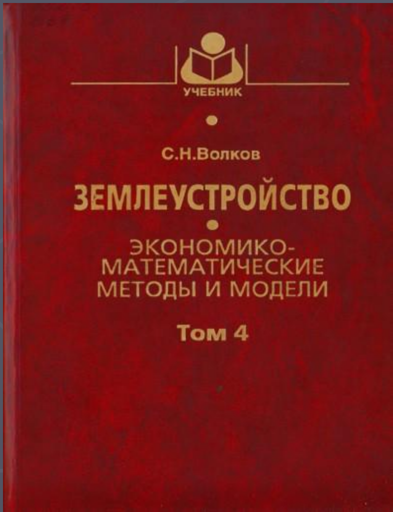
МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ»

Факультет Заочный
Направление 38.03.02 «Менеджмент»
Кафедра Землеустройства

Дисциплина «Математические методы в экономике»

Лекция 2. Распределительный метод линейного программирования

Лектор: доцент кафедры землеустройства,
к.э.н. Сорокина Ольга Анатольевна



План лекции

1. **Понятие линейного программирования.**
2. **Землеустроительные задачи, решаемые методами линейного программирования.**
3. **Понятие и сущность транспортной задачи**
4. **Отличительные особенности распределительных задач линейного программирования.**
5. **Базовая модель задачи, решаемой распределительным методом**
6. **Допустимое и оптимальное решения распределительных задач**
7. Методы составления первого опорного плана (решения)
8. **Алгоритм метода минимального элемента**
9. **Алгоритм метода максимального элемента**

0. Алгоритм метода аппроксимации на min
1. Алгоритм метода аппроксимации на max

1. Понятие линейного программирования

- В линейных моделях целевая функция и ограничения задачи представлены в виде системы линейных уравнений и неравенств (неизвестные в первой степени).
- Линейное программирование – это часть математического программирования, связанная с решением экстремальных задач, в которых целевая установка (критерий оптимальности) и условия (ограничения) выражаются линейными функциями.
- Наиболее известны алгоритмы линейного программирования: распределительный и симплексный методы

1. Понятие линейного программирования

- Алгоритмы линейного программирования базируются на последовательном улучшении первоначального плана и за определенное число циклически повторяющихся вычислений позволяют получить оптимальное решение.
- После каждой из итераций значение целевой функции улучшается. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет получен оптимальный план.

3. Понятие и сущность транспортной задачи

Постановка задачи:

Имеется m поставщиков с запасом A_i (i=1, 2, …m);

i - номер поставщика;

И n – потребителей с потребностями грузов B_j (j= 1, 2, …n);

j – номер потребителя;

индексы i, m принадлежат строке; j, n – столбцу.

Известна стоимость перевозки единицы груза по каждому возможному маршруту c_{ij} из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

Требуется определить такие оптимальные маршруты поставок x_{ij} от i-го поставщика к j-му потребителю (т.е. такой план перевозок), чтобы значение целевой функции достигало своего экстремума (min, max).

x_{ij} – объем груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

3. Понятие и сущность транспортной задачи. Табличная форма записи исходных данных транспортной задачи

Пункт назначения Пункт отправления	1	2	j…	n	Запасы груза ai
1	C11 X11	C12 X12	C1j X1j	C1n X1n	A1
2	C21 X21	C22 X22	C2j X2j	C2n X2n	A2
i…	Ci1 Xi1	Ci2 Xi2	Cij Xij	Cin Xin	Ai
m	Cm1 Xm1	Cm2 Xm2	Cmj Xmj	Cmn Xmn	Am
Потребность в грузах Bi	B1	B2	Bj	Bn	ΣA_i ΣB_i

4. Отличительные особенности распределительных задач линейного программирования.

1. Все условия задачи (ограничения) представлены в виде уравнений .
2. Все переменные в выражаются в одних и тех же единицах измерения (га, км, руб, ц и т. д.).
3. Все коэффициенты при переменных в ограничениях модели всегда равны единице.
4. Каждая переменная входит только в два ограничения: в ограничение по строке и в ограничение по столбцу.

5. Базовая модель задачи, решаемой распределительным методом

Экономико-математическая модель состоит из трех составных частей:

1. целевая функция;
2. система ограничений;
3. неотрицательность переменных.

