КИНЕМАТИКА

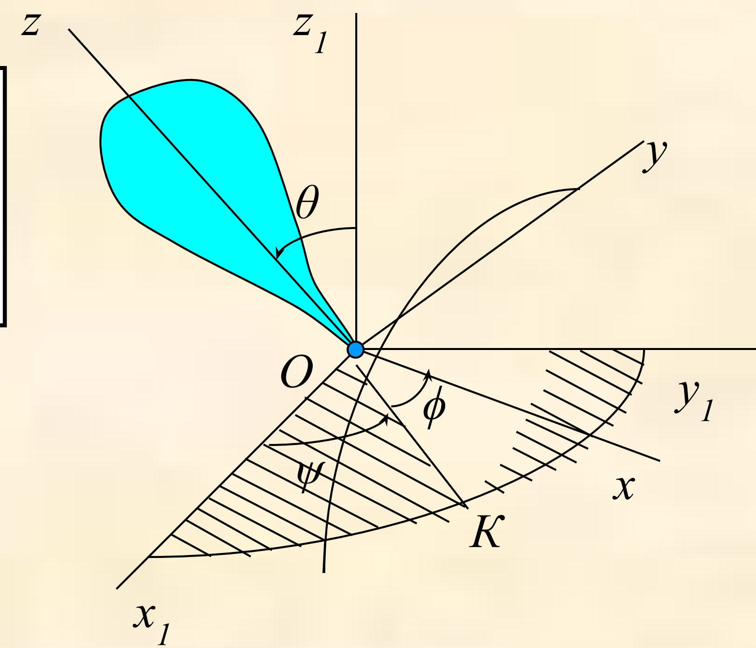
Сферическое движение твердого тела

Движение свободного твердого тела

Сферическое движения твердого тела

Уравнения сферического движения

<u>Опр.</u> Движение тела вокруг одной неподвижной точки называется сферическим движением.



Рассмотрим движение тела по отношению к двум системам отчета: неподвижной - $Ox_1y_1z_1$ и подвижной - $Oxyz$, движущейся вместе с телом.

Проведем две плоскости: Ox_1y_1 и Oxy.

Линия их пересечения OK называется *линией узлов*.

Положение подвижной системы координат $Oxyz$ по отношению к неподвижной $Ox_1y_1z_1$ определяется углами: $\phi = \angle KOx$, $\psi = \angle x_1OK$, $\theta = \angle z_1Oz$.

Углы ϕ , ψ , θ называются углами Эйлера и имеют следующие наименования: ϕ - *угол собственного вращения*, ψ - *угол прецессии*, θ - *угол нутации*.

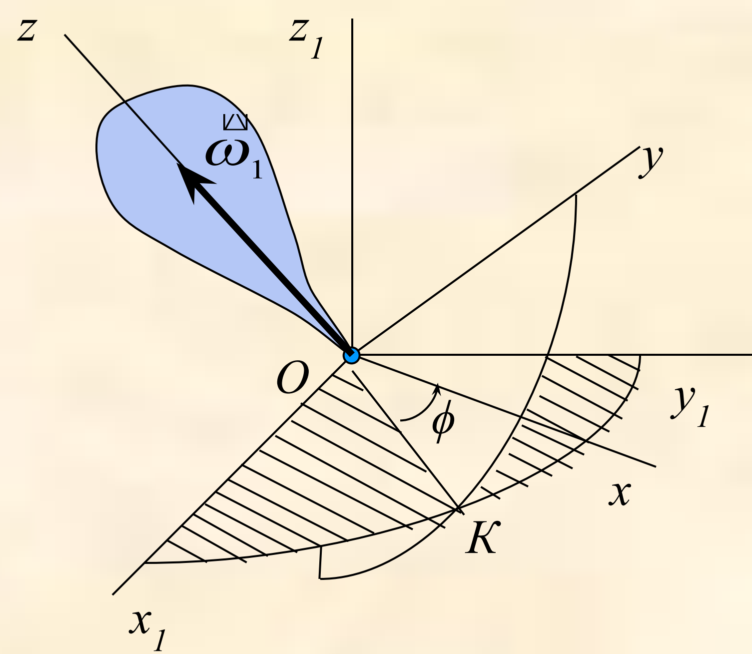
Чтобы знать движение тела надо знать значения углов ϕ, ψ, θ в любой момент времени, то есть зависимости:

