

Устойчивость цифровых САР

Исследования устойчивости цифровых систем осуществляют известными из теории линейных САР методами – корневым, Гурвица, Михайлова, Найквиста и т. д., но модифицированными с учетом особенностей математического описания импульсных систем.

В то же время, устойчивость систем легко исследуется и путем непосредственного моделирования.

Корневой критерий

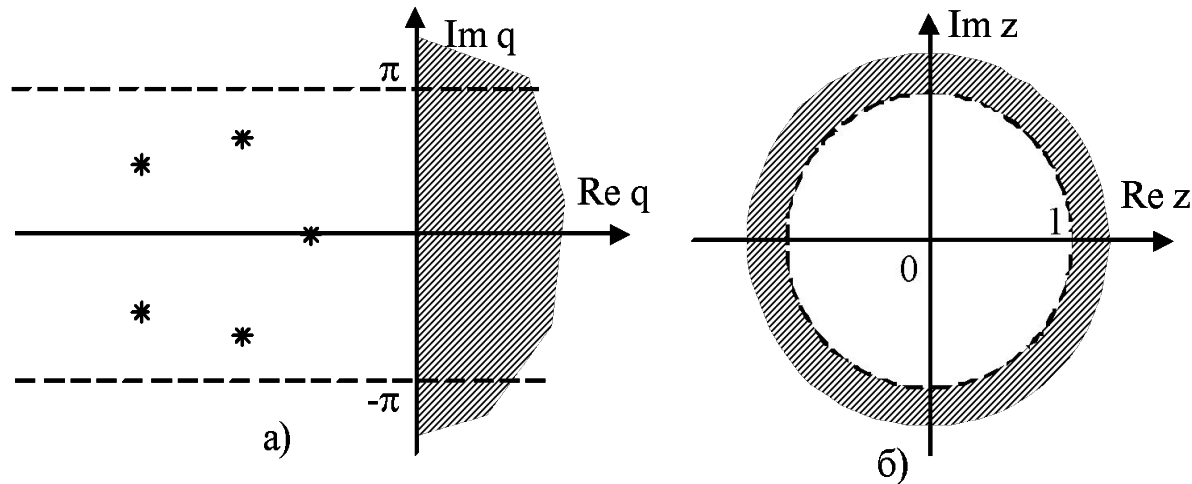
Характеристическое уравнение замкнутой импульсной системы имеет вид:

$$1 + W_p(z) = 0$$

Учитывая преобразование $z = e^q$, из последнего выражения получаем условие устойчивости – все корни характеристического уравнения должны находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости q .

Устойчивость цифровых САР

Но $W_p(e^q)$ является периодической функцией мнимой части q с периодом 2π . При исследовании устойчивости в плоскости q достаточно анализировать только полосу $[-\pi; \pi]$ вдоль действительной оси.

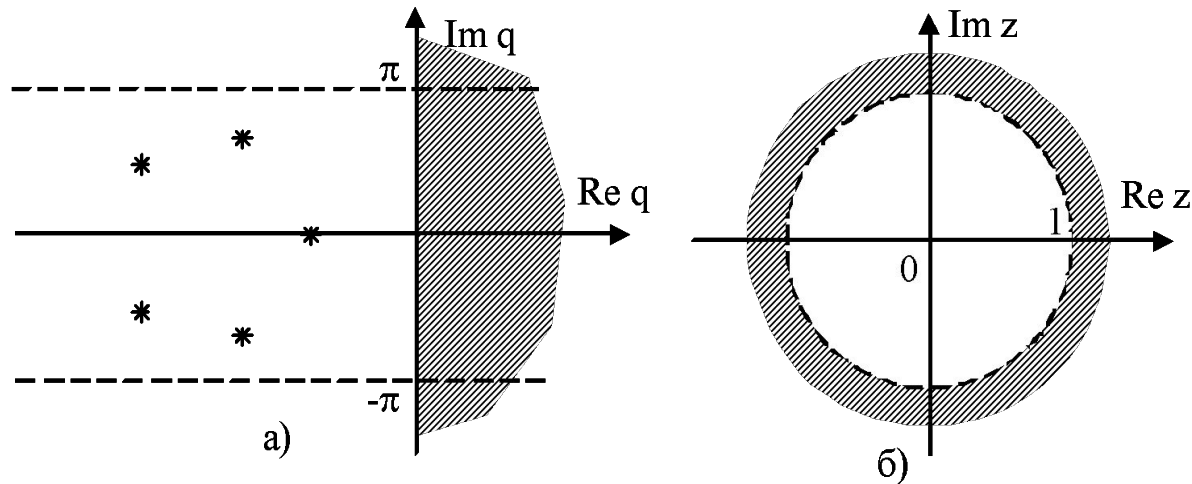


Корневой критерий устойчивости

Одновременно, подстановка $z=e^q$ преобразует отрезок мнимой оси $-\pi < \text{Im } q < \pi$ плоскости q в окружность единичного радиуса на плоскости z . При этом левая полулиния ($\text{Re } q < 0$; $-\pi < \text{Im } q < \pi$) плоскости q преобразуется во внутреннюю часть окружности $|z| < 1$.

Устойчивость цифровых САР

Для устойчивости импульсной САР необходимо, чтобы корни её характеристического уравнения находились во внутренней части окружности единичного радиуса плоскости z .



Для использования корневого критерия устойчивости цифровой САР, необходимо составить её характеристическое уравнение как функцию переменной q , или как функцию переменной z , и определить расположение её корней на соответствующей комплексной плоскости.

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ЭМС

В большинстве электромеханических систем автоматического управления объект управления имеет непрерывный (аналоговый) характер. Однако, в результате известных преимуществ цифровых корректирующих устройств (цифровых регуляторов) перед аналоговыми, для управления непрерывными объектами достаточно часто применяются именно такие регуляторы.

Синтез дискретных устройств управления непрерывными системами выполняют одним из следующих способов:

- на основе непрерывного объекта регулирования синтезируют непрерывные устройства управления, а потом преобразуют их в дискретную форму (метод непрерывных моделей);
- строят дискретные модели объекта регулирования и на их основе синтезируют дискретные устройства управления.

Итак, в обоих случаях необходимо уметь находить дискретные аппроксимации аналоговых передаточных функций.

Первый подход предусматривает выбор такта квантования после осуществления синтеза, а второй – до него.

Рассмотрим оба эти подхода.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Имеем непрерывную динамическую систему с входным сигналом $u(t)$ и выходным сигналом $y(t)$, которая описывается в области переменной Лапласа p передаточной функцией в полиномиальной форме:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{H_m(p)}{G_n(p)} = \frac{\beta_m p^m + \beta_{m-1} p^{m-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0}{p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0} \quad m \leq n$$

Используя разложение полиномов в числителе (**numerator**) и знаменателе (**denominator**) передаточной функции на множители, получаем (**Zero-Pole-Gain**):

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

$\mathbf{Z} = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_m]$ - вектор нулей (**Zeros**);
 $\mathbf{P} = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n]$ - вектор полюсов (**Poles**);
 $K = \beta_m$

Задача заключается в определении при заданном периоде квантования T эквивалентной дискретной передаточной функции:

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = K_d = \frac{(z - z_{d1})(z - z_{d2}) \dots (z - z_{dm_d})}{(z - p_{d1})(z - p_{d2}) \dots (z - p_{dn})} = \frac{H_{m_d}(z)}{G_n(z)} = \frac{\beta_{m_d}^* z^{m_d} + \beta_{m_d-1}^* z^{m_d-1} + \dots + \beta_1^* z + \beta_0^*}{z^n + \alpha_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \alpha_1^* z + \alpha_0^*}$$

т.е. в построении дискретной модели непрерывного объекта.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Под эквивалентностью в данном случае понимают совпадение реакций непрерывной системы и её дискретной модели на какое-либо входное воздействие.

Чаще всего под совпадением реакций понимают, что $y[k] = y(t_k)$ при $u[k] = u(t_k)$, где $t_k = kT$, k – номер шага квантования.

Поставленную задачу можно решить такими способами:

- 1) с помощью Z-преобразования;
- 2) заменой оператора аналогового интегрирования $1/s$ одним из операторов цифрового интегрирования;
- 3) заменой нулей и полюсов на s -плоскости соответствующими нулями и полюсами на Z -плоскости.

Первый из перечисленных способов оперирует терминами, связанными с временными характеристиками САП (время переходного процесса, его вид, и т.д.), а второй и третий – с её частотными характеристиками.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Задача не имеет точного решения.

При дискретизации входного сигнала теряется информация о его значениях между узлами квантования.

Однако, способы дискретизации, которые используют Z -преобразования, можно назвать **точными** в том смысле, что они обеспечивают совпадение непрерывного и дискретного выходных сигналов в моменты времени, кратные периоду прерывания, при определенном виде входного сигнала.

В связи с этим различают:

- **импульсно-инвариантное**,
- **ступенчато-инвариантное** и
- **линейно-инвариантное Z - преобразования.**

Методы дискретизации второй группы называют **подстановочными**. Они по своей сути являются **приближенными (неточными)**, потому что они связаны с заменой непрерывных интеграторов в детализированных структурах цифровыми интеграторами, которые синтезируются с помощью априори приближенных методов численного интегрирования.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

К приближенным методам относится и метод соответствия нулей-полюсов. Это связано с тем, что передаточные функции, полученные методами Z-преобразований, имеют в своем составе не только так называемые «системные нули», связанные однозначными зависимостями с нулями аналогового объекта, но и «нули дискретизации», которые можно определить только приближенно.

Еще одним приближенным методом дискретизации, который применяют достаточно редко из-за его невысокой точности, есть переход от дифференциальных уравнений к разностным, основанный на приближенных выражениях производных через конечные разности соответствующих порядков.

Дискретизация методами Z-преобразований

1. Метод инвариантности импульсных характеристик

Рассмотрим непрерывный объект с передаточной функцией $W(p)$. Если на его вход подать единичный импульс (преобразование Лапласа которого равняется 1), на выходе получаем сигнал

$$y(p) = W(p) \cdot 1 = W(p)$$

Обратное преобразование Лапласа даст возможность получить импульсную характеристику непрерывного регулятора. Выполнив z-преобразование этой импульсной характеристики, получаем уравнение дискретного регулятора с дискретной передаточной функцией:

$$W(z) = Z\left\{L^{-1}\{W(p)\}\Big|_{t=kT}\right\} \quad \text{или} \quad W(z) = Z\{W(p)\}$$

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Дискретизация методами Z-преобразований

1. Метод инвариантности импульсных характеристик

Если период дискретизации достаточно мал, частотные характеристики $W(p)$ и $W(z)$ в диапазоне частот $|\omega| \leq \pi / T$ будут иметь одинаковую форму с точностью до $1/T$.

Свяжем две ПФ через соответствующий коэффициент

$$W_{imp}(z) = T \cdot Z\{W(p)\}$$

ПФ дискретной модели непрерывного объекта, полученная из условия инвариантности их импульсных (весовых) характеристик.

Пример. Определить дискретный аналог непрерывного объекта, который имеет ПФ

$$W(p) = \frac{3(p-1)}{(p+1)(p+4)} \quad \text{из условия инвариантности импульсных характеристик.}$$

Решение. Для удобства выполнения Z-преобразования разложим передаточную функцию $W(p)$ на элементарные составляющие:

$$W(p) = \frac{5}{p+4} - \frac{2}{p+1}$$

Тогда, используя таблицу Z-преобразований, находим дискретный аналог непрерывного регулятора, воспользовавшись уравнением $W_{imp}(z) =$

$$W_{imp}(z) = T \left[\frac{5z}{z - e^{-4T}} - \frac{2z}{z - e^{-T}} \right]$$

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Дискретизация методами Z-преобразований

1. Метод инвариантности импульсных характеристик

ПФ импульсно-инвариантного дискретного объекта зависит от выбранного такта квантования. Так, при $T=0.5$ получаем цифровое звено

$$W_{imp}(z) = 0.5 \cdot \left[\frac{5z}{z - 0.1353} - \frac{2z}{z - 0.6065} \right] = \frac{0.5z(3z - 2.7619)}{(z - 0.1353)(z - 0.6065)}$$

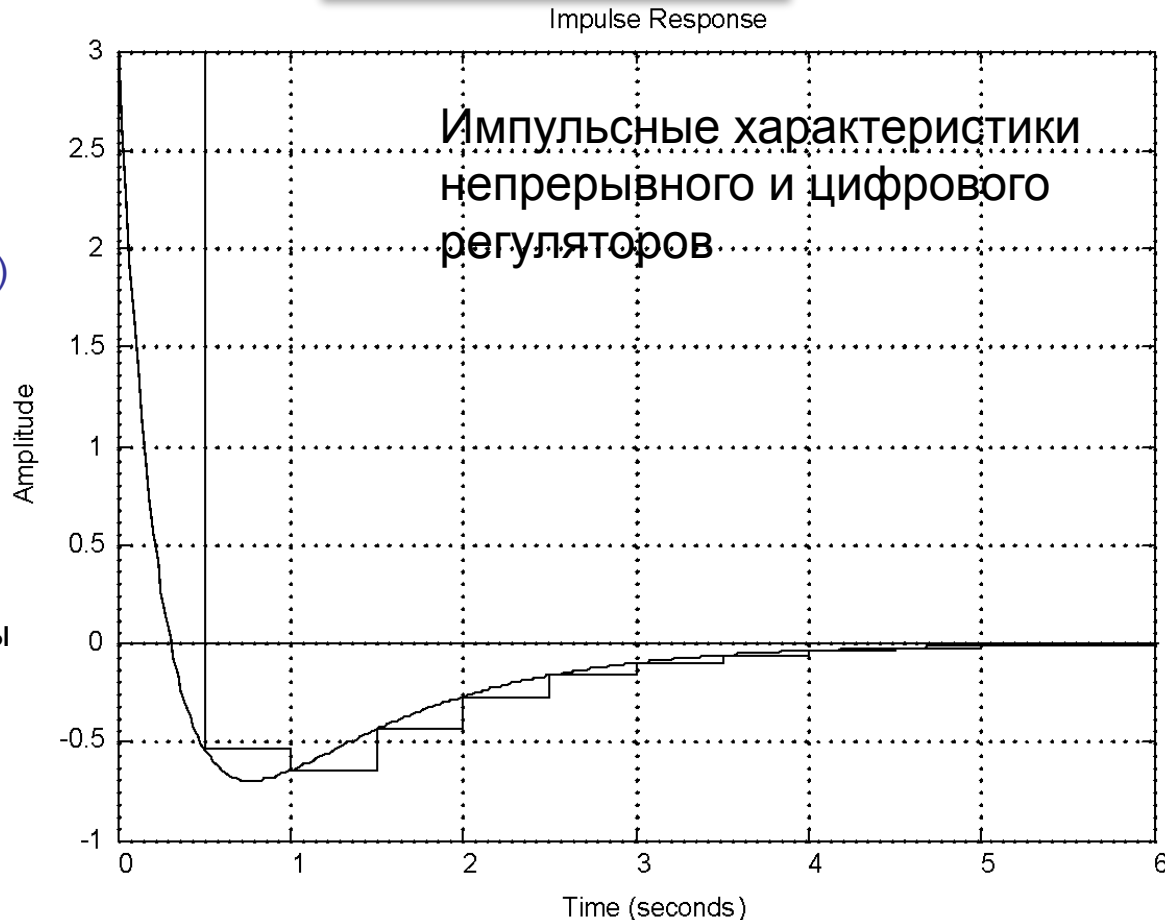
Проверим в MATLAB:

```
W = zpk([1],[-1 -4],3)
T = 0.5
Wi = zpk([0 0.9206],[0.1353 0.6065],3*T,T)
impulse(W,Wi),grid
```

Цифровая модель в каждый момент квантования (0, 0.5с, 1.0с, 1.5с) точно воспроизводит импульсную характеристику непрерывного звена.

ПФ можно получить с помощью команды `c2d` (*Continuous to Discrete*), определив метод преобразования текстовым параметром 'imp':

```
Wi = c2d(W,T,'imp')
```



Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Дискретизация методами Z-преобразований

2. Метод ступенчато-инвариантного Z-преобразования

Рассмотрим, как непрерывный динамический объект реализуется в цифровой форме из условия инвариантности переходных характеристик, т.е. реакции объекта на ступенчатый сигнал, который соответствует дискретизации непрерывного объекта с экстраполятором нулевого порядка на входе.