Структурная запись

I. Целевая функция: $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Cijxij \longrightarrow \min(\max)$

Развернутая запись

$$Z = C11X11 + C12X12 + ... + CmnXmn \longrightarrow \min(\max)$$, где

c_{ij} — стоимость **перевозки** единицы груза из I-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

II. Система ограничений

Ограничения по строкам

Количество перевозимых грузов из i-го пункта отправления в j-ые пункты назначения равно запасу i-го пункта отправления.

Структурная запись $$\sum_{j=1}^{n} Xij = Ai(i=1...m)$$

Развернутая запись

$$x_{11}+x_{12}+x_{1j}+\ldots+x_{1n}=A_1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{2j}+\ldots+x_{2n}=A_2$$
$$x_{i1}+x_{i2}+x_{ij}+\ldots+x_{in}=A_i$$
$$x_{m1}+x_{m2}+x_{mj}+\ldots+x_{mn}=A_m$$

Количество перевозимых грузов из **i-**х пунктов отправления в **j-**ый пункт назначения должно равняться потребности в j-м пункте назначения.

Ограничения по столбцам

Структурная запись

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \left(j = 1...n\right)$$

Развернутая запись

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{i1} + \dots x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{i2} + \dots x_{m2} = b_2 \\ x_{1j} + x_{2j} + x_{ij} + \dots x_{mn} = b_j \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{in} + \dots x_{mn} = b_n \end{cases}$$

Балансовое условие:
Количество распределяемых грузов и потребности в них должны быть равны:
Структурная запись

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

Развернутая запись:
$A_1+A_2+\ldots+A_m=B_1+B_2+\ldots+B_n,$

если $\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$, модель задачи закрытая;

если $\sum_{i=1}^{m} A_i \neq \sum_{j=1}^{n} B_j$, модель задачи открытая

Для решения задачи открытую модель приводят к закрытому виду путем введения фиктивного пункта отправления с запасом, равным:

$$A_{m+i} = \sum_{j=1}^{n} Bj - \sum_{i=1}^{m} A1$$

или фиктивного пункта назначения с потребностью, равной:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a1 - \sum_{j=1}^{n} bj$$

Стоимость перевозок грузов по фиктивному пункту принимают равными «0».

$$C_{in+i} = 0(i = 1,2,...m)$$

$$C_{im+i} = 0(1,2,...n)$$

При расчете разностей $\mu_к$ фиктивные элементы (столбец или строка) участвуют в последнюю очередь.

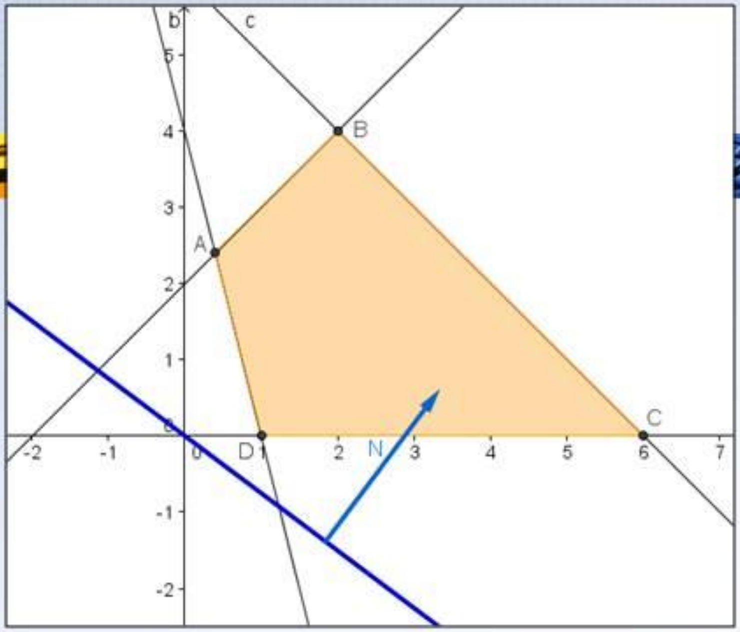
III. Условие неотрицательности переменных

$$Xij \geq 0$$

6. Допустимое и оптимальное решения распределительной задачи

- Допустимое решение – это такая совокупность значений переменных X_{ij}, которая удовлетворяет всем поставленным в задаче ограничениям.
- Оптимальное решение – допустимое решение, приводящее к экстремуму (минимуму/максимуму) значение целевой функции.