$$\phi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t). \qquad (*)$$

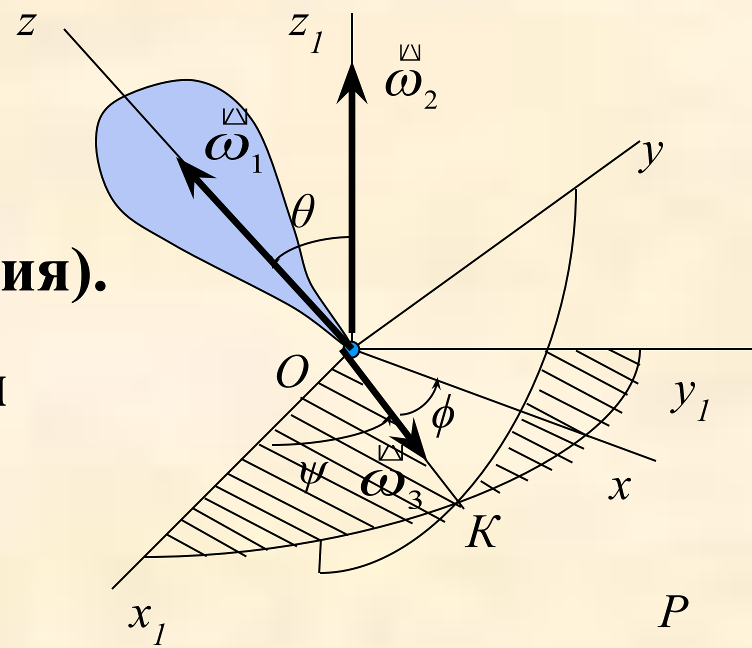
(*) – это *уравнения сферического движения твердого тела.*

Угловая скорость тела при его сферическом движении

При изменении угла ϕ тело вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\phi}$, которую можно представить в виде вектора $\vec{\omega}_1$, направленного вдоль оси Oz (собственное вращение).

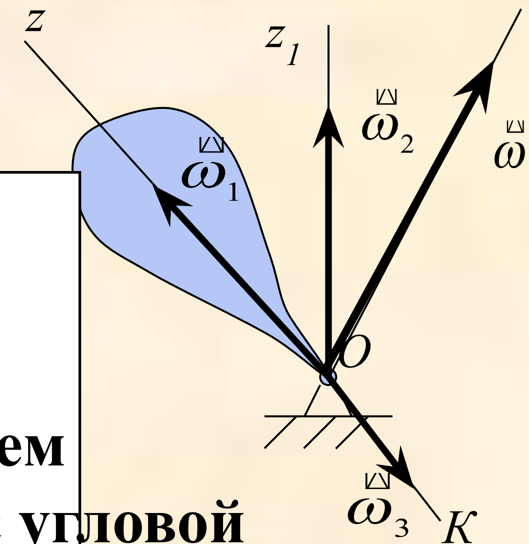


При изменении угла ψ тело вращается вокруг оси Oz_1 с угловой скоростью $\omega_2 = \dot{\psi}$, которую можно представить в виде вектора $\vec{\omega}_2$, направленного вдоль оси Oz_1 (прецессия).