Если на вход непрерывной системы с ПФ $W(p)$ подать единичный ступенчатый сигнал, преобразование Лапласа для которого равняется $1/p$, то на выходе получаем

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \cdot W(p) \right\}$$

Если же единичную ступенчатую последовательность (Z-преобразование которой равняется $z/(z-1)$) подать на вход цифрового регулятора, на его выходе будет формироваться сигнал

$$y(kT) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot W(z) \right\}$$

Потребуем, чтобы реакция цифровой модели на единичную ступенчатую последовательность равнялась бы реакции непрерывного объекта на единичное ступенчатое воздействие в моменты квантования, т.е.:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot W_{zoh}(z) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \cdot W(p) \right\} \Bigg|_{t=kT} \Rightarrow W_{zoh}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}$$

Дискретная ПФ инвариантного к переходной характеристике цифрового регулятора

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Дискретизация методами Z-преобразований

2. Метод ступенчато-инвариантного Z-преобразования

Пример 2. Найти цифровую реализацию непрерывного объекта, имеющего ПФ:

$$W(p) = \frac{3(p-1)}{(p+1)(p+4)} \quad \text{из условия инвариантности переходных характеристик.}$$

Решение. Определение инвариантного к переходной характеристики цифрового объекта осуществим вручную. Вначале разложим ПФ, подлежащую Z-преобразованию на простые дроби:

$$\frac{W(p)}{p} = \frac{3(p-1)}{p(p+1)(p+4)} = -\frac{3}{4p} + \frac{2}{p+1} - \frac{5}{4(p+4)}$$

Используя таблицу Z-преобразований, находим:

$$\mathbf{Z} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z-e^{-T}} - \frac{5z}{4(z-e^{-4T})}$$

После несложных математических манипуляций получаем:

$$\mathbf{Z} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\} = \frac{z \cdot (-5e^{-4T} + 8e^{-T} - 3) + (-3e^{-5T} + 8e^{-4T} - 5e^{-T})}{4(z-1)(z-e^{-T})(z-e^{-4T})}$$

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Дискретизация методами Z-преобразований

2. Метод ступенчато-инвариантного Z-преобразования

Тогда искомая дискретная ПФ цифрового объекта:

$$W_{zoh}(z) = \frac{z \cdot (-5e^{-4T} + 8e^{-T} - 3) + (-3e^{-5T} + 8e^{-4T} - 5e^{-T})}{4(z - e^{-T})(z - e^{-4T})}$$

Выбирая такт квантования равным 0.5с, окончательно имеем:

$$W_{zoh}(z) = \frac{0.2939z - 0.5491}{(z - 0.1353)(z - 0.6065)} = 0.2939 \cdot \frac{z - 1.8682}{(z - 0.1353)(z - 0.6065)}$$

Полюсы одинаковые, а их числители не совпадают.

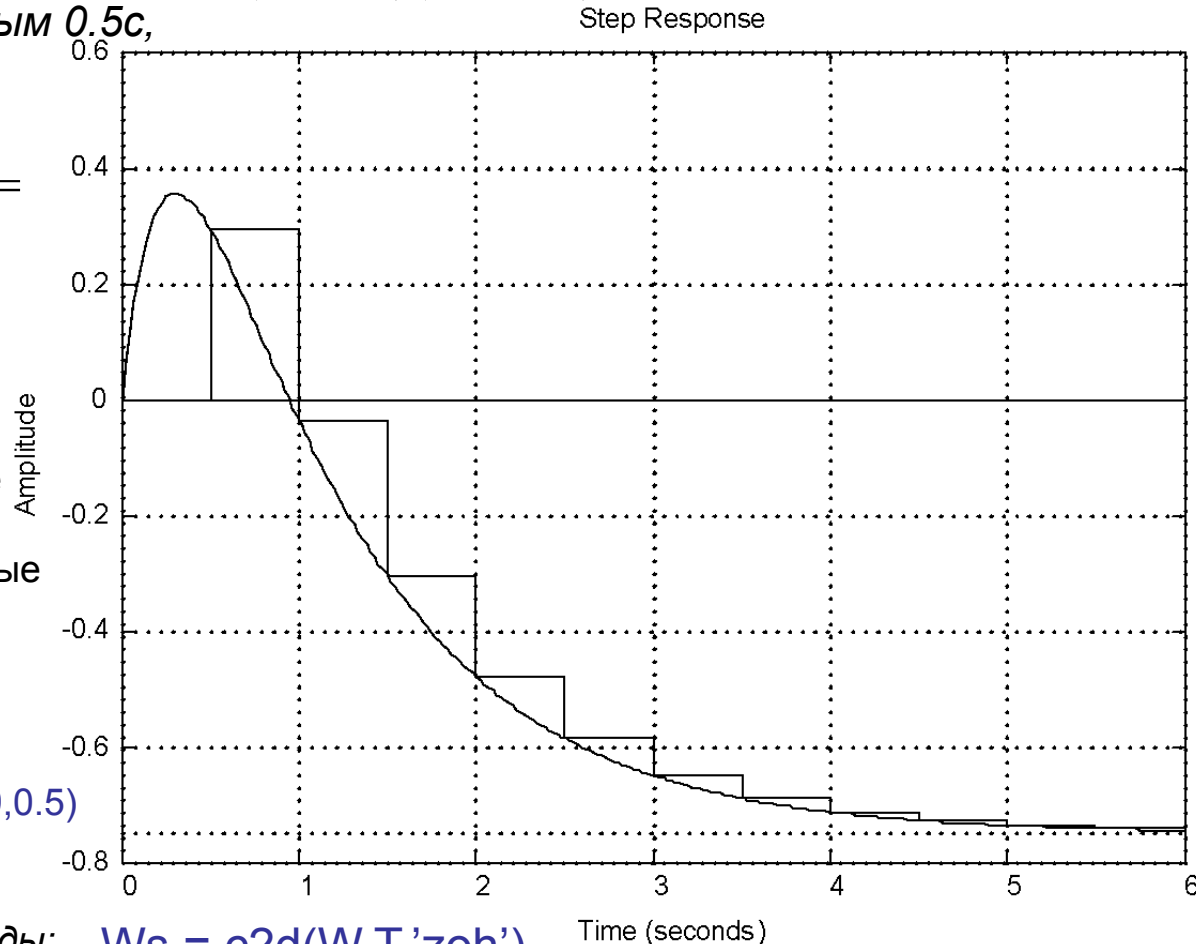
Т.о., рассмотренные методы дают разные выражения дискретной аппроксимации.

С помощью MATLAB:

```
W = zpk([1],[-1 -4],3)
Ws = zpk([1.8682],[0.1353 0.6065],0.2939,0.5)
step(W,Ws,6),grid
```

ПФ можно получить с помощью команды:

$Ws = c2d(W,T,'zoh')$



Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Дискретизация методами Z-преобразований

3. Метод линейно-инвариантного Z-преобразования

Рассмотрим, как непрерывный динамический объект реализуется в цифровой форме из условия инвариантности реакции системы на линейный сигнал, который соответствует дискретизации непрерывного объекта с **экстраполятором первого порядка (FON – First Order Hold)** на входе.

Учитывая, что преобразование Лапласа линейного сигнала с единичным коэффициентом усиления равняется $1/p^2$, а его Z-преобразование равняется $Tz/(z-1)^2$, условие инвариантности реакций непрерывной и дискретной систем на этот сигнал запишем так:

$$Z^{-1} \left\{ \frac{Tz}{(z-1)^2} \cdot W_{foh}(z) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \cdot W(p) \right\} \Big|_{t=kT}$$



$$W_{foh}(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \cdot Z \left\{ \frac{W(p)}{p^2} \right\}$$

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Дискретизация методами Z-преобразований

3. Метод линейно-инвариантного Z-преобразования

Пример. Найти цифровую реализацию непрерывного объекта, который имеет ПФ

$$W(p) = \frac{3(p-1)}{(p+1)(p+4)} \quad \text{из условия инвариантности переходных характеристик.}$$

Решение. Получим аналоговый объект для Z-преобразования в виде суммы простых дробей (matlab-функция residue):

$$\frac{W(p)}{p^2} = \frac{3(p-1)}{p^2(p+1)(p+4)} = -\frac{3}{4p^2} + \frac{27}{16p} - \frac{2}{p+1} + \frac{5}{16(p+4)}$$

Используя таблицу Z-преобразований, находим:

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{W(p)}{p^2} \right\} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{27z}{16(z-1)} - \frac{2z}{z-e^{-T}} + \frac{5z}{16(z-e^{-4T})}$$

Согласно метода линейно-инвариантного Z-преобразования:

$$W_{foh}(z) = -\frac{3}{4} + \frac{27(z-1)}{16T} + \frac{(z-1)^2}{T} \cdot \left(-\frac{2}{z-e^{-T}} + \frac{5}{16(z-e^{-4T})} \right)$$

Выбирая такт квантования равным 0.5с

$$W_{foh}(z) = 0.28346 \frac{(z-1.654)(z+0.3761)}{(z-0.1353)(z-0.6065)}$$

Эту ПФ можно получить и с помощью команды преобразования c2d, определив метод преобразования текстовым параметром 'foh', указывающим на тип экстраполятора:

$$Wf = c2d(W,T,'foh')$$

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Дискретизация методами Z-преобразований

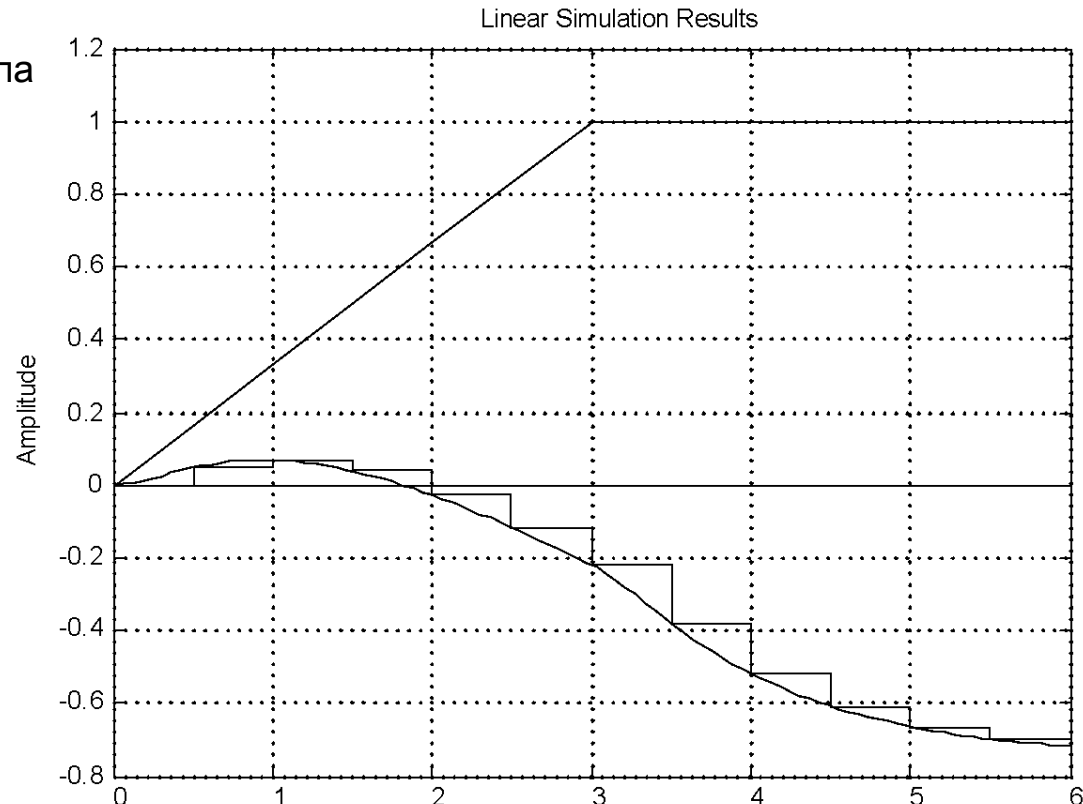
3. Метод линейно-инвариантного Z-преобразования

С помощью MATLAB

```
W = zpks([1],[-1 -4],3) % Непрерывное звено
T = 0.5, Wdl = c2d(W,T,'foh') % Дискретизация
% Формирование линейного входного сигнала с ограничением для непрерывного звена:
t=linspace(0,6);u=t./3;
ii=find(u>1); u(ii)=ones(size(ii));
% Реакция непрерывной системы на линейное воздействие
lsim(W,u,t); hold on
% Формирование линейного входного сигнала
% с ограничением для дискретной модели:
t1=0:T:6; u1=t1./3;
ii1=find(u1>1); u1(ii1)=ones(size(ii1));
% Реакция дискретной модели на линейное
% воздействие
lsim(Wdl,u1,t1), grid on, ylim([-0.8 1.2])
```

Полюсы одинаковые, а их числители не совпадают.

Вновь рассмотренные методы дают разные выражения дискретной аппроксимации.



Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ результатов дискретизации методами Z-преобразования

Рассмотрено 3 разных способа дискретизации непрерывных динамических объектов методами Z-преобразований, разница между которыми лежит в том, что равенство переходных характеристик выходного непрерывного объекта и его дискретной модели в моменты прерывания наблюдаются при разных видах входных сигналов.

Но в реальных системах входные сигналы могут иметь любую форму. Для того, чтобы дать рекомендацию, какой из методов Z-преобразования целесообразно использовать в разных ситуациях, сравним реакцию исследуемых дискретных моделей одного из непрерывных объектов на такие входные сигналы:

- **δ -функцию Дирака** (идеальный импульс единичной площади), реакцию на которую называют **импульсной или весовой функцией**;
- **единичную ступенчатую функцию Хевисайда**, реакция на которую называют **переходной функцией**;
- **линейную функцию с ограничением** её на единичном уровне.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ результатов дискретизации методами Z-преобразования

В качестве непрерывного объекта выберем объект с ПФ

$$W(p) = \frac{4p(2p+1)}{24p^3 + 10p^2 + 6p + 1} = 0.3333 \frac{p(p+0.5)}{(p+0.2016)(p^2 + 0.215p + 0.2066)}.$$

с тремя полюсами и двумя нулями: $\mathbf{P} = [-0.1075 \pm 0.4417i, -0.2016]$ $\mathbf{Z} = [0, -0.5]$

Дискретные передаточные функции, полученные из этой ПФ методом рассмотренных Z-преобразований программно (с помощью *matlab*-функции *c2d*, с текстовым параметром 'imp', 'zoh' та 'foh', соответственно) при $T=2$, имеют вид:

$$W_{imp}(z) = \frac{0.6667z^3 - 0.6639z^2 + 0.0648z}{z^3 - 1.692z^2 + 1.334z - 0.4346} = 0.6667 \cdot \frac{z(z-0.8863)(z-0.1096)}{(z-0.6681)(z^2 - 1.024z + 0.6505)} \quad \text{imp}$$

