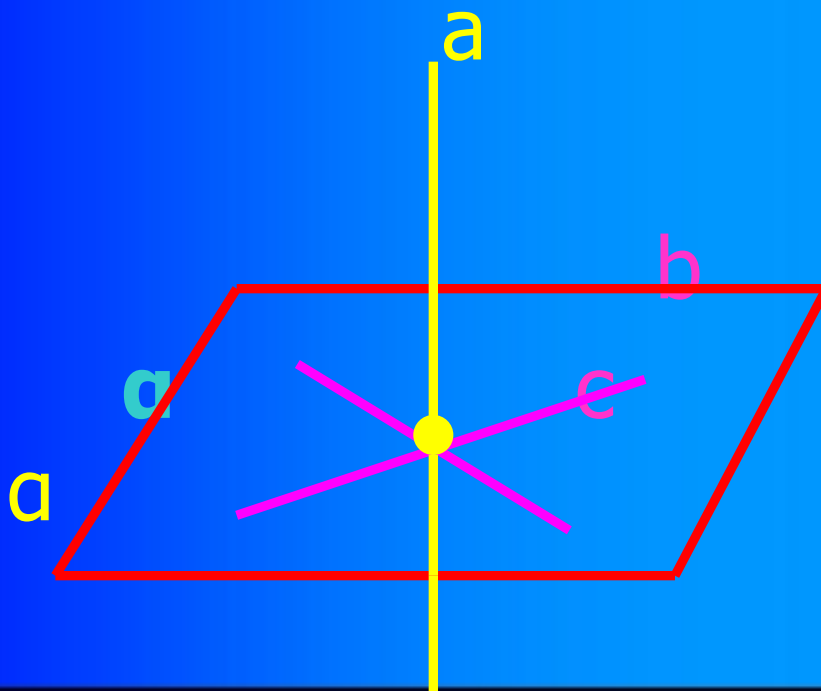
Прямая и плоскость называются
параллельными, если они не
пересекаются.



Прямая пересекает плоскость



Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку пересечения.




$$a \perp b$$

$$a \perp c$$

$$a \perp a$$

$$a \notin a, b \in a, c \in a$$

Как можно провести плоскость в пространстве?



Через две
параллельные
прямые

Через две
пересекающиеся
прямые

Через прямую
и точку,
не лежащую
на ней

Через три
точки,
не лежащие
на одной
прямой

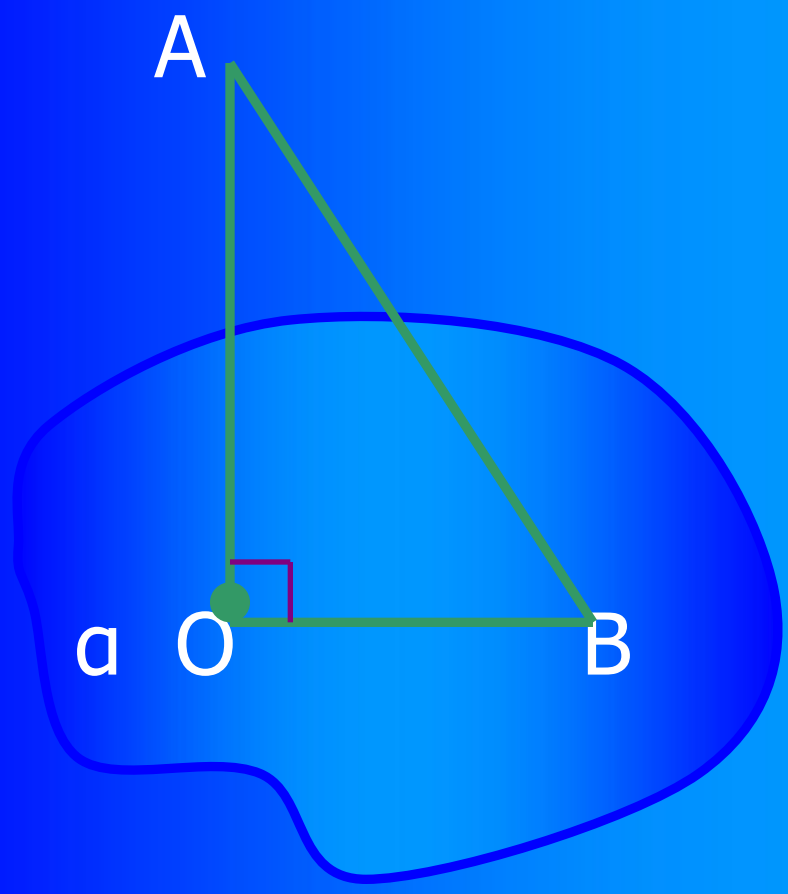
ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*.