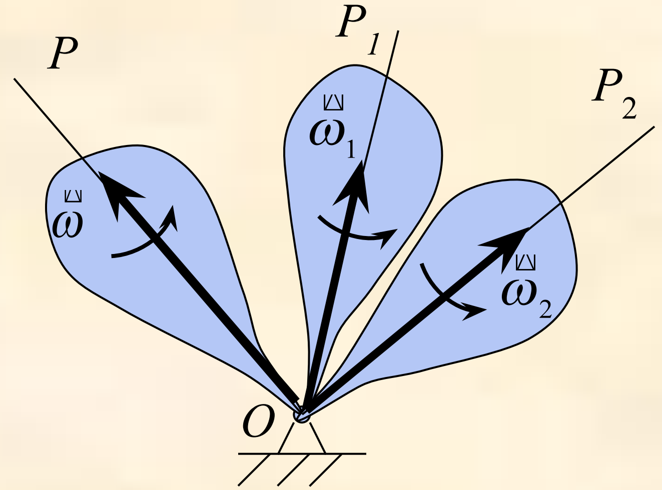
При изменении угла θ тело вращается вокруг линии узлов *OK* с угловой скоростью $\omega_3 = \dot{\theta}$, которую можно представить в виде вектора $\vec{\omega}_3$, направленного вдоль линии узлов *OK* (нутация).

<u>Вывод.</u> При сферическом движении тело одновременно вращается вокруг трех осей с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$.
Эти три вращения можно заменить вращением вокруг одной мгновенной оси вращения *OP* с угловой скоростью $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$.



Геометрическая картина сферического движения

В данный момент времени тело имеет угловую скорость $\vec{\omega}$ и поворачивается вокруг оси *OP*, которая называется *мгновенной осью вращения.*



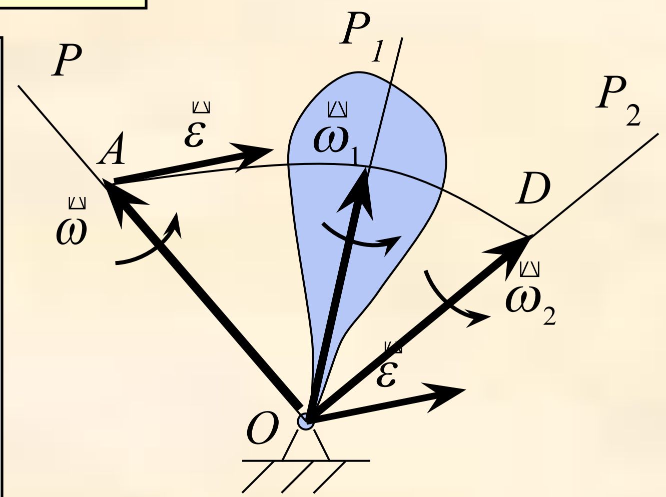
Ось *OP* также меняет свое положение и в момент времени t_1 будет занимать положение OP_1, а угловая скорость станет равной $\vec{\omega}_1$.

В момент времени t_2 ось будет занимать положение OP_2, а угловая скорость станет равной $\vec{\omega}_2$ и т. д.

<u>Вывод.</u> Сферическое движение слагается из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через неподвижную точку *O*.

Угловое ускорение тела

<u>Опр.</u> Векторная величина $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$, **(*)** **характеризующая изменение с течением времени угловой скорости и по модулю, и по направлению, называется *угловым ускорением* тела или *мгновенным угловым ускорением*.**



При изменении вектора $\vec{\omega}$ **его конец** ***A*** **будет описывать в пространстве некоторую кривую** ***AD*****, являющуюся годографом вектора** $\vec{\omega}$.