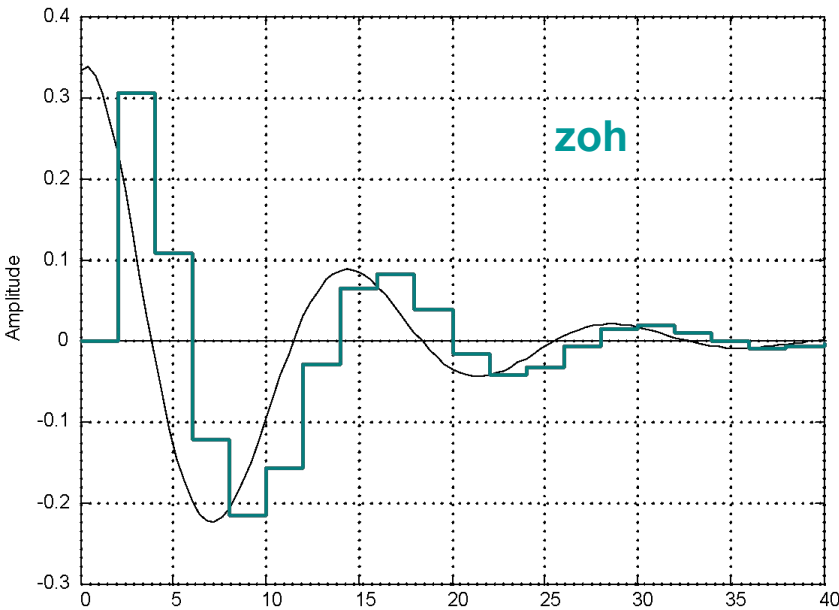
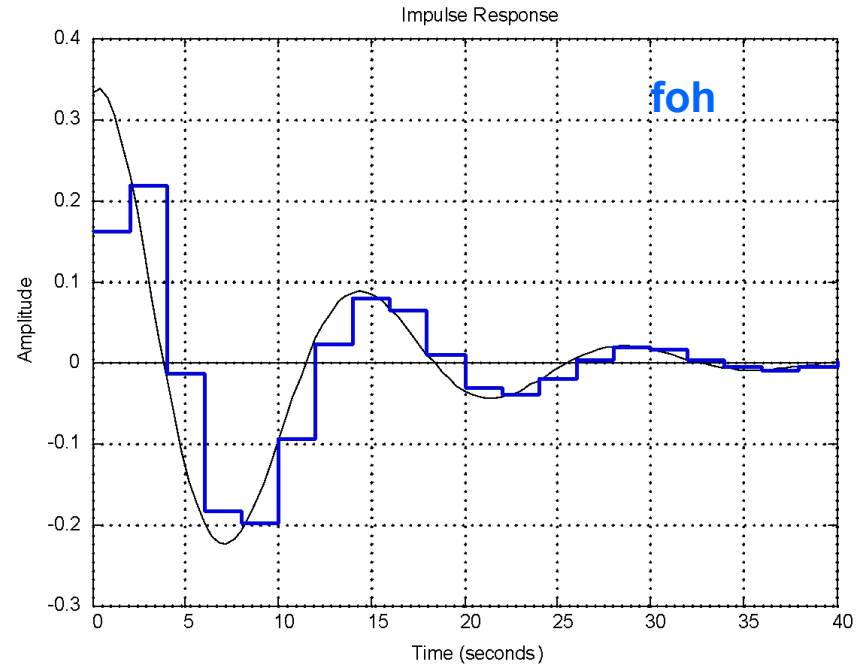
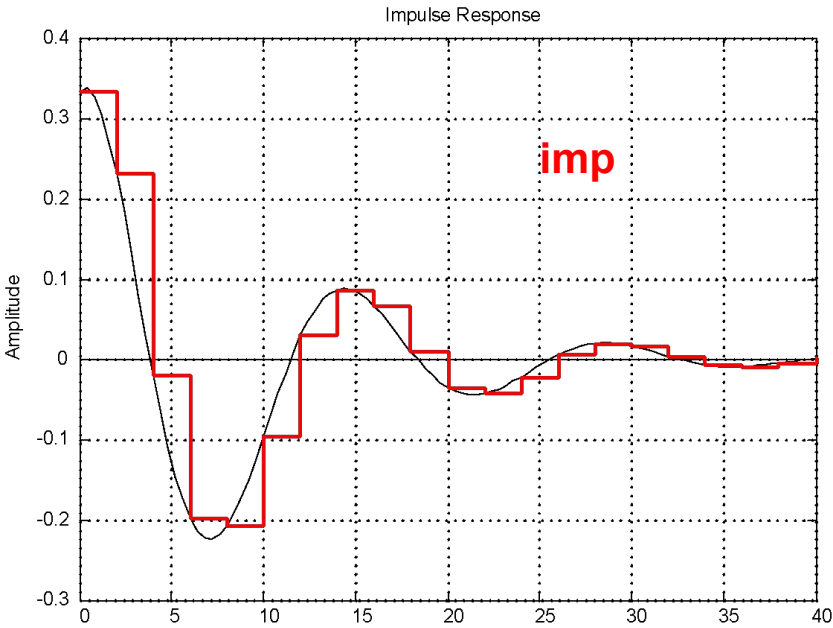
$$W_{zoh}(z) = \frac{0.6115z^2 - 0.8186z + 0.2071}{z^3 - 1.692z^2 + 1.334z - 0.4346} = 0.61145 \cdot \frac{(z-1)(z-0.3387)}{(z-0.6681)(z^2 - 1.024z + 0.6505)} \quad \text{zoh}$$

$$W_{foh}(z) = \frac{0.3233z^3 - 0.1081z^2 - 0.3374z + 0.1223}{z^3 - 1.692z^2 + 1.334z - 0.4346} = 0.3233 \frac{(z-1)(z-0.3666)(z+1.032)}{(z-0.6681)(z^2 - 1.024z + 0.6505)} \quad \text{foh}$$

Период квантования специально выбран большим, чтоб нагляднее наблюдать поведение дискретных сигналов.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

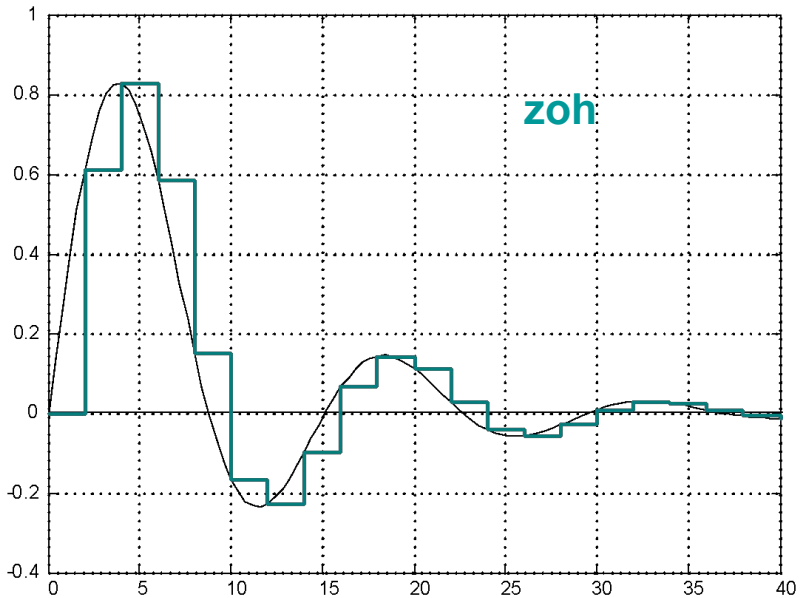
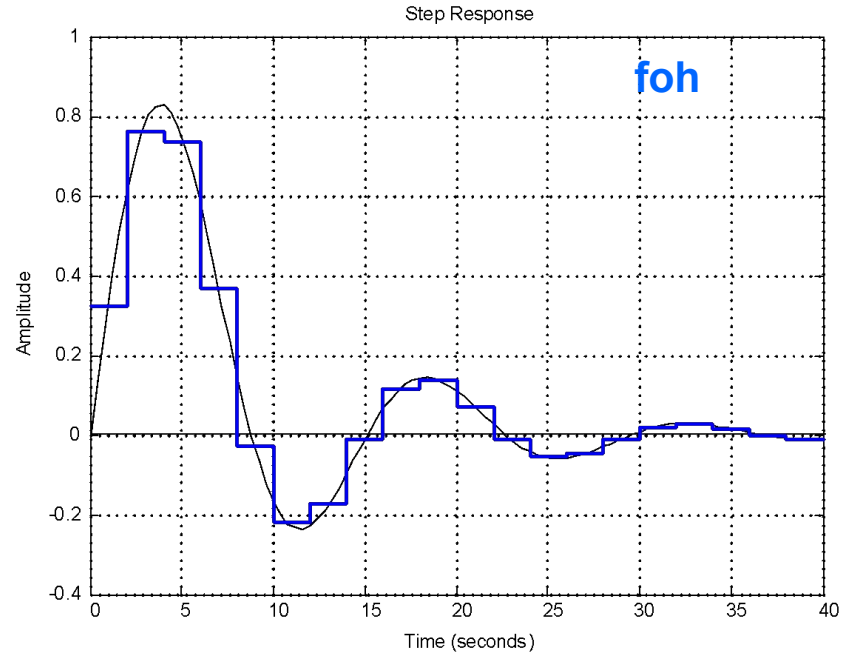
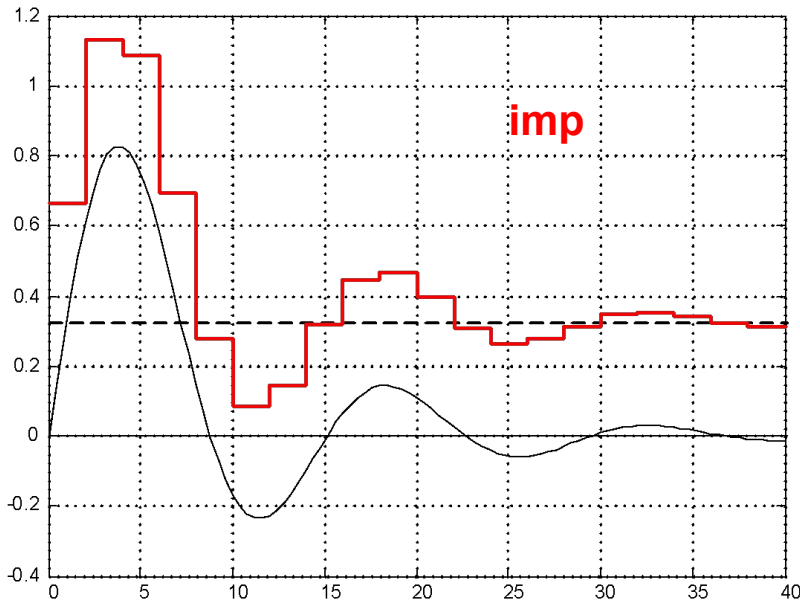
Сравнительный анализ результатов дискретизации методами Z-преобразования



Весовые функции выходной непрерывной системы
и дискретных систем с соответствующими ПФ.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ результатов дискретизации методами Z-преобразования

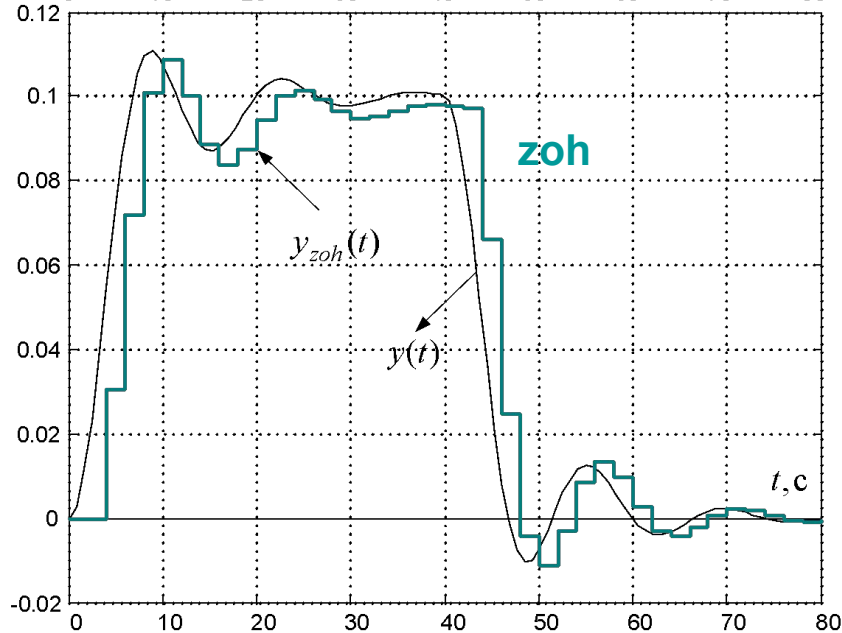
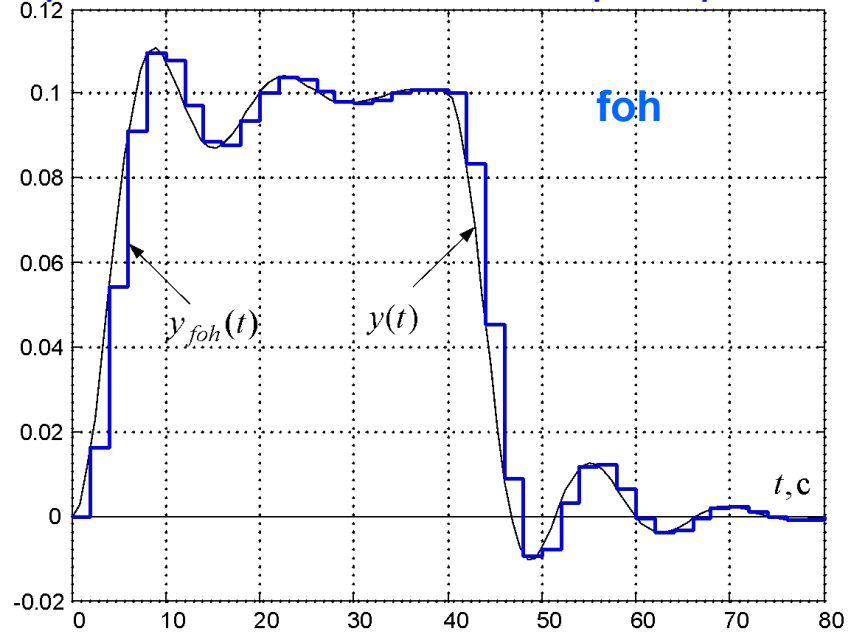
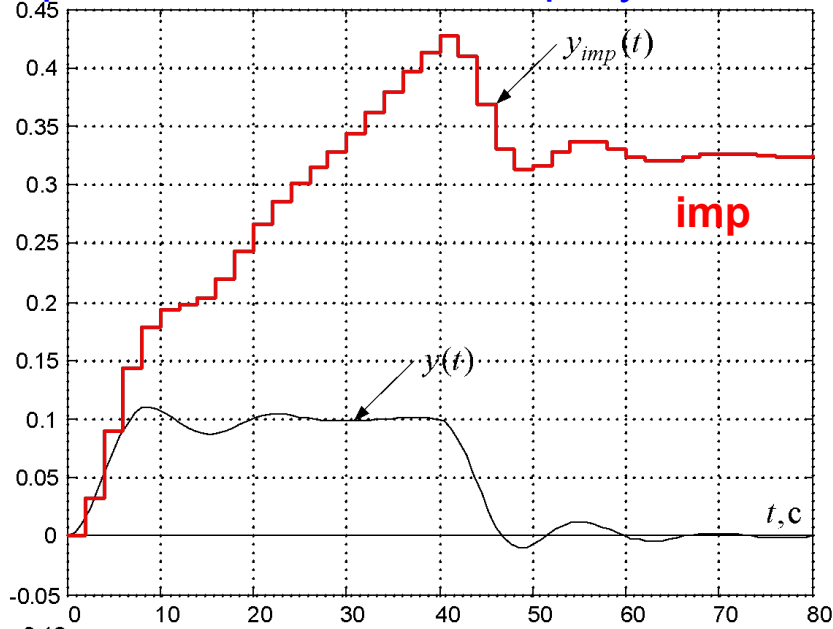


Переходные функции непрерывного объекта и его цифровых моделей

Отклонение реакций дискретного и непрерывного звеньев на одинаковый входной сигнал уменьшается при уменьшении периода квантования.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ результатов дискретизации методами Z-преобразования



Реакции непрерывного объекта и его цифровых моделей на линейный входной сигнал с ограничением

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ результатов дискретизации методами Z-преобразования

Значения весовой функции цифровой модели, синтезированной с помощью **импульсно-инвариантного Z-преобразования**, на каждом интервале дискретности совпадают со значениями весовой функции непрерывного объекта в начале интервала.

Но переходная функция этой модели существенно отличается от переходной функции дискретизированного непрерывного звена в любые моменты времени, включая начальное и установившееся значение.

В соответствие с этим реакция её на линейный входной сигнал имеет ошибку, возрастающую со временем.

Такой вид дискретной аппроксимации можно использовать только тогда, когда существует уверенность, что сигнал на входе всегда будет иметь форму, приближающуюся к идеальным импульсам.

При использовании **Z-преобразования с ZОН** наилучший результат достигается при ступенчатом изменении входного сигнала. Реакция такой дискретной модели на другие виды входных сигналов характеризуется запаздыванием на один период квантования.

При использовании **Z-преобразование с FОН** наилучший результат достигается при линейном изменении входного сигнала, но в целом удовлетворительные результаты получаем и при других видах входных сигналов: реакция на импульс искажается только на двух первых шагах квантования, а реакция на скачок совпадает с переходной функцией непрерывного объекта приблизительно в средних точках периодов квантования.