Наклонной, проведённой из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведённых из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной*.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.



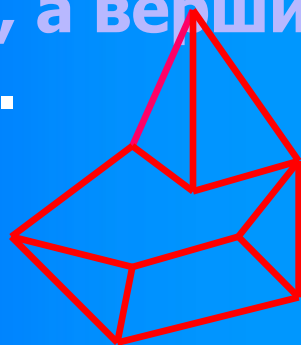
AO - перпендикуляр

AB - наклонная

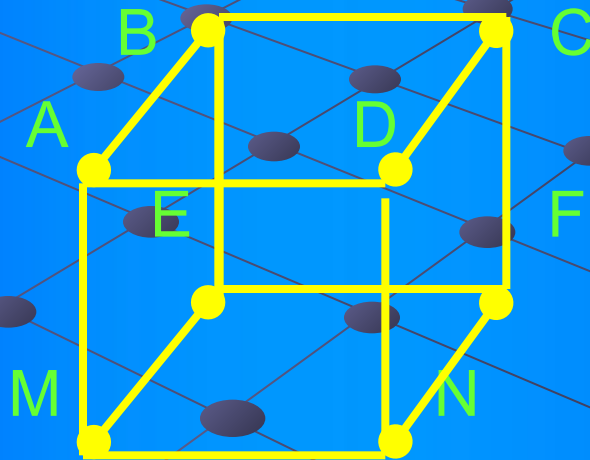
OB - проекция
наклонной

$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

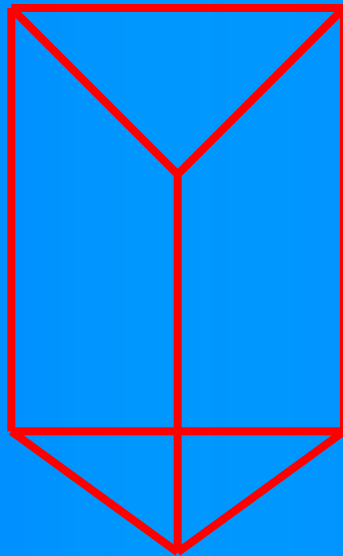
Многогранник – это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. Многогранник называется **выпуклым**, если он лежит с одной стороны от плоскости каждого из плоских многоугольников на его поверхности. Общая часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называется **гранью**. Грани выпуклого многогранника являются плоскими выпуклыми многоугольниками. Стороны граней называются **рёбрами** многогранника, а вершины – **вершинами** многогранника.



Куб – это выпуклый многогранник. Его поверхность состоит из шести квадратов $ABCD$, $BEFC$, \dots . Они являются его гранями. Рёбрами куба являются стороны этих квадратов AB , BC , BE , \dots . Вершинами куба являются вершины квадратов A , B , C , D , E \dots . У куба шесть граней, двенадцать рёбер и восемь вершин.



Призмой называется многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников, лежащих в различных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.



Призма называется *прямой*, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется *наклонной*.

Прямая призма называется *правильной*, если её основания – правильные многоугольники.

Боковой поверхностью призмы называется сумма площадей боковых граней.