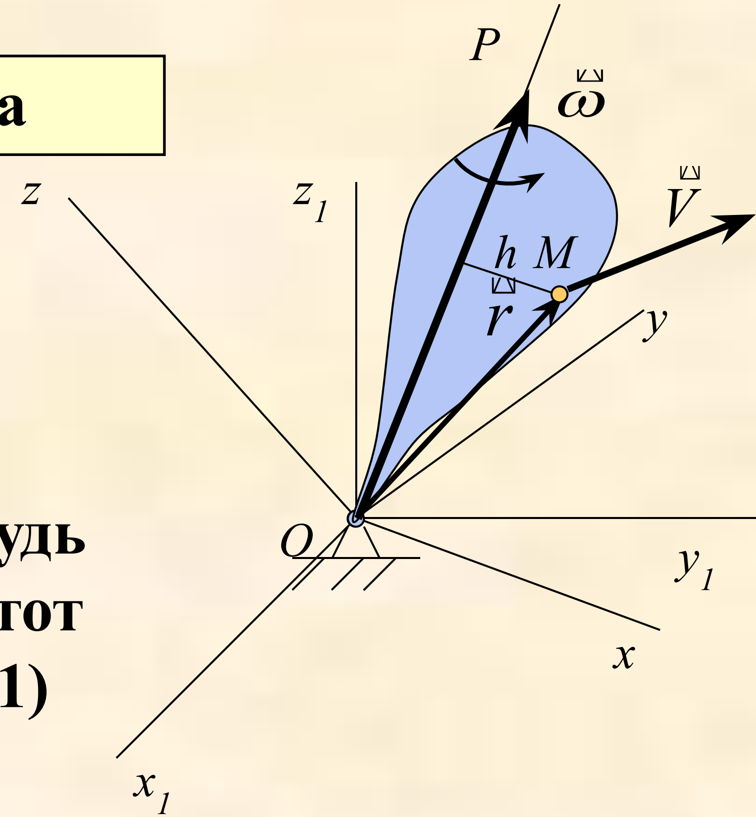
Сравнивая выражение (*) с равенством $\vec{V} = d\vec{r}/dt$, **видим, что угловое ускорение** $\vec{\varepsilon}$ **можно вычислять как скорость, с которой конец вектора** $\vec{\omega}$ **перемещается вдоль кривой** ***AD*****.**

В частности, направление $\vec{\varepsilon}$ **совпадает с направлением касательной к кривой** ***AD*** **в соответствующей точке.**

<u>Вывод.</u> При сферическом движении, в отличие от вращательного, направление вектора $\vec{\varepsilon}$ не совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$.

Скорость точки тела

В данный момент времени тело совершает элементарный поворот вокруг мгновенной оси вращения *OP* с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

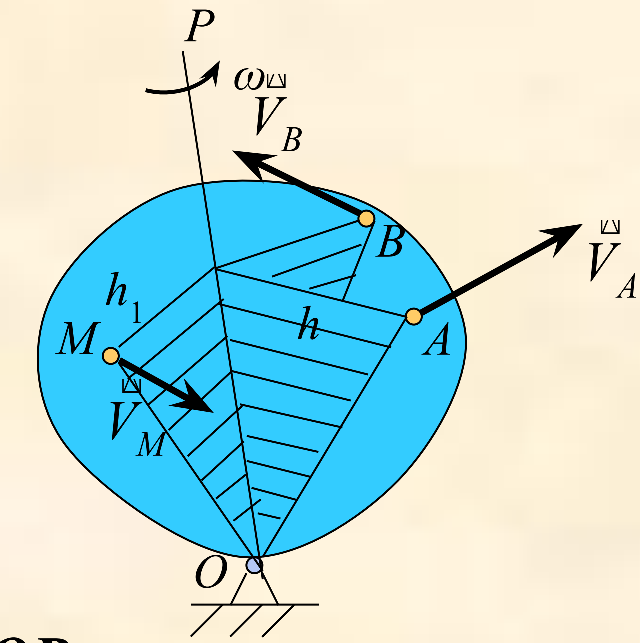


Поэтому вектор скорости какой-нибудь точки *M* тела будет определяться в этот момент равенством $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, **(1)**

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки *M*.

Вектор $\vec{V}$ направлен $\perp$ плоскости *MOP* в сторону вращения тела и численно равен $V=\omega h$.

Геометрически скорость любой точки M можно найти, зная скорость $\vec{V}_A$ какой-нибудь точки и направление скорости другой точки тела $\vec{V}_B$.



1. Проведем плоскость ⊥ к $\vec{V}_A$ и плоскость ⊥ к $\vec{V}_B$.

   Плоскости будут пересекаться по оси *OP*.

2. Найдем угловую скорость $\omega = V_A / h$.