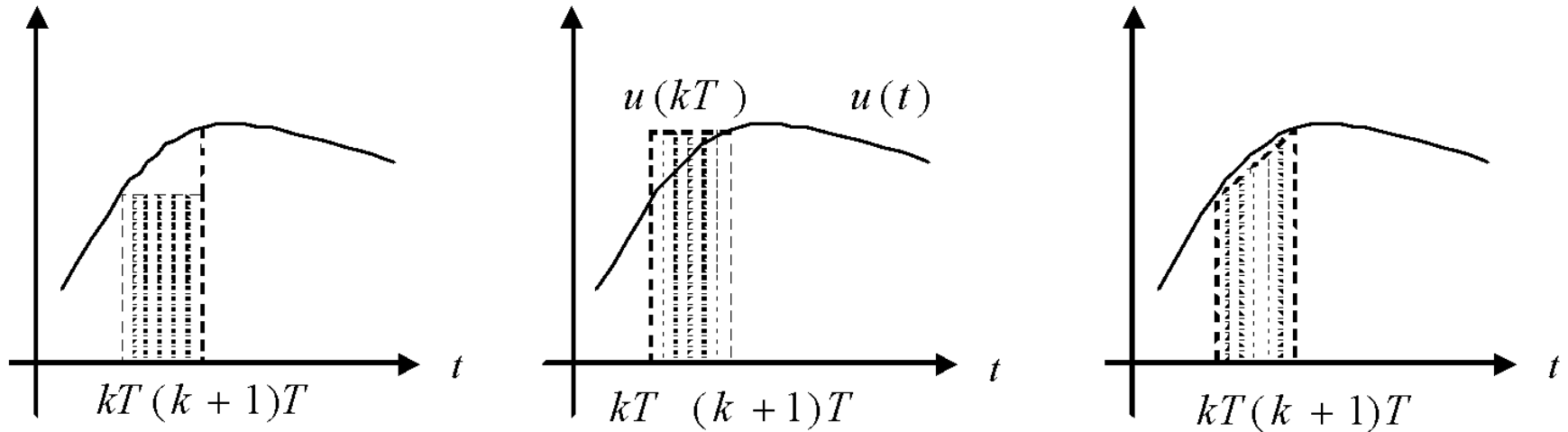
Аналогичные исследования, выполненные для синусоидального входного сигнала, также подтверждают преимущества и универсальность дискретной аппроксимации непрерывных объектов **методом Z-преобразования с экстраполяцией первого порядка (FОН)**.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Подстановочные методы дискретизации

Существуют методы, основанные на взаимных преобразованиях между p и z , что является тождественным замене оператора аналогового интегрирования $1/p$ одним из операторов цифрового интегрирования.

ПФ цифрового интегратора (ЦИ) зависит от метода численного интегрирования. В основу этих методов положено геометрический смысл определенного интеграла, который равняется площади фигуры, ограниченной кривой подынтегральной функции $u(t)$, осью времени и вертикалями, которые выходят из точек границ интегрирования $t=t_0$ и $t=t_k$.



Большинство из методов ЦИ основывается на разбиении фигуры, площадь которой нужно подсчитать, на несколько более простых фигур, площади которых вычисляются по простым формулам, с дальнейшим суммированием этих площадей. Чаще всего интервал интегрирования делят на несколько равных частей, на каждой из которых выполняют локальную интерполяцию подынтегральной функции степенными полиномами.

В зависимости от степени полинома n образуются различные методы численного интегрирования: при $n=0$ – метод прямоугольников, при $n=1$ – метод трапеций, при $n=2$ – метод параболических трапеций (метод Симпсона).

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

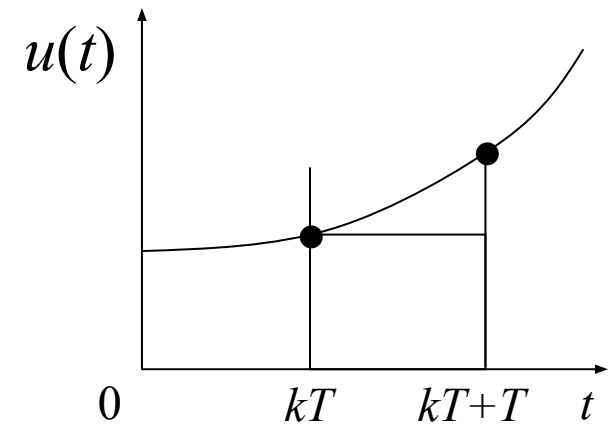
Подстановочные методы дискретизации

1. Один шаг численного интегрирования **методом прямой аппроксимации Эйлера (Forward Euler)**, который еще называют **методом левосторонних прямоугольников**, описывается разностным уравнением:

$$y_{FE}(kT + T) = y_{FE}(kT) + Tu(kT)$$

в операторной форме:

$$zy_{FE}(z) = y_{FE}(z) + Tu(z)$$



Определяем ПФ интегратора:

$$W_{FE}(z) = \frac{y_{FE}(z)}{u(z)} = \frac{T}{z-1} = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$p \leftarrow \frac{z-1}{T}$$

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

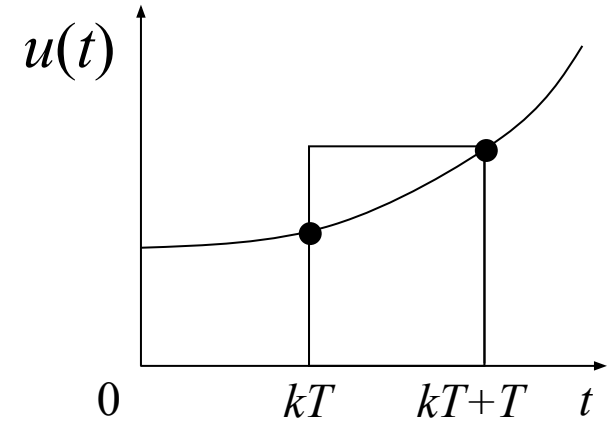
Подстановочные методы дискретизации

2. Синтезируем цифровой интегратор **методом обратной аппроксимации Эйлера (Backward Euler)**, который еще называют **методом правосторонних прямоугольников:**

(Метод обратных разностей)

$$y_{BE}(kT + T) = y_{BE}(kT) + Tu(kT + T)$$

$$zy_{BE}(z) = y_{BE}(z) + zTu(z)$$



ПФ интегратора:

$$W_{BE}(z) = \frac{y_{BE}(z)}{u(z)} = \frac{Tz}{z-1} = \frac{T}{1-z^{-1}}$$

$$p \leftarrow \frac{z-1}{Tz}$$

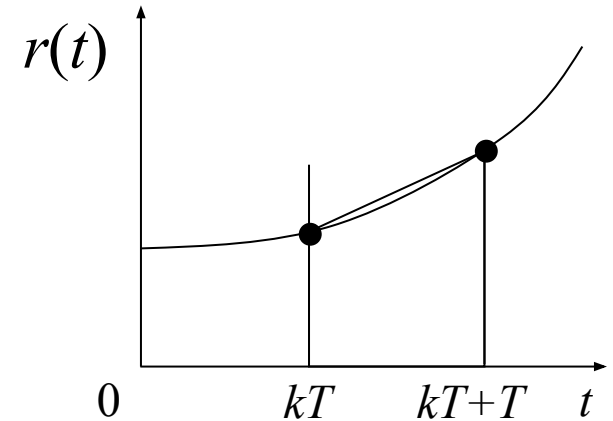
Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Подстановочные методы дискретизации

3. Цифровой интегратор **методом трапеций (Trapezoidal)**, который иногда называют **методом средних прямоугольников**

$$y_{tr}(kT+T) = y_{tr}(kT) + T \frac{u(kT) + u(kT+T)}{2}$$

$$zy_{tr}(z) = y_{tr}(z) + T \frac{u(z) + zu(z)}{2}$$



$$W_{tr}(z) = \frac{y_{tr}(z)}{u(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$p \leftarrow \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Подстановочные методы дискретизации

Из сравнения передаточных функций $W_{FE}(z)$, $W_{BE}(z)$ и $W_{tr}(z)$ следует:

$$y_{BE}(z) = zy_{FE}(z)$$

$$y_{tr}(z) = \frac{y_{BE}(z) + zy_{FE}(z)}{2}$$

выходной сигнал интегратора W_{BE} опережает выходной сигнал интегратора W_{FE} на один такт квантования, а выходной сигнал интегратора W_{tr} складывается из полусуммы выходных сигналов интеграторов W_{BE} и W_{FE} .

Получим цифровые интеграторы методами Z-преобразования:

$$W_{imp}(z) = T \cdot Z \left\{ \frac{1}{p} \right\} = \frac{Tz}{z-1} = W_{BE}(z)$$

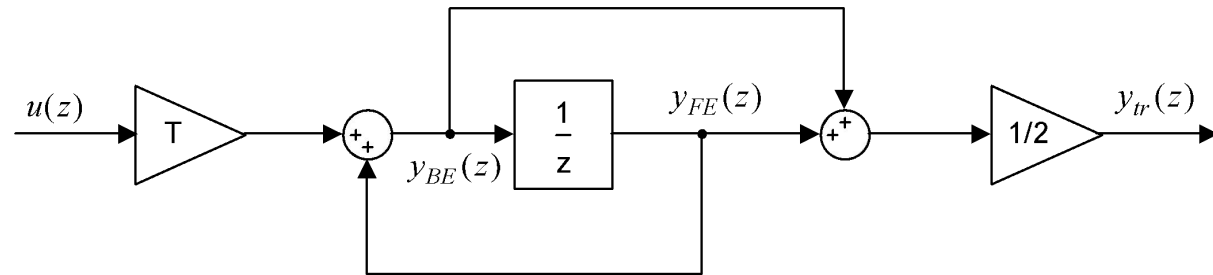
$$W_{zoh}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{z-1} = W_{FE}(z)$$

$$W_{foh}(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz} \cdot Z \left\{ \frac{1}{p^3} \right\} = \frac{(z-1)^2}{Tz} \cdot \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} = W_{tr}(z)$$

Импульсно-инвариантное Z-преобразование аналогового интегратора совпадает с методом *Backward Euler*,

ступенчато-инвариантное – с методом *Forward Euler*,

линейно-инвариантное – с методом *Trapezoidal*.



Развернутая модель дискретного интегратора с разными алгоритмами численного интегрирования

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ подстановочных методов

Подстановочные формулы:

$$p = \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$$

метод Эйлера

совпадает с Z-преобразованием с использованием ZOH

$$p = \frac{z-1}{Tz} = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

модифицированный метод Эйлера

(Метод обратных разностей)

совпадает с Z-преобразованием с использованием FOH

$$p = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

билинейное преобразование или метод Тастина (Tustin)

Устойчивость регуляторов

Если непрерывный регулятор устойчив, будет ли устойчив полученный дискретный регулятор?

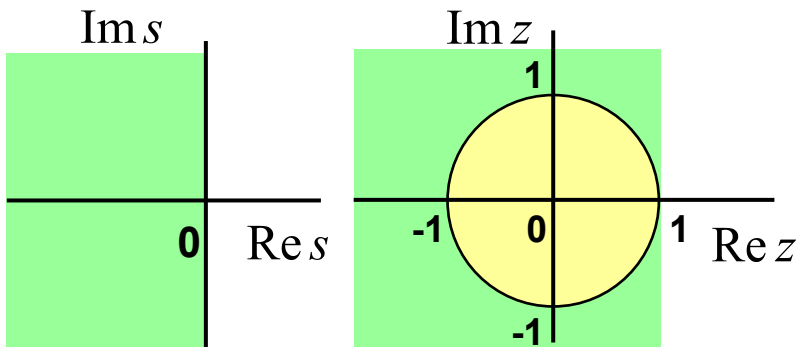
Преобразование $p = \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$ **Метод Эйлера** не гарантирует устойчивость цифрового регулятора при устойчивом непрерывном.

$$z = \alpha + i\beta \Rightarrow p = \frac{\alpha - 1}{T} + i \frac{\beta}{T}$$

$$\operatorname{Re} s < 0 \Rightarrow \frac{\alpha - 1}{T} < 0 \Rightarrow \alpha < 1$$



Какое условие устойчивости в z ?



При использовании **метода Эйлера** полуплоскость $\operatorname{Re} s < 0$ (область устойчивости непрерывных систем) отображается на полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1$. Часть этой области находится вне единичного круга.



При дискретизации регулятор может стать неустойчивым!

Пример:

$$W_{FE}(z) = \frac{1}{\frac{z-1}{T} + 2} = \frac{T}{z-1+2T}$$

будет неустойчивым при $T > 1$.

Устойчивость регуляторов

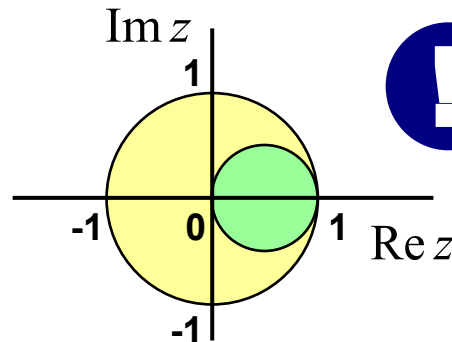
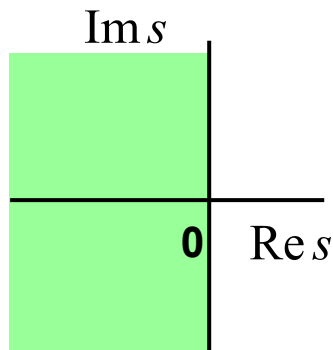
Модифицированный метод Эйлера (Метод обратных разностей)

Если непрерывный объект имеет устойчивый полюс $p = \alpha + j\beta$, $\alpha < 0$, то при преобразовании по этому методу ему будет соответствовать полюс цифрового объекта

$$\begin{aligned} \frac{1-z^{-1}}{T} + \alpha + j\beta &= \frac{1}{T} \left[(1 + \alpha T) + j\beta T - z^{-1} \right] = \\ &= -\frac{(1 + \alpha T) + j\beta T}{zT} \left[z - \frac{1}{(1 + \alpha T) + j\beta T} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку при $\alpha > 0$ модуль комплексного числа $|(1 + \alpha T) + j\beta T|$ всегда будет больше 1, то полюс будет находиться в середине единичной окружности Z-плоскости.

Метод обратных разностей отображает полуплоскость $\text{Re } s < 0$ на внутреннюю часть круга $z - 0,5 < 0,5$. Поэтому устойчивость регулятора всегда сохраняется, и даже неустойчивый регулятор при переоборудовании может стать устойчивым.



Неустойчивый может стать устойчивым!

Устойчивость регуляторов

Преобразование Тастина:

Точки $p = \alpha + j\beta$

$$z = \frac{1 + \frac{T\alpha}{2} + j\frac{T\beta}{2}}{1 - \frac{T\alpha}{2} - j\frac{T\beta}{2}}$$

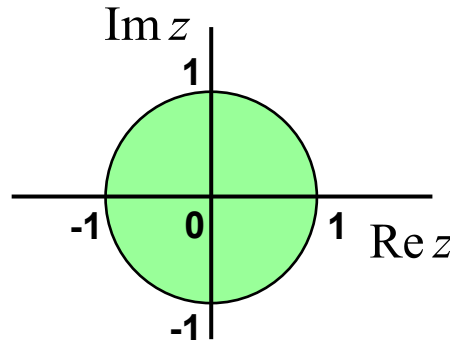
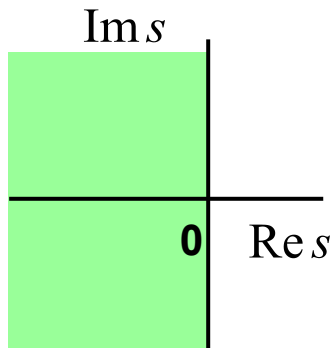
модуль:

$$\Rightarrow |z| = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{T\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{T\beta}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{T\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{T\beta}{2}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$|z| = 1$$

только при условии $\alpha = 0$,
а для любого $\alpha < 0$
имеем $|z| < 1$.

Преобразование Тастина отображает полуплоскость $\text{Re } s < 0$ на внутреннюю часть единичного круга т.е., устойчивость (или неустойчивость) регулятора сохраняется всегда.