Полная поверхность призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

$$S_{\text{бок.}} = p \cdot \ell$$

p – периметр основания

ℓ – боковое ребро

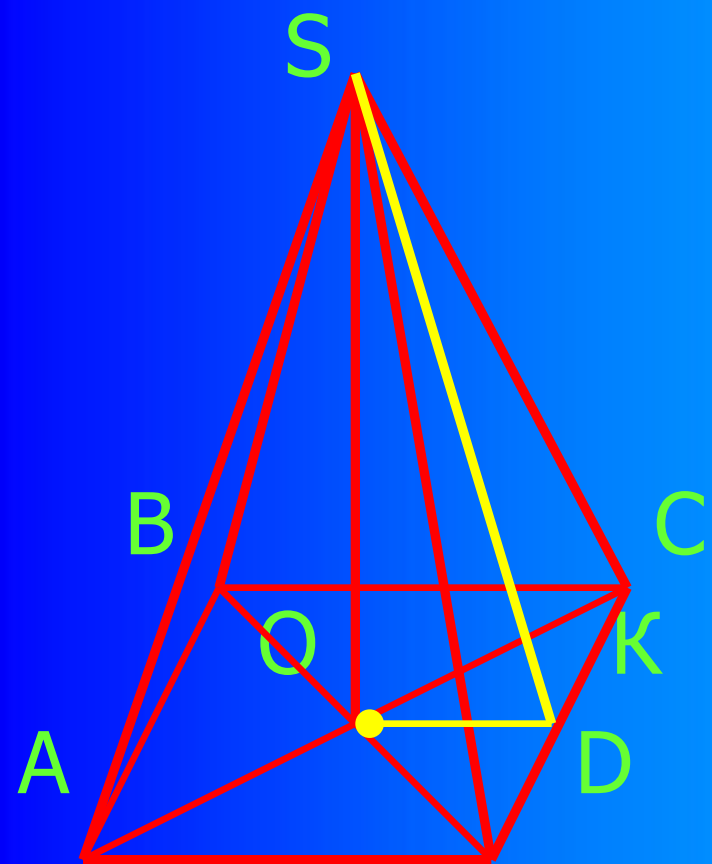
$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot \ell$$

Пирамидой называется многогранник, состоящий из плоского многоугольника – ***основания пирамиды***, точки, не лежащей в плоскости основания, – ***вершины пирамиды*** и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются ***боковыми рёбрами***.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.



SO – высота

S – вершина

$ABCD$ – основание

$\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD,$

ΔSAD – боковые грани

$SA, SB \dots$ боковые рёбра

$AB, BC \dots$ рёбра основания

SK - апофема

Пирамида называется *правильной*, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая её высоту.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется *апофемой*.

Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

$$S_{\text{БОК.}} = \frac{p \cdot \ell}{2}$$

p – периметр основания

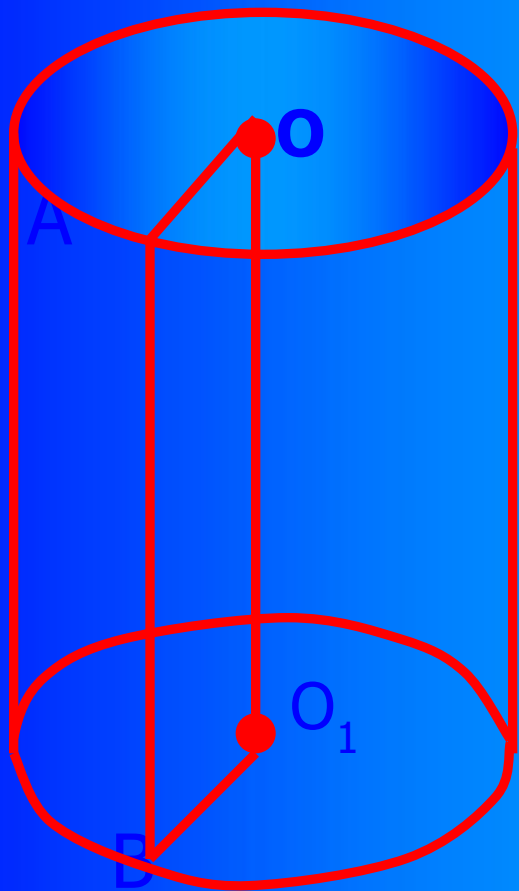
ℓ - апофема

$$S_{\text{ПОЛН.}} = S_{\text{БОК.}} + S_{\text{ОСН.}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{ОСН.}} \cdot H$$