На рисунке: оптимальное решение находится в одной из вершин многоугольника решений A, B, C, D



Если задача линейного программирования имеет **оптимальное решение**, то оно **соответствует** хотя бы одной **угловой точке** многогранника решений (и совпадает с одним из допустимых базисных решений системы ограничений)

7. Методы составления первого опорного плана (решения)

1. Метод северо-западного угла.
2. Метод наилучшего элемента (минимального, максимального в зависимости от критерия оптимизации).
3. Метод аппроксимации.

Любой из методов позволяет найти опорное решение, но они различаются по количеству итераций, которые необходимо осуществить, и по степени близости базисного решения к оптимальному.

8. Алгоритм метода минимального элемента

- На каждом шаге алгоритма поиска опорного решения стараются занять максимально возможным ресурсом прежде всего те клетки транспортной таблицы, в которых стоят наименьшие величины Cij.

1. Из всех оценок Cij в таблице выбирают наименьшее.
2. В соответствующую клетку записывают значение Xij, равное наименьшему из соответствующих величин Ai, Bj.
3. Определяют новые значения величин Ai, Bj.
4. Если запас груза Ai равен нулю а потребность в грузе Bj больше нуля, то из таблицы вычеркивают соответствующую строку. Если Bj равен нулю, то вычеркивают столбец. Если обе величины Ai, Bj равны нулю, то вычеркивают только строку или только столбец. С оставшимся элементом далее работают как обычно.
5. Далее указанные операции повторяются до тех пор пока все ресурсы не будут распределены по клеткам.

8. Алгоритм метода минимального элемента

6. Полученное решение необходимо проверить по числу занятых клеток их должно быть m + n – 1. Если число занятых клеток равно этому условию, то такое решение называется невырожденным, если число занятых клеток меньше, то это решение вырождено. Вырожденность можно преодолеть. Если число занятых клеток больше, то нужно искать ошибку в решении.

   Также проверяем сходится ли сумма по строке с запасами груза Ai, и сумма по столбцу с Bj.

7. Далее считаем целевую функцию.

9. Алгоритм метода максимального элемента

При решении задачи на максимум приведенный алгоритм меняется только в первом шаге:

вместо минимального значения Cij находят максимальное и далее работают с соответствующей клеткой.

10. Алгоритм метода аппроксимации на min

- **На каждом шаге выбор, очередной клетки, заполняемой ресурсом, осуществляется не на основе строго локальных оценок стоимостей Cij, как в методе минимального элемента, а на основе разностей между оценками. Это позволяет приближенно оценивать полезность данного шага с точки зрения скорейшего приближения к оптимальному решению.**

1. **по каждому столбцу и строке находят 2 минимальных значения Cij.**
2. **определяют их разности µi для строк и µj для столбцов.**
3. **из всех разностей выбирают наибольшую µmax.**
4. **по строке или столбцу, к которым относится µmax, в клетку где размещается наименьшее значение Cij, записывают значение Xij равное наименьшей из соответствующих величин Ai Bj.**

10.Алгоритм метода аппроксимации на min

5. **Если запас груза Ai равен нулю а потребность в грузе Bj больше нуля, то из таблицы вычеркивают соответствующую строку. Если Bj равен нулю, то вычеркивают столбец. Если обе величины Ai, Bj равны нулю, то вычеркивают только строку или только столбец. С оставшимся элементом далее работают как обычно.**
6. **далее указанные операции повторяются до тех пор пока все ресурсы не будут распределены по клеткам.**
7. **Полученное решение необходимо проверить**

   по числу занятых клеток их должно быть m + n –1.

   проверяем сходится ли сумма по строке с запасами груза Ai, и сумма по столбцу с Bj.
8. **Далее считаем целевую функцию.**

10. Алгоритм метода аппроксимации на min

- **При реализации данного алгоритма возможны некоторые особенности:**

- **Величины разностей могут иметь одинаковое наибольшее значение. В этом случае нужно брать ту разность для которой в соответствующих столбцах или строках находится наименьшее значение Cij.**
- **Если таких Cij несколько то для решения берут ту клетку, которую можно заполнить наибольшим значением Xij.**

- **В случае если выбывают 2 элемента необходимо выбрать какой выгоднее вычеркнуть. Для этого по рассматриваемым строке и столбцу выбираем наименьшее значение Cij и вычеркиваем тот элемент, где Cij больше.**

11. Алгоритм метода аппроксимации на max

При решении задач на максимум приведенный алгоритм меняется в двух пунктах:

1. вместо двух минимальных находят 2 максимальных значения Cij,

4. заполняют клетку грузом с наибольшим значением Cij.