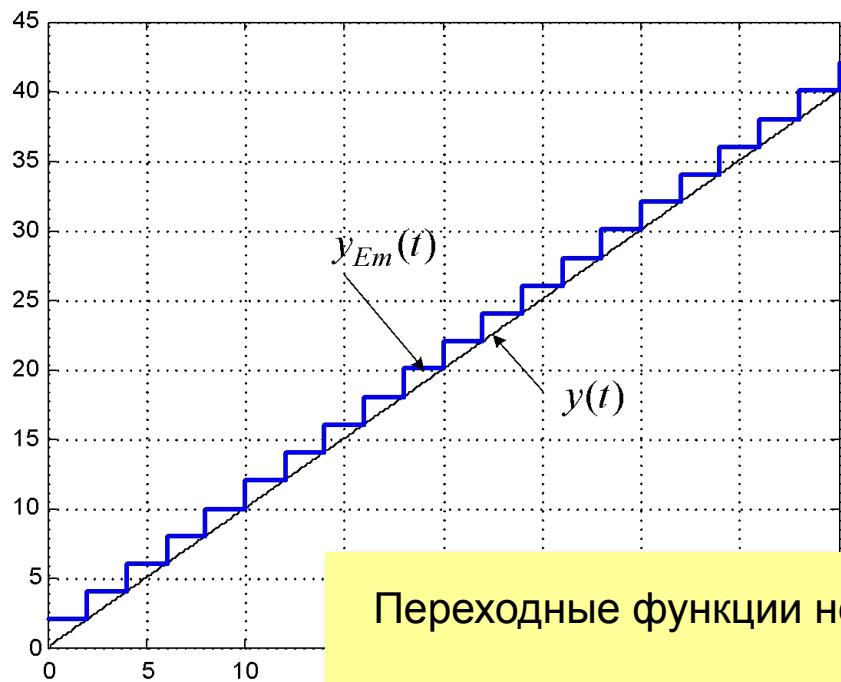
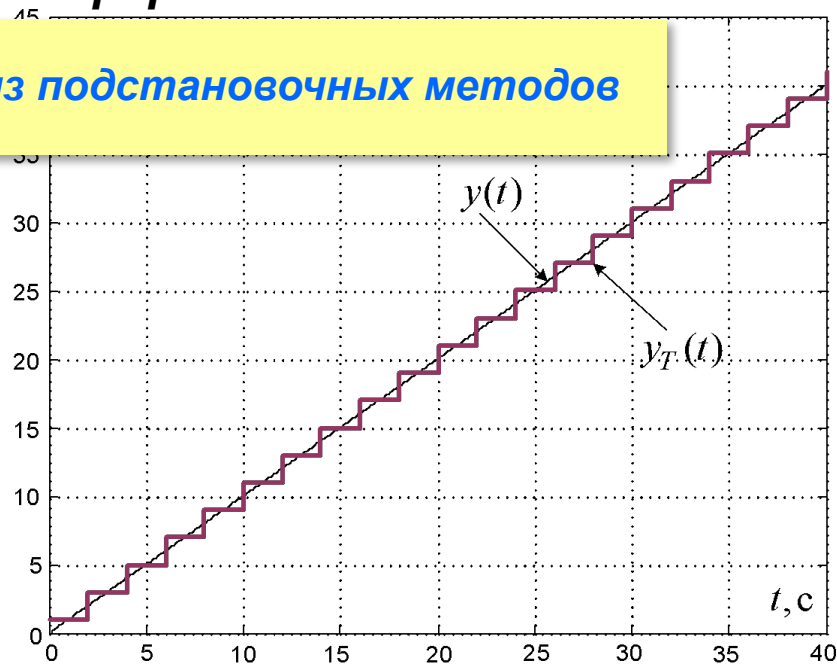
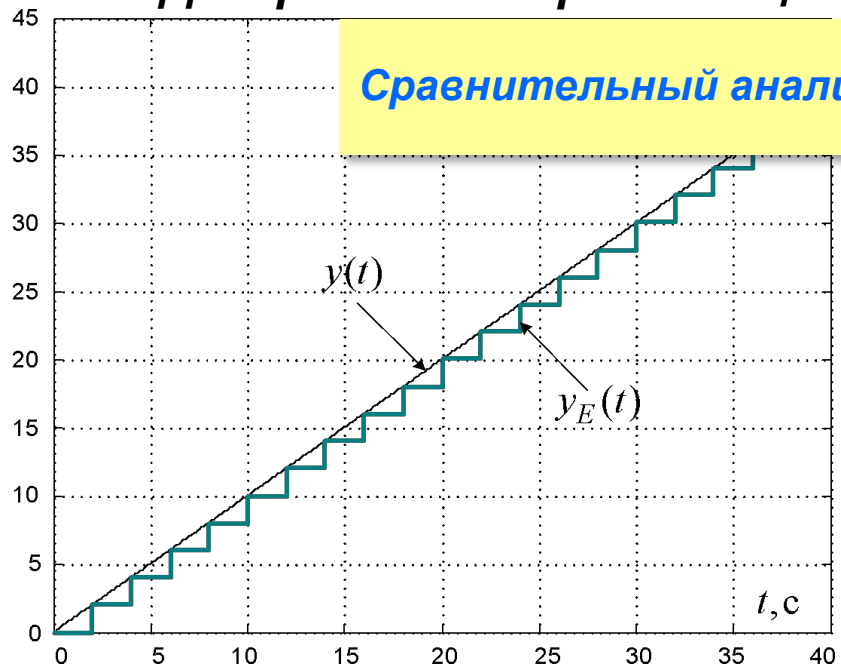


Устойчивость
сохраняется!

В то же время ни один из описанных методов не может гарантировать сохранение устойчивости *замкнутой системы*, поскольку регулятор рассматривается изолированно и влияние остальных элементов системы вообще не учитывается.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ подстановочных методов

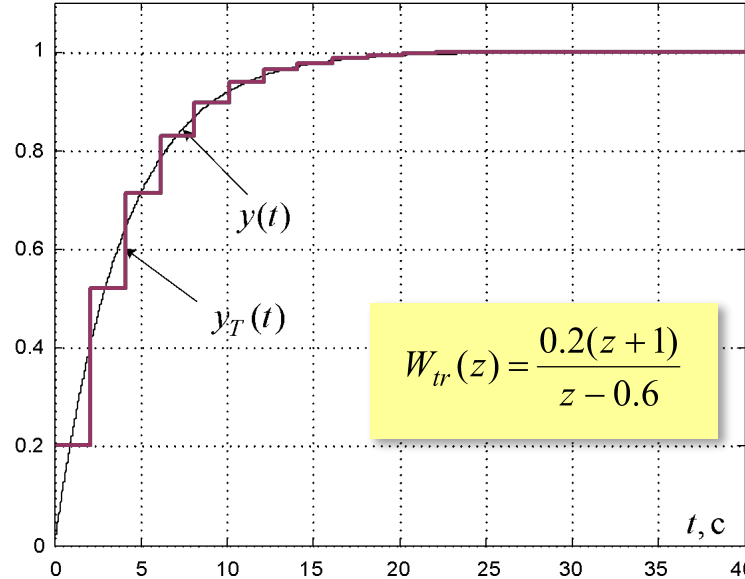
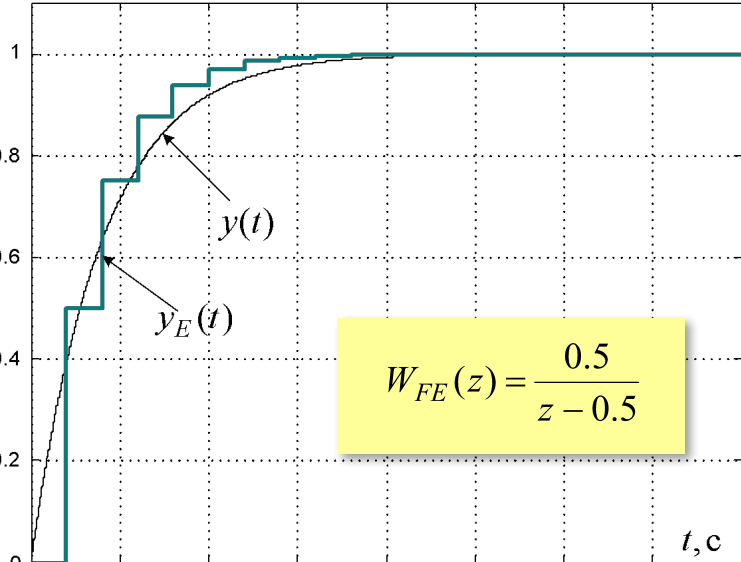


Переходные функции непрерывного интегрирующего звена

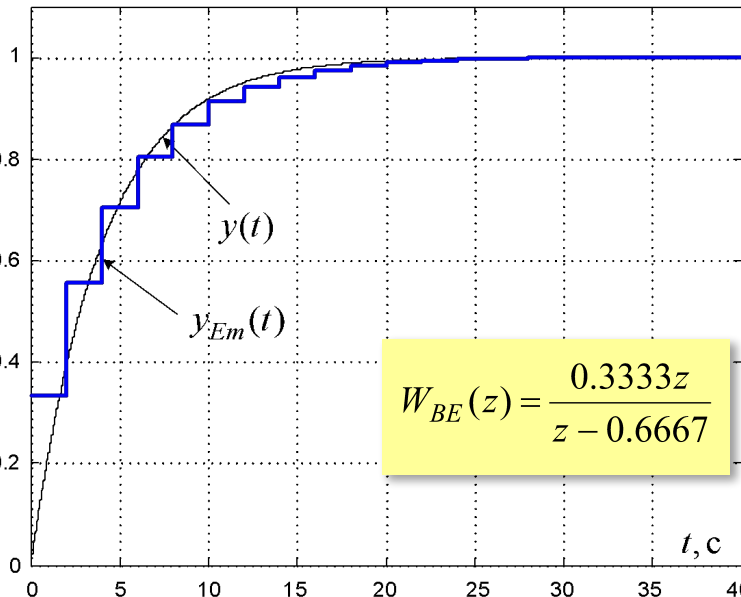
Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ подстановочных методов

$$W(p) = \frac{1}{(4p + 1)}$$



$T = 2$



Сравниваем их с дискретными ПФ этого же звена, полученного методами Z-преобразований

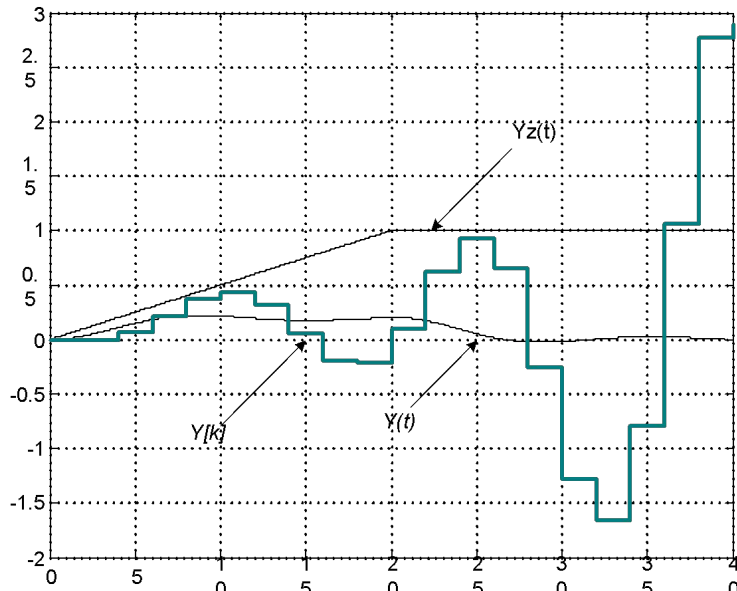
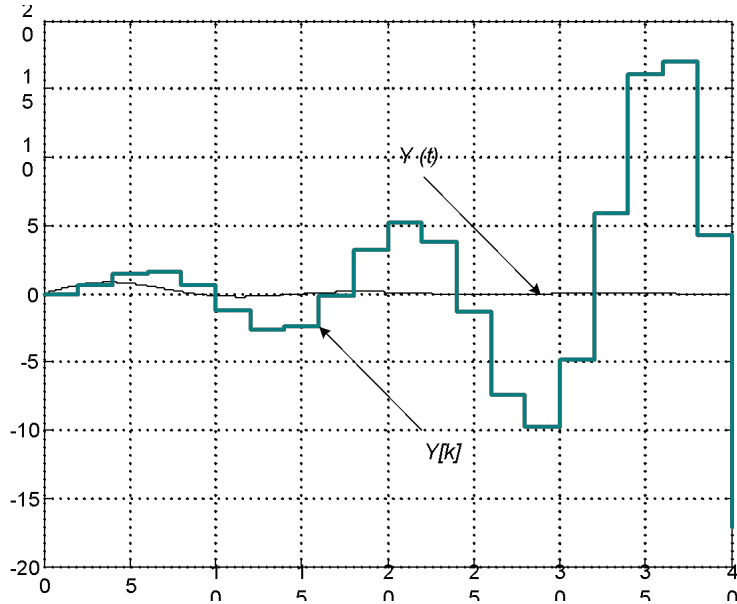
$$W_{zoh}(z) = \frac{0.3935}{z - 0.6065}$$

$$W_{foh}(z) = \frac{0.2131(z + 0.8467)}{z - 0.6065}$$

преобразование Эйлера стремится приблизится к ступенчато-инвариантному Z-преобразованию, а преобразование Тастина – к линейно-инвариантному Z-преобразованию

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ подстановочных методов



Графики переходных процессов, демонстрирующие возможности подстановочных методов дискретизации непрерывной системы 3-го порядка с ПФ

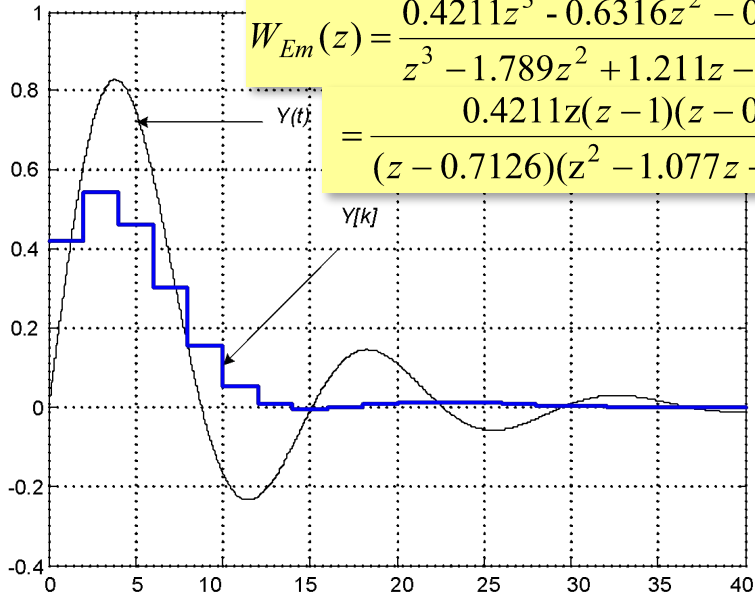
$$W(p) = \frac{4p(2p+1)}{24p^3 + 10p^2 + 6p + 1} =$$
$$= 0.3333 \frac{p(p+0.5)}{(p+0.2016)(p^2 + 0.215p + 0.2066)}$$

$$W_E(z) = \frac{0.6667z^2 - 0.6667z}{z^3 - 2.167z^2 + 2.333z - 0.8333} =$$
$$= \frac{0.6667z(z-1)}{(z-0.5967)(z^2 - 1.57z + 1.397)}$$