H - высота

Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, - *образующими цилиндра*.



AB – образующая

OO_1 – ось,

высота цилиндра (H)

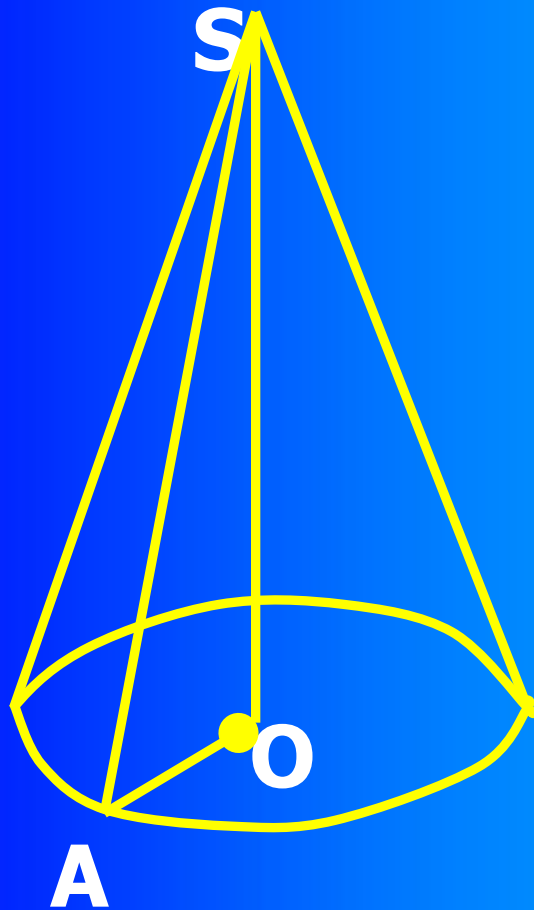
AO, BO_1 – радиусы (r)

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi r \cdot H$$

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi rH + 2\pi r^2$$

$$V = \pi r^2 H$$

Конусом называется тело, которое состоит из круга – ***основания конуса***, точки, не лежащей в плоскости этого круга, - ***вершины конуса*** и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются ***образующими конуса***.



S – вершина

SO – высота, ось (**H**)

SA – образующая (**l**)

AO – радиус (**r**)

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi r l + \pi r^2$$

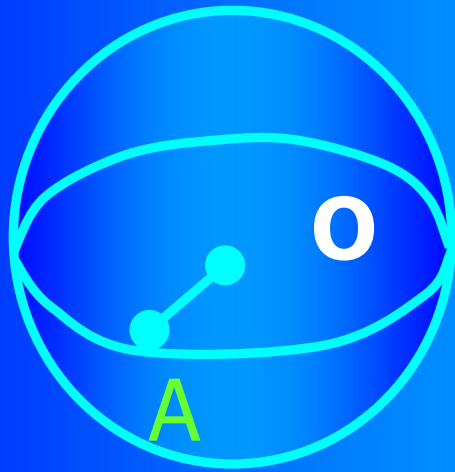
1

$$V = \frac{\pi r^2 H}{3}$$

3

Шаром называется тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем данного. Эта точка называется ***центром шара***, а данное расстояние ***радиусом шара***. Граница шара называется ***шаровой поверхностью***, или ***сферой***.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется ***диаметром***.



O – центр

AO – радиус

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$S_{\text{сферы}} = 4 \pi r^2$$