1. Проверка опорного решения на оптимальность методом потенциалов

- После получения первоначального опорного плана необходимо проверить его на оптимальность. Для определения оптимальности плана используются потенциалы, которые вычисляются по занятым клеткам, по следующим формулам:

  $\alpha_i + c_{ij} = \beta_j$, $\alpha_i = \beta_j - c_{ij}$

где α_i – потенциалы по строкам; β_j - потенциалы по столбцам.

- За первый потенциал берется любое число. Чтобы потенциалы были только положительными, необходимо первый потенциал взять чуть больше наибольшей оценки C по матрице

Условие оптимальности

План является оптимальным, если для свободных клеток:

при решении задач

на min: $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$, или $\sigma_{ij} \geq 0$

на max: $\alpha_i + c_{ij} \leq \beta_j \qquad \delta_{ij} \geq 0$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$$

$$Z_{конт} = Z$$

$$Z_{конт} = \sum_{j=1}^{n} B_j \beta_j - \sum_{i=1}^{m} A_i \alpha_i$$

2. Улучшение опорного плана методом построения улучшающего многоугольника

Если условие оптимальности выполняется для всех клеток, то план оптимален. Если условие не выполняется, необходимо провести улучшение плана методом построения улучшающего многоугольника.

Начинаем строить улучшающий многоугольник для свободной клетки, в которой характеристика максимальна по модулю. Из отрицательных вершин выбираем наименьшее значение и перемещаем его по вершинам многоугольника.

Правила построения улучшающего многоугольника:

1. **Строится многоугольник для свободной неотрицательной клетки.**
2. **Вершины многоугольника должны находиться в занятых клетках, кроме одной начальной, лежащей в испытуемой свободной клетке.**
3. **Шагать можно по занятым клеткам с поворотом под прямым углом.**
4. **Стороны многоугольника должны быть параллельны строкам и столбцам матрицы.**
5. **Знаки присваиваются «+» вершине в свободной клетке; и далее знаки чередуются «-» «+» «-».**

Контроль вычислений:
После каждого улучшения значение целевой функции должно увеличиваться или уменьшаться (в зависимости критерия оптимизации).
Значение целевой функции для контроля, начиная со 2-ой итерации, вычисляют по формуле

$$Z_{посл} = Z_{пред} + \Delta Z \qquad \Delta Z = \delta_{ij} \cdot \Delta x_{ij}$$

3. Несбалансированные задачи

Балансовое условие:

Количество распределяемых грузов и потребности в них должны быть равны:

Структурная запись

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

Развернутая запись:

$A_1+A_2+\ldots+A_m=B_1+B_2+\ldots+B_{n,}$,

если $\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$, модель задачи закрытая;

если $\sum_{i=1}^{m} A_i \neq \sum_{j=1}^{n} B_j$, модель задачи открытая

3. Несбалансированные задачи

- **Балансовое условие является очень важным с точки зрения применения алгоритмов.**
- **Для приведения к закрытому виду вводится фиктивный элемент в таблицу, либо строку, либо столбец.**
- **Если** $\sum_{i=1}^{m} A_i \;\square\; \sum_{j=1}^{n} B_j$ **то вводится фиктивная строка, причем ее мощность полагают равной разности**

$$A_{фикт} = \sum_{j=1}^{n} B_j - \sum_{i=1}^{m} A_i$$

- **Если** $\sum_{j=1}^{n} Bj \;\square\; \sum_{i=1}^{m} Ai$ **то вводится фиктивный столбец, причем его мощность полагают равной разности**

$$B_{фикт} = \sum_{i=1}^{m} A_i - \sum_{j=1}^{n} B_j$$

- **Для того, чтобы значение целевой функции не изменилось, стоимость перевозки ресурса по фиктивному элементу необходимо приравнять к нулю**

4. Задачи с дополнительными ограничениями

Дополнительные ограничения типа $x_{ij} \geq D_{ij}$,

причем $D_{ij} < A_i,\ D_{ij} < B_j$, иначе ограничение теряет смысл.