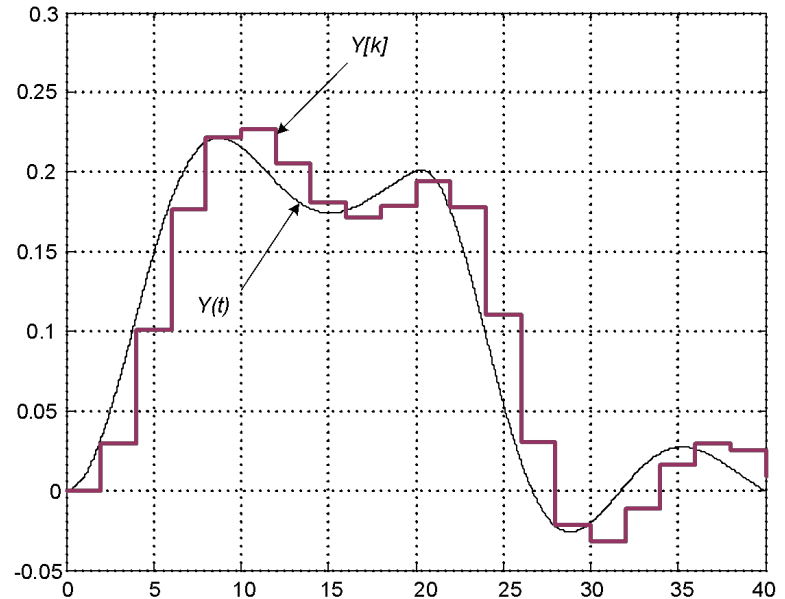
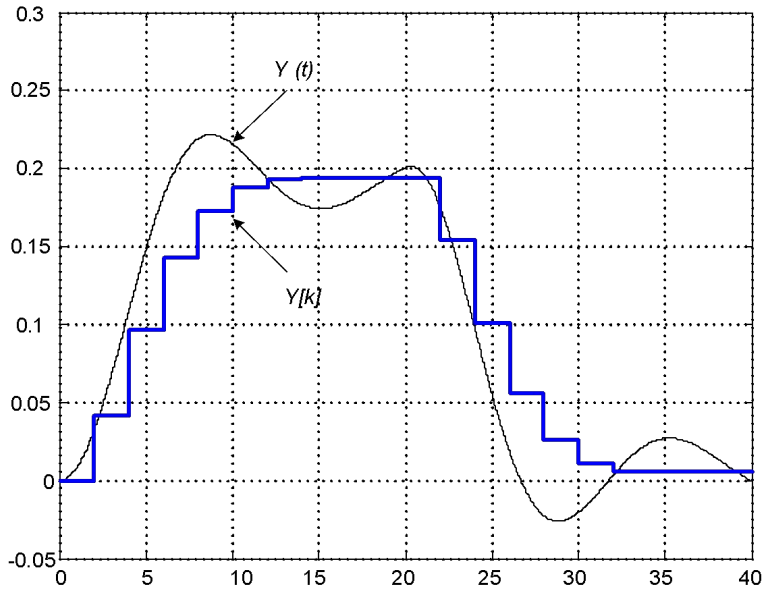
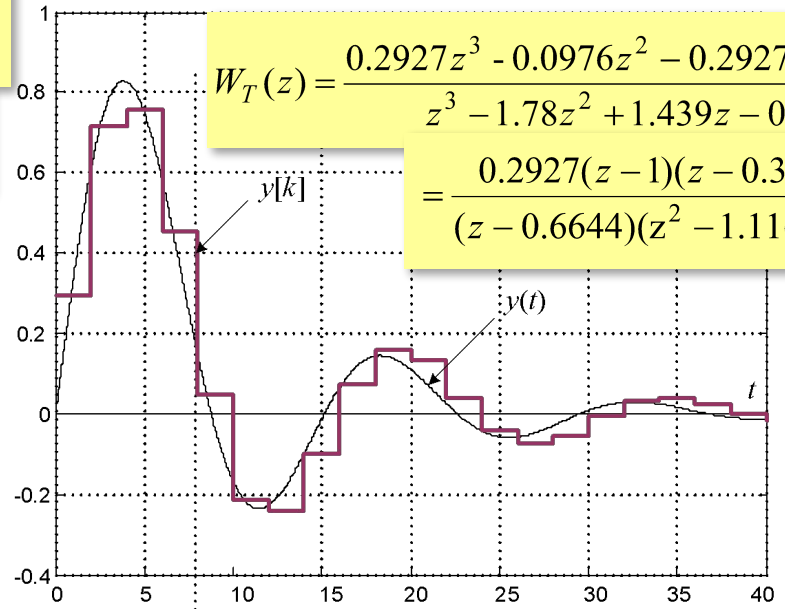
Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ подстановочных методов

$$W_{Em}(z) = \frac{0.4211z^3 - 0.6316z^2 - 0.2105z}{z^3 - 1.789z^2 + 1.211z - 0.3158} = \frac{0.4211z(z-1)(z-0.5)}{(z-0.7126)(z^2-1.077z+0.4431)}$$



$$W_T(z) = \frac{0.2927z^3 - 0.0976z^2 - 0.2927z + 0.0976}{z^3 - 1.78z^2 + 1.439z - 0.4634} = \frac{0.2927(z-1)(z-0.3333)(z+1)}{(z-0.6644)(z^2-1.116z+0.6975)}$$



Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Сравнительный анализ подстановочных методов

Выводы:

- 1) нули и полюса всех подстановочных преобразований отличаются от нулей и полюсов Z-преобразований;
- 2) только преобразование Тастина дополняет ПФ приближенными значениями нулей дискретизации $z_d = -1$; оба из преобразований Эйлера вместо нуля дискретизации дополняют в дискретную передаточную функцию ноль: $z_d = 0$;
- 3) преобразование Эйлера создает дискретную систему, которая при больших периодах квантования может стать неустойчивой, не взирая на устойчивость соответствующего непрерывного объекта; - преобразование Эйлера можно использовать только для непрерывных систем, которые описываются д.у. невысокого порядка, и при малых периодах прерывания (в сравнении с собственными постоянными времени объекта);
- 4) модифицированное преобразование Эйлера характеризуется значительно меньшей точностью дискретизации, чем преобразование Тастина.

Наилучшим из подстановочных преобразований является преобразование Тастина, которое по своим параметрам и свойствам приближается к Z-преобразованию с экстраполяцией первого порядка. Такой вывод совпадает с общепринятой методикой приближенной дискретной аппроксимацией непрерывных объектов, что обеспечивает компромисс между простотой и точностью дискретизации.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Метод соответствия нулей и полюсов

Этот метод отображает непрерывные полюса p_i и нули z_i в дискретные, исходя из взаимосвязи между оператором Лапласа и дискретным оператором:

$$p_{di} = e^{Tp_i} \qquad z_{di} = e^{Tz_i}$$

Допустим, что непрерывный объект имеет 3 действительных полюса:
и ни одного нуля:

$$W(p) = \frac{\beta_0}{(p - \alpha_1)(p - \alpha_2)(p - \alpha_3)}$$

$$\mathbf{P} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]$$

Тогда его дискретная модель, синтезированная с использованием формул будет иметь вид:

$$W_{zp}(z) = \frac{\beta_0}{(z - e^{\alpha_1 T})(z - e^{\alpha_2 T})(z - e^{\alpha_3 T})}$$

Использование соотношений не достаточно для качественной дискретизации в понимании подобности динамических и статических свойств непрерывного объекта и его цифровой модели.

Если количество полюсов дискретного звена превышает количество нулей на r , то реакция этого объекта на входной сигнал начнется с r -ого такта квантования

ПФ обеспечивают разные установившиеся значения переходных функций.

Для ликвидации этих недостатков передаточную функцию дискретной модели необходимо дополнить несколькими нулями, и скорректировать коэффициент её усиления.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Метод соответствия нулей и полюсов

Методика дискретизации непрерывного динамического объекта методом соответствия нулей и полюсов:

1) находим полюса p_i непрерывной системы решением характеристического уравнения

$$G_n(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0 = 0$$

2) находим нули z_i непрерывной системы решением уравнения

$$H_m(s) = \beta_m p^m + \beta_{m-1}p^{m-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0 = 0$$

3) рассчитываем соответствующие дискретные полюса и дискретные системные нули

$$p_{di} = \exp(Tp_i) \qquad z_{dsi} = \exp(Tz_i)$$

4) дополняем дискретную передаточную функцию нулями квантования $z_{dkj} = -1$

так, чтобы скорректированный таким способом порядок числителя m_d был на единицу меньше порядка знаменателя:

$$m_d = n - 1 \qquad j = m + 1, m + 2, \dots, n - 1$$

или, равным с ним:

$$m_d = n \qquad j = m + 1, m + 2, \dots, n - 1, n$$

5) выделяем из векторов аналоговых нулей и полюсов нейтральные (т.е. те, которые для непрерывной системы равняются 0, а для дискретной – 1) и подсчитываем их количество (μ и ν соответственно):

6) рассчитываем коэффициент передачи в установившемся режиме непрерывного звена

$$k = K \prod_{i=1}^{n_1} (-p_{1i}) / \prod_{j=1}^{m_1} (-z_{1j}) \qquad K = \beta_m$$

$m_1 = m - \mu$, $n_1 = n - \nu$ – количество ненулевых аналоговых нулей и полюсов соответственно;

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Метод соответствия нулей и полюсов

б) рассчитываем коэффициент K_d дискретного объекта
$$K_d = kT^{\nu-\mu} \cdot \prod_{i=1}^{n_{d1}} (1 - p_{d1i}) / \prod_{j=1}^{m_{d1}} (1 - z_{d1j})$$

$p_{d1i}, z_{d1j}, m_{d1}, n_{d1} = n_1$ – не единичные дискретные нули и полюса и их количество соответственно.

ПФ, полученные при дискретизации непрерывного объекта по изложенной выше методике имеют вид:

$$\text{при } m_d = n - 1 \quad W_{zp0}(z) = \frac{0.6583z^2 - 0.9004z + 0.2422}{z^3 - 1.692z^2 + 1.334z - 0.4346} = \frac{0.6583(z-1)(z-0.3679)}{(z-0.6681)(z^2 - 1.024z + 0.6505)}$$

$$\text{при } m_d = n \quad W_{zp1}(z) = \frac{0.3291z^3 - 0.1211z^2 - 0.3291z + 0.1211}{z^3 - 1.692z^2 + 1.334z - 0.4346} = \frac{0.3291(z-1)(z-0.3679)(z+1)}{(z-0.6681)(z^2 - 1.024z + 0.6505)}$$

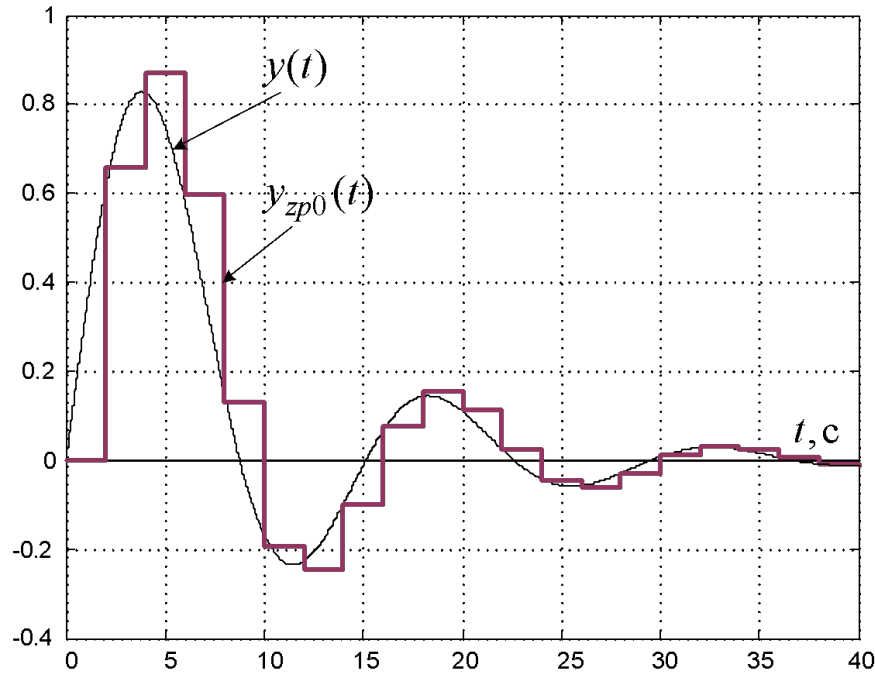
Они оказываются очень похожими на передаточные функции, полученные методами Z-преобразования с экстраполяцией нулевого и первого порядков, т.е.

$$W_{zp0}(z) \approx W_{zoh}(z)$$

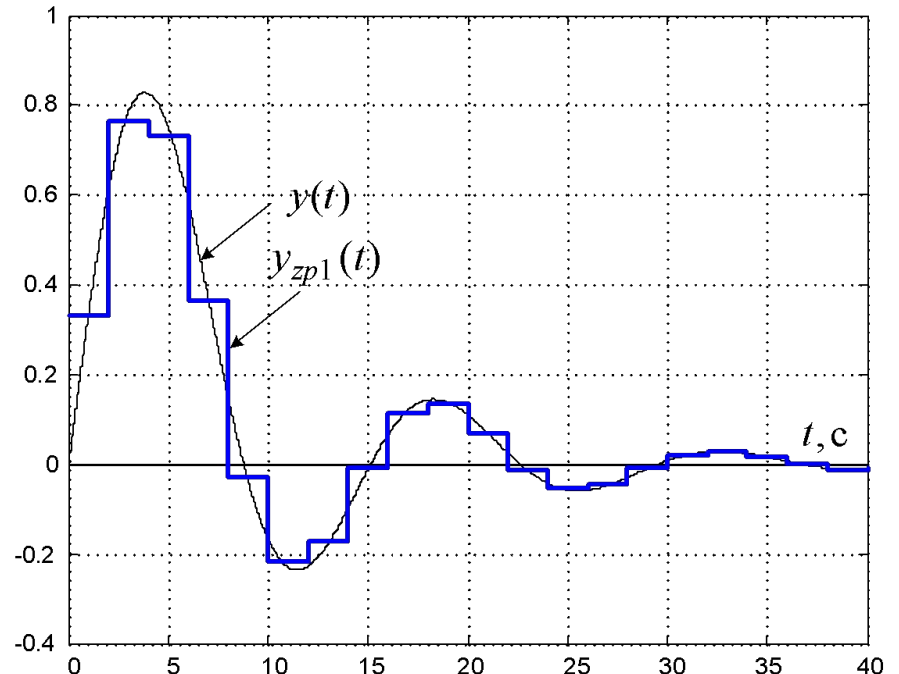
$$W_{zp1}(z) \approx W_{foh}(z)$$

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Метод соответствия нулей и полюсов



$$m_d = n - 1$$



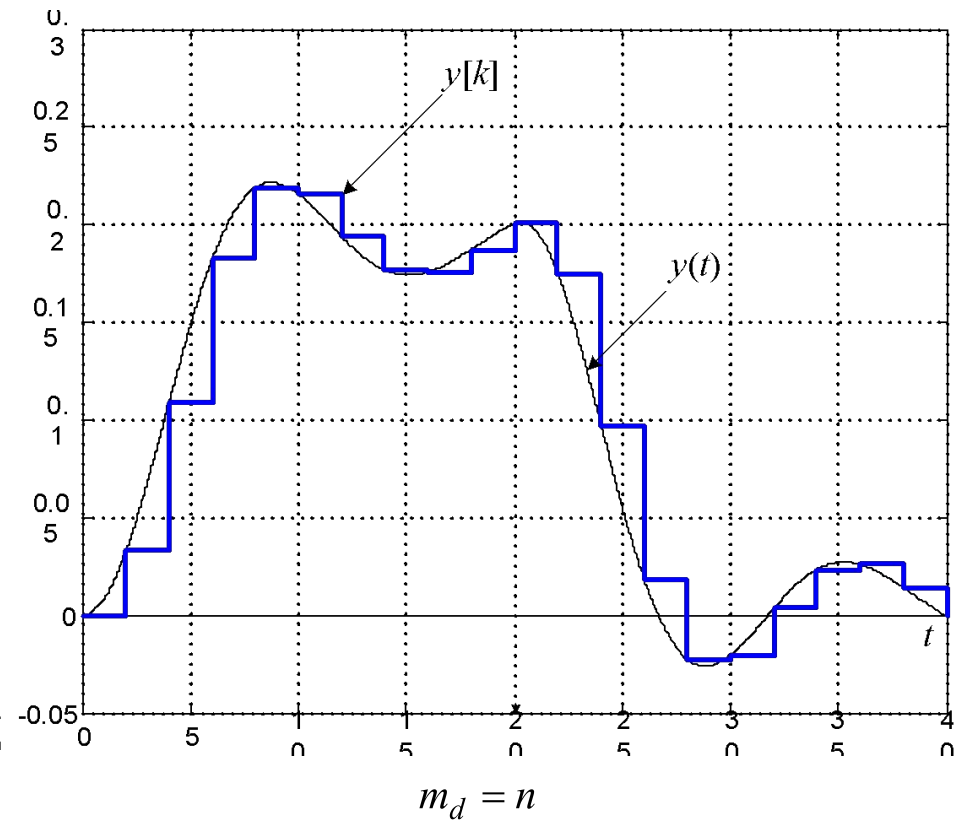
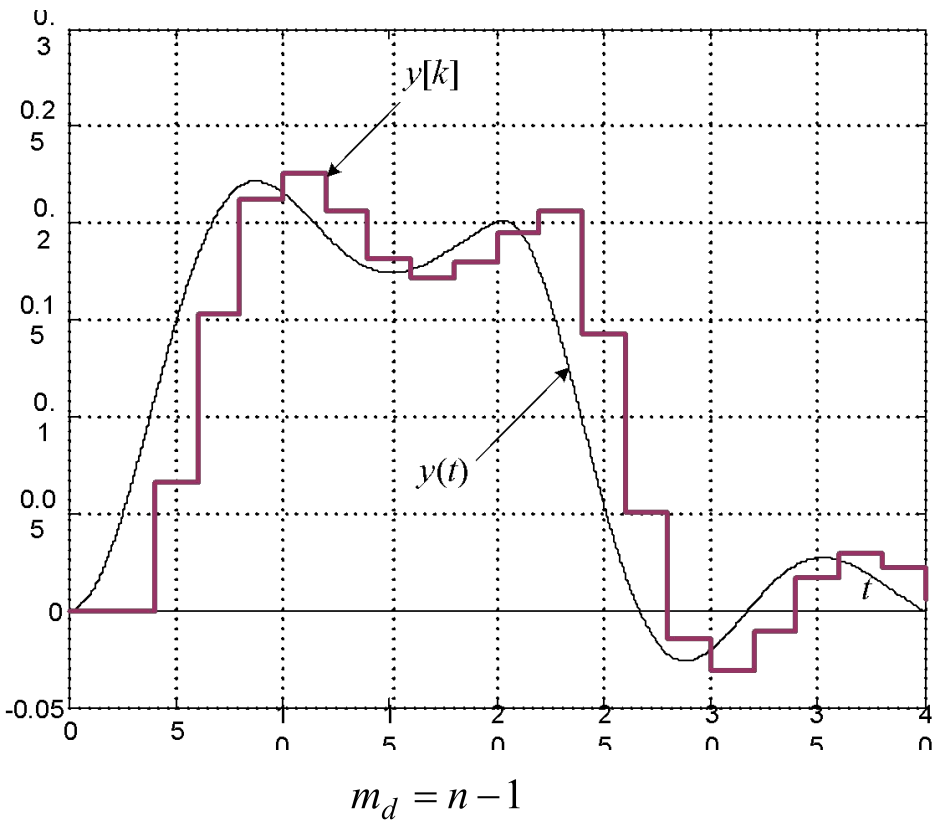
$$m_d = n$$