3. Скорость точки М будет ⊥ плоскости *OPM* и ее величина $V_M = \omega \cdot h_1$.

Ускорение точки тела

Дифференцируя равенство (1) $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ по времени, получим

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}).$$

так как $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$, а $\dot{\vec{r}} = \vec{V}$, то окончательно

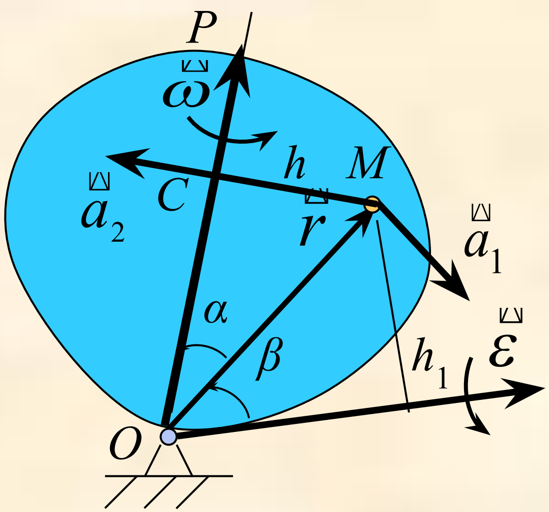
$$\vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{V}).$$

Ускорение $\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ называется вращательным, а ускорение $\vec{a}_2 = \vec{\omega} \times \vec{V}$ – осестремительным ускорением точки *M*.

Вектор $\vec{a}_1$ направлен $\perp$ плоскости, проходящей через точку *M* и вектор $\vec{\varepsilon}$, а по модулю $a_1 = \varepsilon\, r \sin\beta = \varepsilon\, h_1$, где h_1 - расстояние от точки М до вектора $\vec{\varepsilon}$.

Вектор $\vec{a}_2$, $\perp$ одновременно $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$, будет направлен вдоль *MC*, и по модулю $a_2 = \omega\, V \sin 90^0 = \omega\, h$.

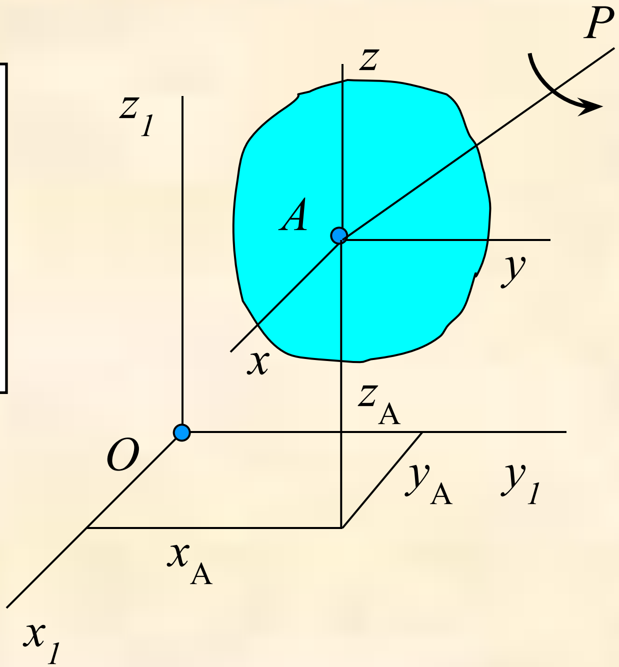
Вектор $\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ не является вектором касательного ускорения точки *M* (по касательной направлен вектор $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$); следовательно, и вектор $\vec{a}_2 = \vec{\omega} \times \vec{V}$ не будет вектором нормального ускорения точки *M*.



Движение свободного твердого тела

Уравнения движения

<u>Опр.</u> Движение твердого тела называется свободным, если оно может перемещаться как угодно по отношению к системе отчета $Ox_1y_1z_1$.



Выберем точку *A* за полюс и проведем, через него подвижные оси *Oxyz*, которые движутся поступательно вместе с полюсом, т.е. с телом.

По отношению к полюсу тело совершает сферическое движение.