Для учета этого ограничения необходимо определить измененные объемы производства $A_i' = A_i - D_{ij}$ и потребления $B_j' = B_j - D_{ij}$

Дальнейший алгоритм действий зависит от конкретных числовых значений рассматриваемых величин A_i' и B_j'

Если оказалось, что $A_i' = 0$ то соответствующая строка вычеркивается из таблицы. Аналогично, если $B_j' = 0$ то соответствующий столбец вычеркивается из таблицы. Если и $A_i' = 0$ и $B_j' = 0$, то из таблицы вычеркиваются и столбец и строка и далее задача решается по намеченному алгоритму.

5. Порядок полного оформления распределительных задач

1) Дать пояснение всех обозначений, используемых при постановке задачи, с указанием единиц измерения всех величин (A_i, B_j, C_{ij}, X_{ij}).

2) Дать математическую формулировку дополнительных условий, учитываемых в постановке задачи.

3) Проверить задачу на сбалансированность и, при необходимости, привести к сбалансированному виду.

4) Привести структурную запись задачи (ограничения по строкам и столбцам, балансовое условие, условие неотрицательности, целевая функция).

5) Привести развернутую запись задачи (ограничения по строкам, ограничения по столбцам, требование к целевой функции).

6) Получить опорное решение заданным способом.

7) Проверить опорное решение на оптимальность и, при необходимости, получить оптимальное решение методами потенциалов и улучшающего многоугольника.

8) Записать решение поставленной задачи, и дать его интерпретацию с учетом дополнительных условий (при их наличии) и исходной несбалансированности задачи (если она

Распределения объемов обследовательских работ между подразделениями фирмы

- При проведении мероприятий по мониторингу земель, необходимо обследовать территорию четырех объектов недвижимости в различных муниципальных образованиях города. Обследования могут проводить 6 бригад, находящиеся в разных филиалах организации.
- Необходимо распределить бригады по землепользованиям объектов так, чтобы прибыль организации от проведения обследований была максимальной.
- Исходные данные приведены в таблице.

Бригады	Норма прибыли от обследования объектов недвижимости руб./м2				Площадь, которую может обследовать бригада, м2
	I	II	III	IV	
1	44	42	45	40	240
2	43	40	42	42	1304
3	29	26	24	27	450
4	67	62	65	61	150
5	22	19	17	19	250
6	43	40	42	41	800
Площадь объекта, подлежащая обследованию, м2	2104	1700	1150	700	

Порядок выполнения задачи:

2. Записать математическую формулировку задачи в общем виде.
3. Дать развернутую запись условия задачи с числовым значением переменных и ресурсов.
4. Задачу решить, используя метод аппроксимации.
5. Записать ответ.

Определение опорного решения задачи методом аппроксимации

Формализация исходных данных задачи:

Введем следующие обозначения:

m — площадь, которую может обследовать бригада, м2;

n — площадь объектов недвижимости, м2;

i — номер бригады: $i = 1, 2 \ldots m;$

j — номер объекта: $j = 1, 2 \ldots n;$

c_{ij} – норма прибыли от обследования i – й бригадой j -ого объекта недвижимости, руб./ м2;

x_{ij} –площадь обследования i – й бригадой j -ого объекта недвижимости, м2;

A_i — площадь, которую могут обследовать все бригады фирмы, м2;

B_j — площадь объектов недвижимости, м2;

Z — прибыль фирмы, руб.

Запись задачи транспортного типа в структурной форме:

Целевая функция: Распределить бригады по землепользованиям объектов так, чтобы прибыль организации от проведения обследований была максимальной.

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \to \min$$

Ограничения по строкам: Сумма производимых работ i –той бригады на j –х объектах должна быть равна площади, которую может обследовать данная бригада:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = A_i; i = 1,2...m;$$

Ограничения по столбцам: Сумма объемов работ на j –ом объекте недвижимости проводимых всеми бригадами должна быть равна площади данного объекта:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = Bj; j = 1,2...n;$$

Балансовое условие: Площадь объемов работ, которые могут выполнить бригады, должна быть равна общей площади объектов недвижимости.