Переходные функции непрерывной системы и её дискретных аналогов, определенных методом согласования нулей и полюсов

Даже при таком завышенном периоде квантования полученные дискретные переходные функции приближаются к переходным функциям, полученным при дискретизации методами Z-преобразования.

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

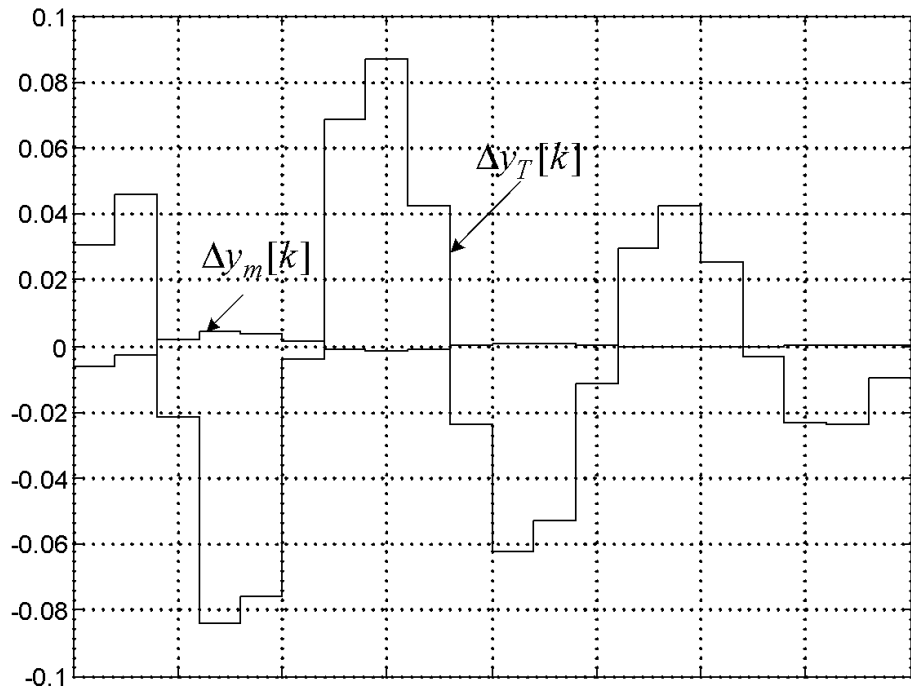
Метод соответствия нулей и полюсов



Реакция непрерывной системы и её дискретных аналогов, определенных методом согласования нулей и полюсов

Дискретная аппроксимация непрерывных динамических объектов

Метод соответствия нулей и полюсов



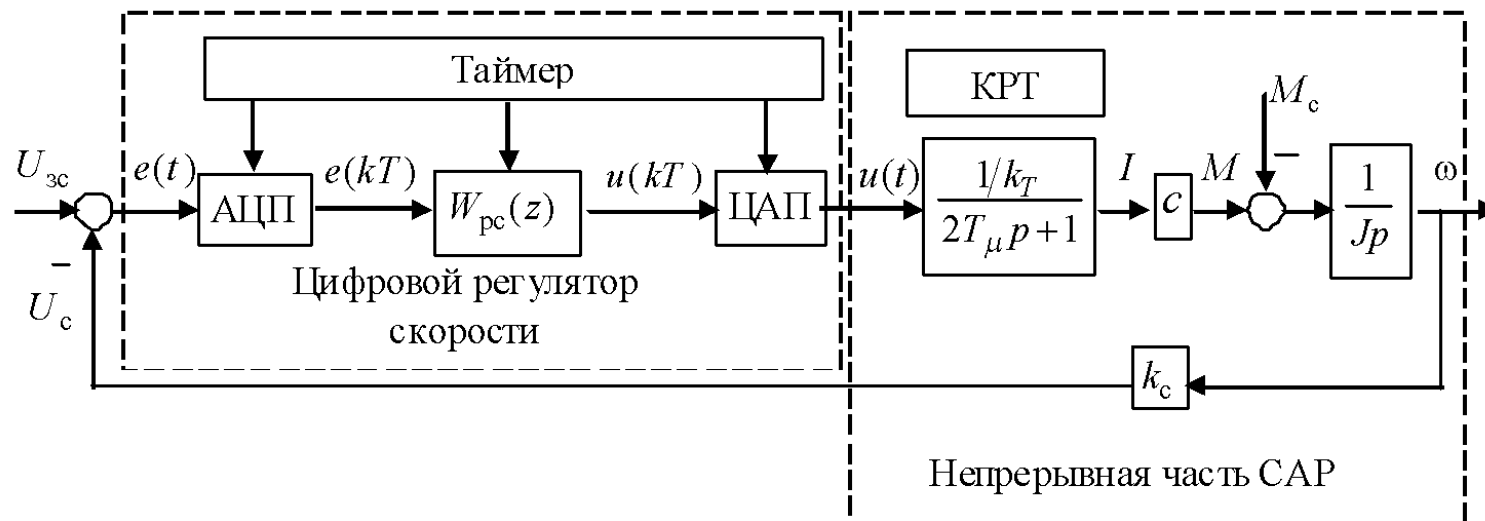
Отклонения переходных функций дискретных систем, созданных методами Тастина и согласования нулей и полюсов от переходной функции системы, созданной методом Z-преобразования с FON

Дискретная аппроксимация методом согласования нулей и полюсов при $m_d=n$ для рассмотренного примера имеет значительно меньше отклонение от аппроксимации метода Z-преобразования с экстраполяцией первого порядка, чем при использовании метода Тастина, который чаще всего рекомендуется для применения в качестве приближенного метода дискретизации.

К преимуществам метода согласования относится также то, что дискретные системы, полученные таким способом не нужно проверять на устойчивость.

Дискретизация ПИ-регулятора скорости

Рассмотрим структурную схему САР с аналоговым регулятором тока и цифровым регулятором скорости



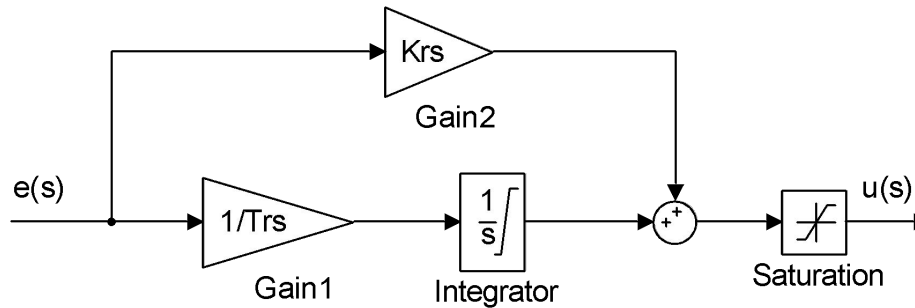
Структурная схема цифро-аналоговой СПР скорости электропривода постоянного тока

При дискретизации ПИ-регулятора с ограничением выходного сигнала необходимо исходить из того, что вместе с ограничением выходного сигнала нужно ограничивать и его интегральную составляющую. Поэтому синтез цифрового ПИ-РС целесообразно выполнять одним из подстановочных методов в таком порядке:

1) составляем детализированную структурную схему аналогового регулятора, в которой аналоговый интегратор и выходной сумматор ограничены на одинаковом уровне:

$$U_{pc \max} = k_T I_{\max}$$

Дискретизация ПИ-регулятора скорости

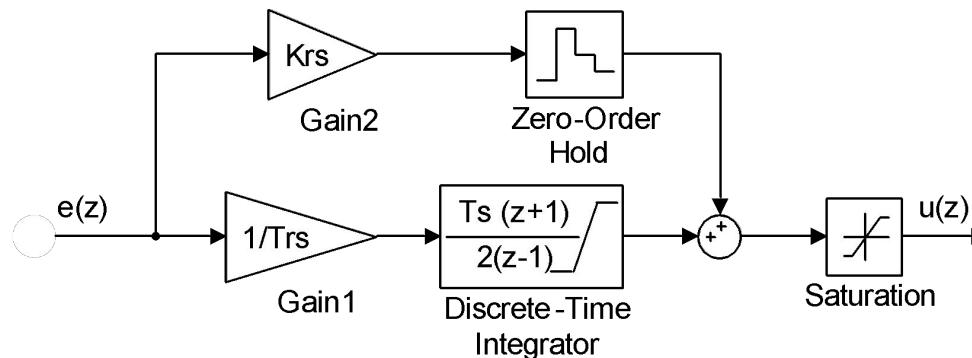


Детализованная *Simulink*-модель аналогового ПИ-РС

2) заменяем непрерывный интегратор с ограничением одним из рассмотренных выше цифровых интеграторов с ограничением.

При моделировании такого регулятора в среде *Simulink* необходимо еще на выходе пропорционального звена установить экстраполятор нулевого порядка (*Zero Order Hold*).

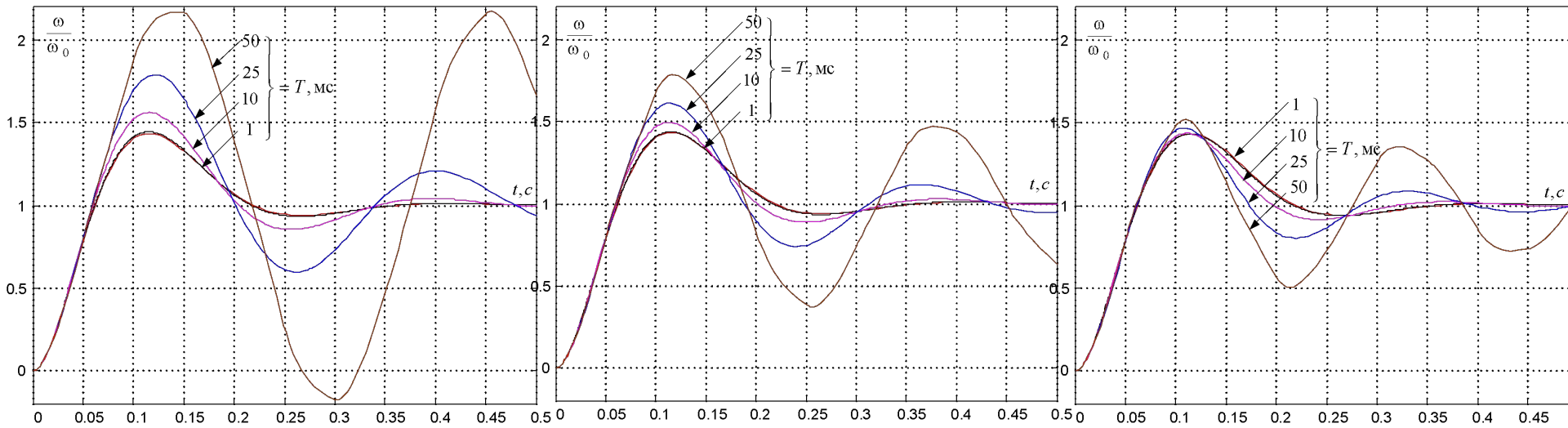
Интегратор с ограничением нельзя заменить последовательным соединением интегратора и звена «ограничения координат».



Модель цифрового ПИ-РС с дискретным интегратором, интегрирующим методом трапеций

Дискретизация ПИ-регулятора скорости

Рассмотрим динамические свойства ЭП с разными типами цифровых интеграторов в составе синтезированных ПИ-РС.



а) *Forward Euler*;

б) *Trapezoidal*;

в) *Backward Euler*

Реакция ЭП с цифровым ПИ-РС, полученным подстановочными методами, на ступенчатый сигнал задания без коррекции параметров регулятора.

При выборе достаточно малого такта квантования (меньше 10 мс), все синтезированные регуляторы обеспечивают достаточно близкую картину переходного процесса к той же картине для непрерывной системы, соответствующей настройке контура скорости на симметричный оптимум.

Дискретизация ПИ-регулятора скорости

Учтем величину периода квантования:

а) при замене непрерывного интегратора цифровым интегратором, синтезированным методом прямой аппроксимации Эйлера (*подстановка Эйлера*)

$$T_c = 2(T_T + T/2)$$

$$T_{oc} = 2(T_c + T/2)$$

б) при замене непрерывного интегратора цифровым интегратором, синтезированным методом трапеций (*подстановка Тастина*)

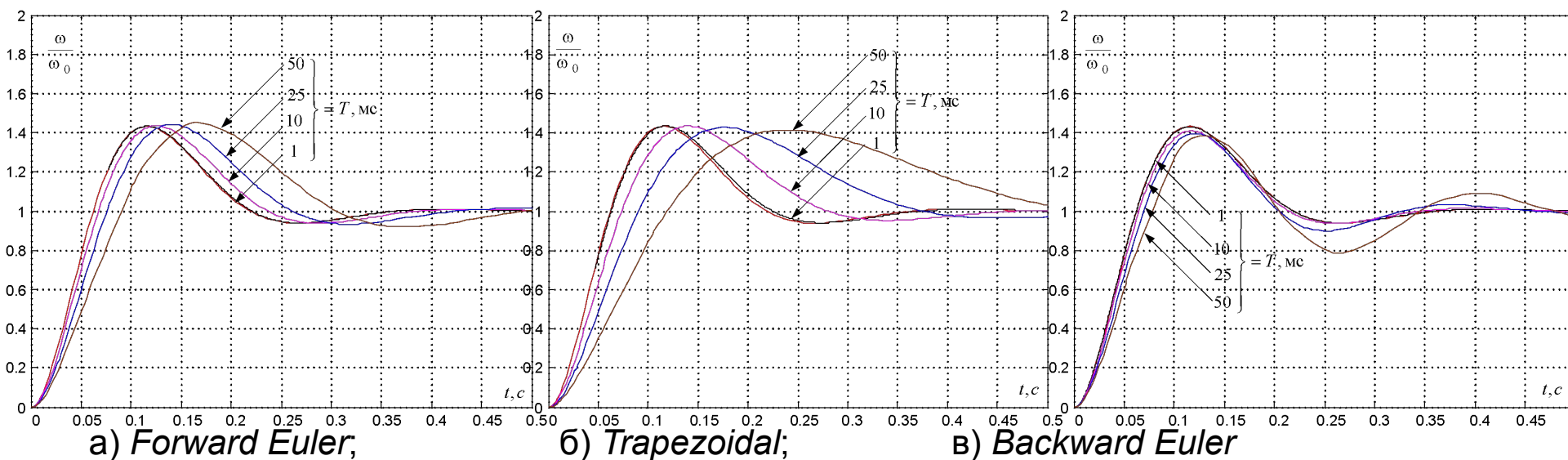
$$T_c = 2(T_T + T/4)$$

$$T_{oc} = 2(T_c + T/4)$$

в) при замене непрерывного интегратора цифровым интегратором, синтезированным методом обратной аппроксимации Эйлера (*модифицированная подстановка Эйлера*)

$$T_c = 2(T_T + T/8)$$

$$T_{oc} = 2(T_c + T/8)$$



Реакция ЭП с цифровым ПИ-РС, полученным подстановочными методами, с коррекцией.