<u>Вывод.</u> Движение свободного твердого тела раскладывается на поступательное вместе с полюсом и сферическое вокруг полюса. Положение тела определяют 6 параметров: координаты полюса – x_A, y_A, z_A и углы Эйлера - ϕ , ψ , θ.

Положение тела в любой момент времени будет известно, если будут известны зависимости:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad z_A = f_3(t),$$
$$\phi = f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \quad \theta = f_6(t). \qquad (*)$$

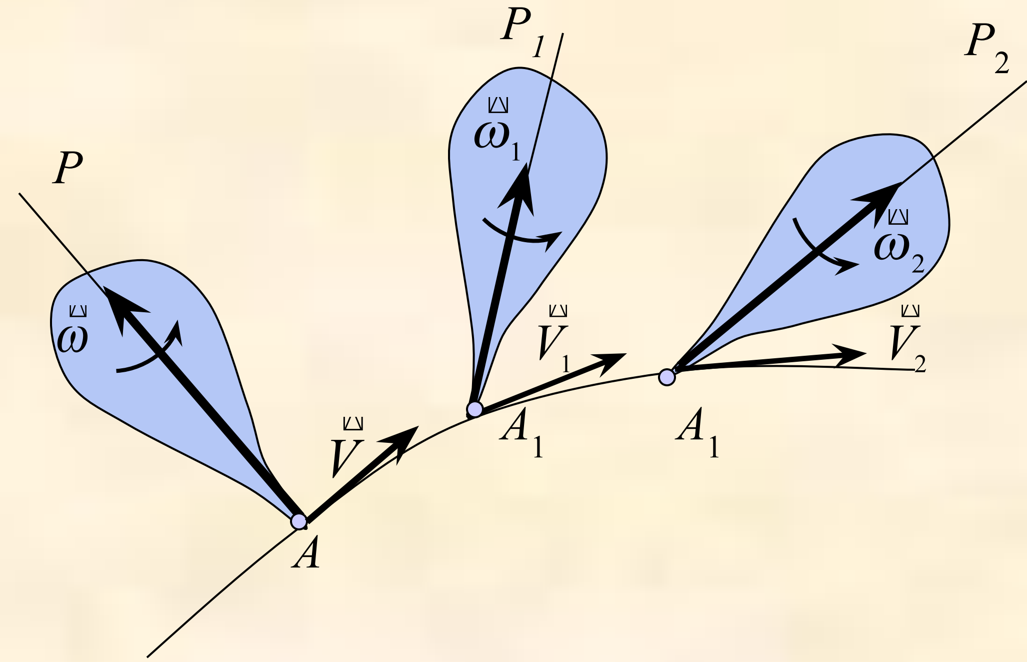
Уравнения (*) называются *уравнениями движения свободного твердого тела.*

Геометрическая картина движения

Первые три уравнения (*) определяют поступательное движение тела вместе с полюсом, а последние три сферическое движение вокруг полюса.

Поступательное и сферическое движения происходят одновременно.

Вывод. Движение свободного твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как произвольно выбранный полюс А со скоростью $\vec{V}_A$, и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс *A*.



Кинематические характеристики тела

Основными кинематическими характеристиками движения являются скорость и ускорение полюса $\vec{V}_A$ и $\vec{a}_A$, а также угловая скорость и угловое ускорение $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ вращения вокруг полюса.

Как и в случае плоскопараллельного движения вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

Скорость и ускорение точки тела

Скорость $\vec{V}_M$ любой точки *M* тела слагается, как и в случае плоского движения, из скорости полюса $\vec{V}_A$ и скорости $\vec{V}_{MA}$, которую точка *M* получает при движении вместе с телом вокруг полюса, то есть:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA} \quad \textbf{или} \quad \vec{V}_M = \vec{V}_A + (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}).$$

Аналогично для ускорения точки *M* тела найдем $\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}$, где $\vec{a}_{MA}$ - ускорение, которое точка *M* получает при движении вместе с телом вокруг полюса *A*.