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

Условие неотрицательности переменных:

$$X_{ij} \geq 0, i = 1,2...m, j = 1,2...n;$$

Проверка сбалансированности задачи

Бригады	Норма прибыли от обследования объектов недвижимости руб/ м$_2$				Площадь, которую может обследовать бригада, м$_2$
	I	II	III	IV	
1	44	42	45	40	240
2	43	40	42	42	1304
3	29	26	24	27	450
4	67	62	65	61	150
5	22	19	17	19	250
6	43	40	42	41	800
Площадь объекта, подлежащая обследованию, м$_2$	2104	1700	1150	700	3194 5654

Проверка сбалансированности задачи

- $\sum A_i = 3194, \quad \sum B_j = 5654$, задача не сбалансирована, причем $\sum A_i \leq \sum B_j$
- Чтобы привести задачу к сбалансированному виду, вводим фиктивную строку с площадью, равной $A_7 = \sum B_i - \sum A_j$ = 2460.
- Чтобы значение целевой функции не изменилось, оценки по фиктивной строке примем равными нулю C7i=0, i=1,2,3,4,5,6,7.
- В результате исходная таблица примет вид.

Проверка сбалансированности задачи

Бригады	Норма прибыли от обследования объектов недвижимости руб/ $м_2$				Площадь, которую может обследовать бригада, $м_2$
	I	II	III	IV	
1	44	42	45	40	240
2	43	40	42	42	1304
3	29	26	24	27	900
4	67	62	65	61	150
5	22	19	17	19	250
6	43	40	42	41	800
7 (фикт.)	0	0	0	0	2460
Площадь объекта, подлежащая обследованию, м	2104	1700	1600	700	5654 5654

Запись ЭММ в расширенном виде

1. Граничные условия

а) по строкам:

X11+X12+X13+X14=240

X21+X22+X23+X24=1304

X31+X32+X33+X34=450

X41+X42+X43+X44=150

X51+X52+X53+X54=250

X61+X62+X63+X64=800

X71+X72+X73+X74=2460

б) по столбцам:

X11+X21+X31+X51+X61+X71=2104

X12+X22+X32+X52+X62+X71=1700

X13+X23+X33+X53+X63+X71=1150

X14+X24+X34+X54+X64+X71=700

2. балансовое условие:

240+1304+450+150+250+800+2460=2104+1700+1150+700=5654

3. условие неотрицательности переменных:

4. Целевая функция задачи:

Z=44X11+42X12+45X13+40X14+43X21+40X22+42X23+42X24+29X31+26X32+ 24X33+27X34+67X41+62X42+65X43+61X44+22X51+19X52+17X53+19X54+ 43X61+40X62+42X63+41X64

i j	1	2	3	4	A_i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7
1	44	42	45 240	40	240 0	1	1					
2	43 454	40	42 850	42	1304 850 0	1	1	1	1	1	1	2
3	29 450	26	24	27	450 0	2	2	2	2			
4	67 150	62	65	61	150 0	2						
5	22 250	19	17	19	250 0	3	3	3				
6	43 800	40	42	41	800 0	1	1	1	1	1		
7	0	0 1700	0 60	0 700	2460	0	0	0	0	0	0	0
B_j μ	2104 1954 1704 1254 454	1700	1150 910 60	700	5654 5654							
μ_1	24	20	20	19								
μ_2	1	2	3	1								
μ_3	0	0	0	1								
μ_4	0	0	0	1								
μ_5	0	0	0	1								
μ_6	43	40	42	42								
μ_7		40	42	42								
8		0	0	0								

Проверка опорного решения на выполнение граничных условий:

а) по строкам:

1.240=240

2. 454+850=1304

3.450=450

4. 150=150

5. 250=250

6. 800=800

7.1700+60+700=2460

б) по столбцам:

1. 454+450+150+250+800=2104

2. 1700=1700

3. 240+850+60=1150

4. 700=700

Проверка на число занятых клеток.

$K \leq m + n - 1 = 7 + 4 - 1 = 10$;10=10, т.е. решение верное и невырожденное.

Вычисление значения целевой функции.