Дискретизация ПИ-регулятора скорости

Перерегулирование при возрастании периода дискретности остается почти неизменным, сопровождаясь, однако, уменьшением быстродействия.

Наиболее опасным из подстановочных методов при большом периоде квантования является метод прямой аппроксимации Эйлера, не гарантирующий устойчивости системы.

Итак, при правильном выборе такта квантования любым из рассмотренных методов можно обеспечить заданные статические и динамические характеристики электропривода, исходя из известных характеристик непрерывного корректирующего устройства.

Цифровые датчики скорости (ЦДС) могут измерять как мгновенное, так и среднее за такт квантования значение скорости. В последнем случае разностное уравнение ЦДС можно записать в виде

$$\omega_{\text{дс}}(kT) = \frac{\omega(kT) + \omega(kT - T)}{2}$$

Операторное уравнение

$$z\omega_{\text{дс}}(z) = \frac{z\omega(z) + \omega(z)}{2}$$

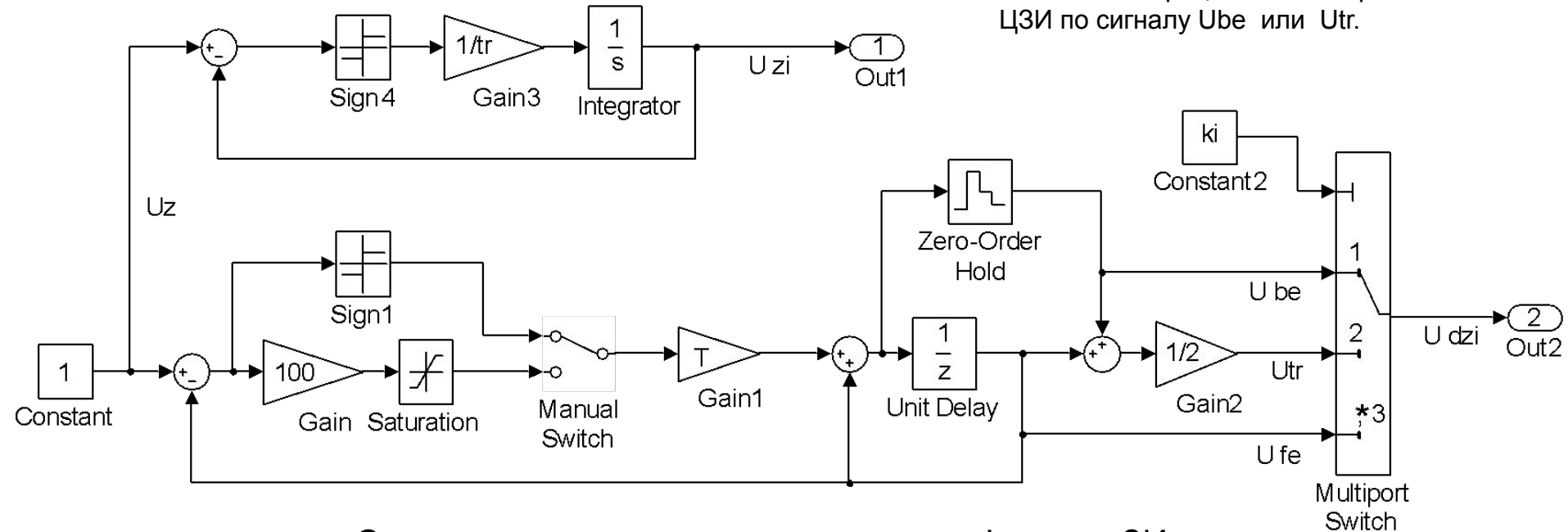
Передаточная функция

$$W_{\text{дс}}(z) = \frac{\omega_{\text{дс}}(z)}{\omega(z)} = \frac{z+1}{2z}$$

Появление в канале обратной связи по скорости такого звена приводит к увеличению перерегулирования переходной функции и к необходимости уменьшения коэффициента усиления ЦРС.

Дискретизация задатчика интенсивности

Создание алгебраической петли в случае замыкания отрицательной обратной связи ЦЗИ по сигналу U_{be} или U_{tr} .



Структурная модель аналогового и цифрового ЗИ

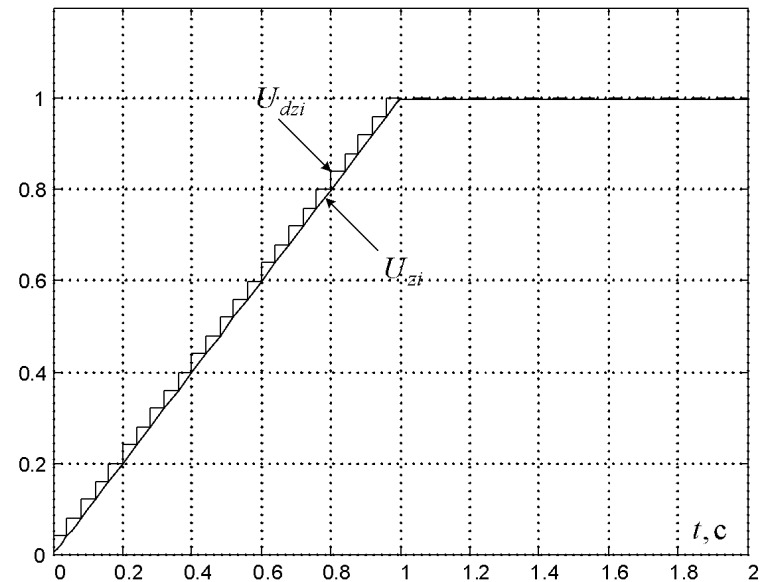
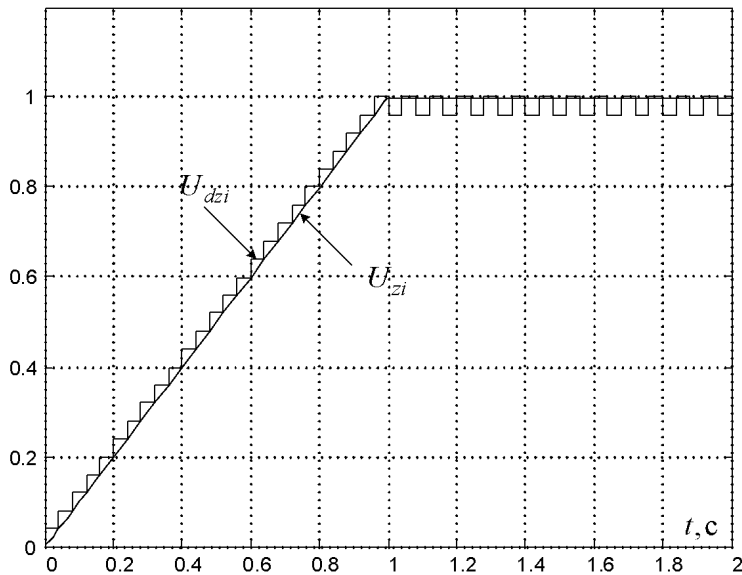
При дискретизации ЗИ, можно использовать любые из цифровых интеграторов, но, из условия предотвращения создания алгебраического контура, замыкать дискретный ЗИ отрицательной обратной связью нужно только по выходному сигналу цифрового интегратора, созданного методом прямой аппроксимации Эйлера.

Для этого структурные схемы других интеграторов нужно детализировать. В этом случае выходной сигнал цифрового ЗИ и сигнал обратной связи могут отличаться один от другого.

Дискретизация задатчика интенсивности

Еще одной особенностью ЦЗИ является необходимость замены блока с релейной характеристикой блоком «ограничения координат» с большим коэффициентом усиления, что позволит предотвратить наличие автоколебаний выходного сигнала ЦЗИ в установившемся режиме.

Автоколебания вызваны тем, что равенство сигналов задания и обратной связи может быть недостижимым вследствие эффекта квантования по времени и отсутствием «нуля» в арифметике с плавающей точкой.



а) без коррекции характеристики релейного элемента;

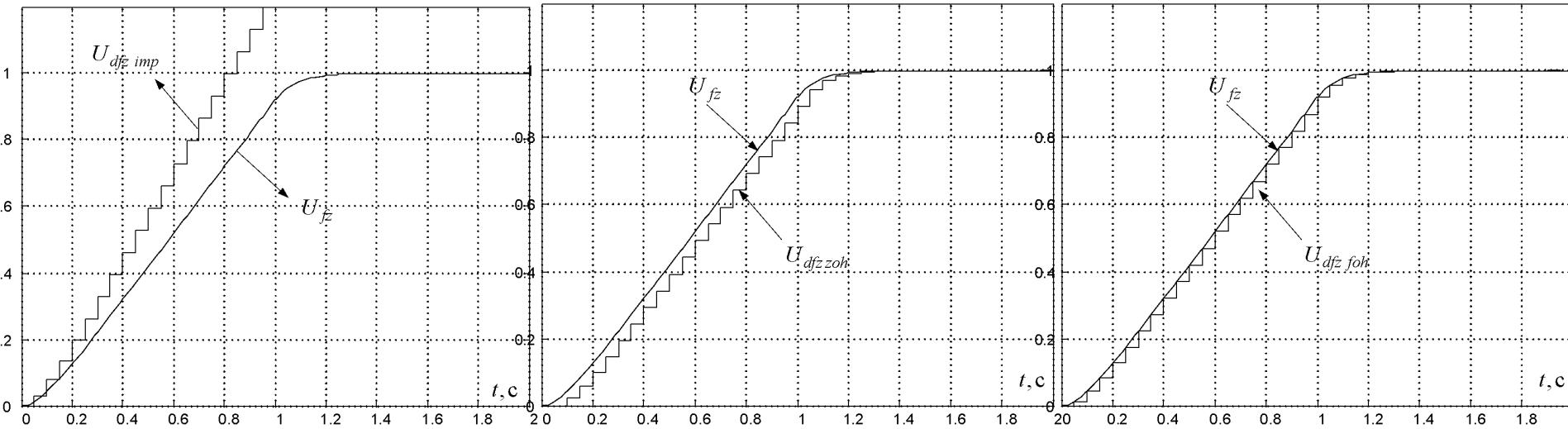
б) с коррекцией

Выходные сигналы аналогового и цифрового задатчиков интенсивности

Вероятность возникновения автоколебаний увеличивается, когда время работы на линейном участке не кратно периоду квантования.

Дискретизация фильтра на выходе задатчика интенсивности

Результаты фильтрации тремя синтезированными дискретными фильтрами при $T=0.05$ с.



Выходной сигнал ДЗИ снимался с ЦИ, синтезированного методом *Forward Euler*.

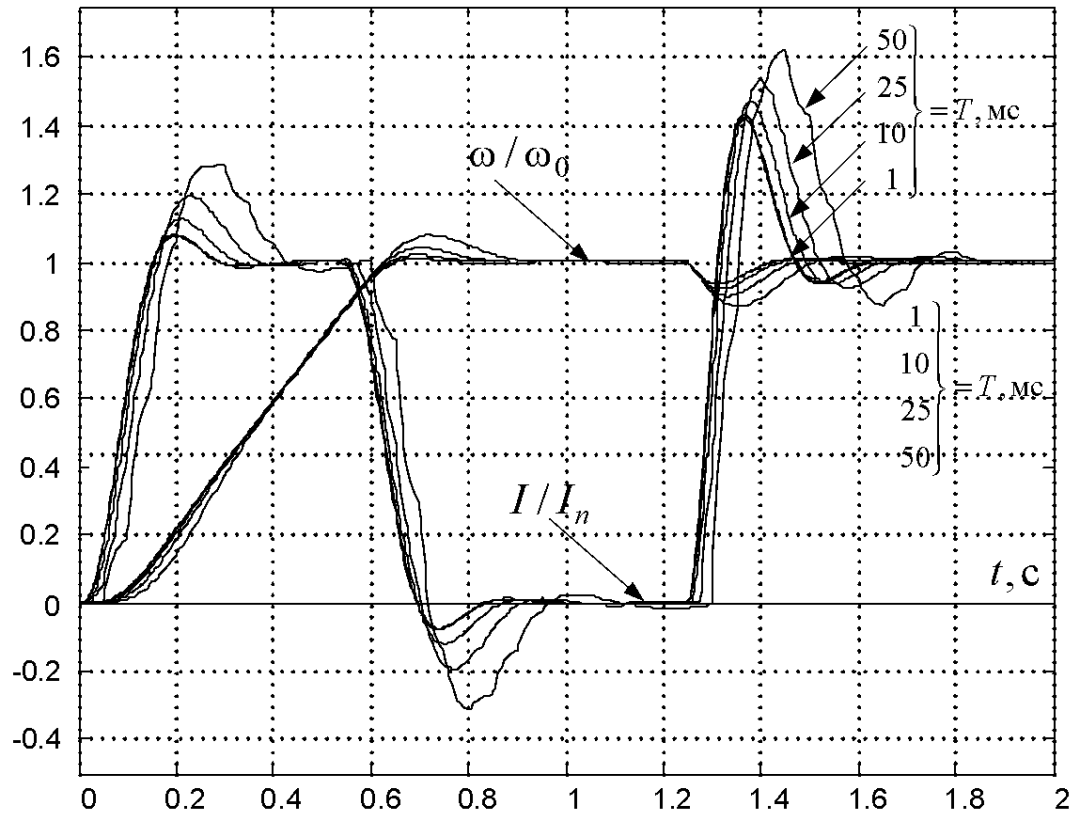
Наилучшие результаты при дискретизации непрерывного фильтра должен дать метод Z-преобразования с экстраполяцией первого порядка, что видно и из результатов моделирования (foh): переходные процессы линейного и дискретного фильтров в моменты времени, кратные периоду прерывания, совпадают.

Дискретный фильтр, полученный методом Z-преобразования с zoh, отстает от сигнала аналогового прототипа, но это можно исправить, если на вход такого фильтра подать с ЦЗИ выходной сигнал интегратора, который вычисляет интеграл методом трапеций. Реакция этого фильтра на выходной сигнал указанного интегратора будет иметь вид (foh).

При дискретизации фильтра на выходе ЗИ метод Тастина и метод соответствия нулей-полюсов с дополнительным нулем дискретизации дают практически одинаковые результаты с линейно-инвариантным Z-преобразованием.

Выбор такта квантования

Эмпирическое правило



Переходные процессы при $T=1\text{мс}$ практически совпадают с соответствующими графиками непрерывной системы, при $T=10\text{мс}$ они, хоть и имеют чуть-чуть большее перерегулирование по току и небольшое отставание от непрерывных сигналов, являются полностью удовлетворительными.

Учитывая, что частота среза аналоговой системы имеет значение

$$\Omega_{\text{ср}} = 1/T_c = 1/0.04 = 25 \text{ рад/с,}$$

величина такта квантования может быть вычислена по формуле

$$T \approx \frac{1}{(5 \div 10) \cdot \Omega_{\text{ср}}} = \frac{(0.1 \div 0.2)}{\Omega_{\text{ср}}}$$

Переходные процессы в цифро-аналоговой системе подчиненного регулирования скорости

$$T \approx \frac{1}{(4 \div 10) \Omega_{\text{ср}}} = (0.1 \div 0.25) T_c = (0.004 \div 0.01) \text{с} = (4 \div 10) \text{мс}$$

Частота дискретизации должна быть в 5-10 раз больше частоты среза эквивалентной непрерывной системы или, чтобы времени переходного процесса соответствовало, как минимум 5 тактов квантования.

Полученный диапазон значений периода дискретности полностью можно использовать в качестве первого приближения при проектировании цифро-аналоговых систем