Z=45*240+43*454+42*850+29*450+67*150+22*250+43*800= 129022

Проверка опорного решения на оптимальность:

- Для занятых клеток $\alpha_i + C_{ij} = \beta_j;$
- За первый потенциал примем $\alpha_1 = 67$ произвольное число, больше чем C ij max ;
- Оценка свободной клетки вычисляется по формуле

$$\delta_{ij} = \alpha_i + C_{ij} - \beta_j;$$

- При решении задач на min решение является оптимальным, если для всех свободных клеток $\delta_{ij} \leq 0$
- Для свободных клеток считаем оценки δ_{ij} и размещаем их в правом нижнем углу свободной клетки.

Потенциалы и оценки для опорного решения задачи

№		1	2	3	4
	α_i β_j	113	112	112	112
1	67	44 -	42 -	45 240	40 -
2	70	43 454	40 -	42 850	42 0
3	84	29 450	26 -	24 -	27 -
4	46	67 150	62 -	65 -	61 -
5	91	22 250	19 -	17 -	19 -
6	70	43 800	40 -	42 -	41 -
7	112	0 -	0 1700	0 60	0 700

Улучшающий многоугольник. Альтернативное решение.

- Так как оценки всех незанятых клеток $\delta_{ij} \le 0$, полученное решение оптимально.
- Необходимо отметить, что существует альтернативное оптимальное решение, т.к. потенциал клетки с индексом 24 равны нулю.
- По желанию заказчика работ изменим решение на альтернативное.
- Для этого построим улучшающий многоугольник. Его вершины должны располагаться в занятых клетках, кроме одной начальной, лежащей в испытуемой свободной клетке.
- Вершине, лежащей в испытуемой клетке, присваивается знак плюс, далее знаки чередуются.
- Среди всех X находящихся в клетках с отрицательными вершинами, выбирается минимальное значение Xmin (X74=700). Далее перемещаем 700 по многоугольнику с учетом знаков.

Улучшающий многоугольник. Альтернативное решение.

№		1	2	3	4
	α_i β_j	113	112	112	112
1	67	44 -	42 -	45 240	40 -
2	70	43 454	40 -	42 850 -700	42 +700 0
3	84	29 450	26 -	24 -	27 -
4	46	67 150	62 -	65 -	61 -
5	91	22 250	19 -	17 -	19 -
6	70	43 800	40 -	42 -	41 -
7	112	0 -	0 1700	0 60 +700	0 700 -700

Улучшающий многоугольник. Альтернативное решение.

№		1	2	3	4
	α_i β_j	113	112	112	112
1	67	44 -	42 -	45 240	40 700
2	70	43 454	40 -	42 150	42
3	84	29 450	26 -	24 -	27 -
4	46	67 150	62 -	65 -	61 -
5	91	22 250	19 -	17 -	19 -
6	70	43 800	40 -	42 -	41 -
7	112	0 -	0 1700	0 760	0 -

- После получения альтернативного решения подсчитаем целевую функцию:
- Z=45*240+43*454+42*150+42*700+29*450+67*150+22*250 +43*800=129022.
- Она не изменилась.

Окончательное решение задачи

Бригады	Норма прибыли от обследования объектов недвижимости руб/ м$_2$				Площадь, которую может обследовать бригада, м$_2$
	I	II	III	IV	
1	44	42	45 240	40	240
2	43 454	40	42 850	42	1304
3	29 450	26	24	27	450
4	67 150	62	65	61	150
5	22 250	19	17	19	250
6	43 800	40	42	41	800
Площадь объекта, подлежащая обследованию, м$_2$	2104	1700	1150	700	

Ответ задачи

- Zопт= 129022+24*450=139822 руб

Максимальная прибыль организации от проведения обследовательских работ будет равна 139 822 руб. при следующем распределении бригад по объектам недвижимости:

- 1 бригада обследует 240 м2 3 объекта недвижимости;
- 2 бригада обследует 454 м2 1 объекта недвижимости и 850 м2 3 объекта недвижимости;
- 3 бригада обследует 450 м2 1 объекта недвижимости и 450 м2 3 объекта недвижимости;
- 4 бригада обследует 150 м2 1 объекта недвижимости;
- 5 бригада обследует 250 м2 1 объекта недвижимости;
- 6 бригада обследует 800 м2 1 объекта недвижимости.

Для обследования 2460 м2 объектов недвижимости мощностей обследовательской организации не хватило.