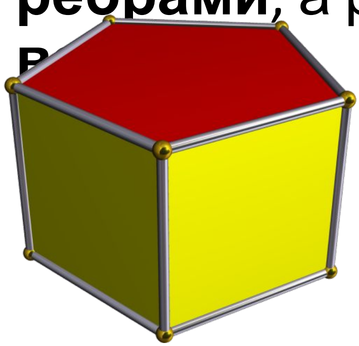
Многогранники и круглые тела

Геометрические тела

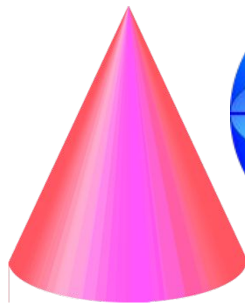
Многогранники

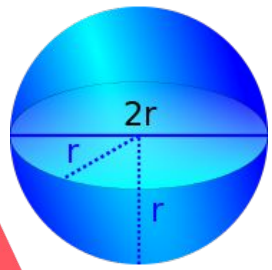
Многогранник – это часть пространства, ограниченная совокупностью конечного числа плоских многоугольников, соединённых таким образом, что каждая сторона любого многогранника является стороной ровно одного многоугольника. Многоугольники называются **гранями**, их стороны – **рёбрами**, а рёбра сходятся в



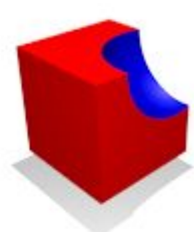
Тела вращения

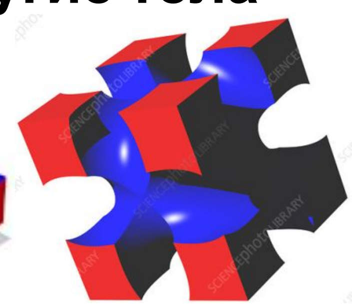
Тело вращения – это фигура, полученная вращением плоского многоугольника вокруг оси



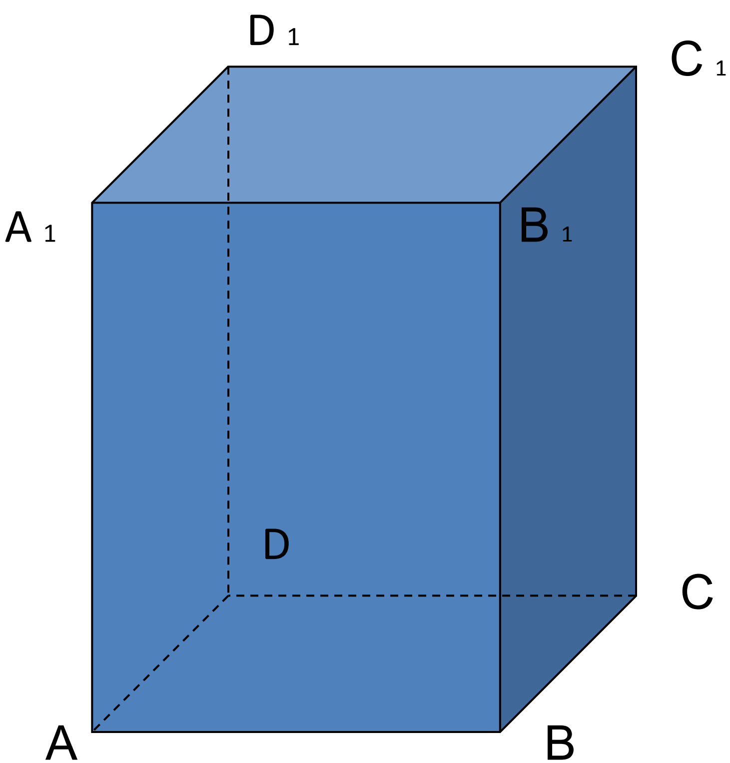


Другие тела





Элементы многогранника



Грани:

ABCD, AA_1B_1B, AA_1D_1D, CC_1B_1B, CC_1D_1D, $A_1B_1C_1D_1$

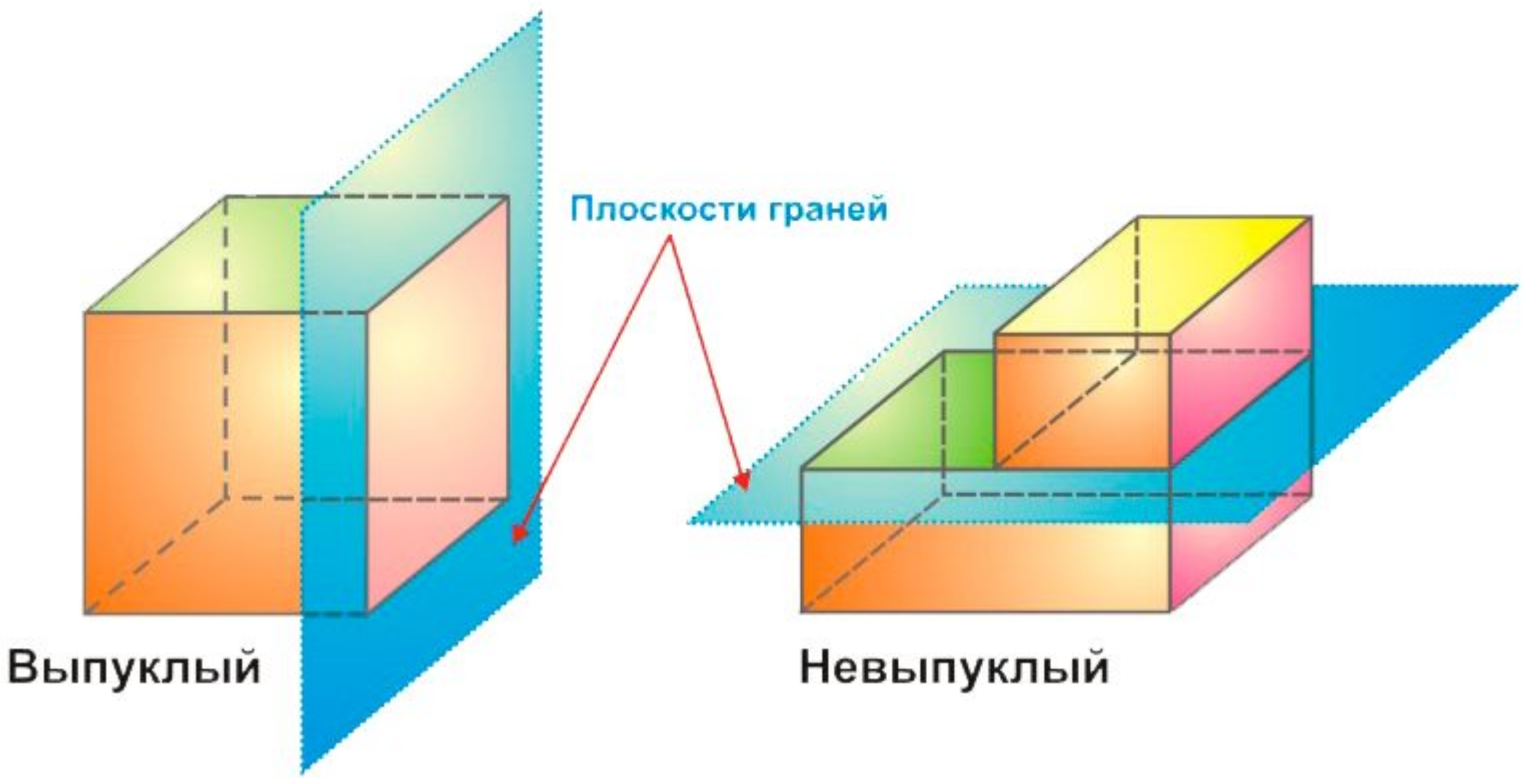
Ребра:

AB, BC, CD, DA, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1

Вершины:

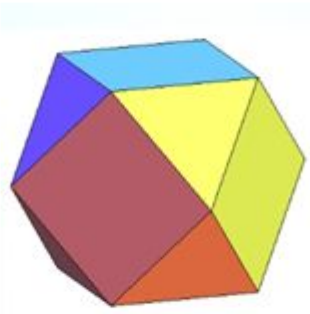
A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1

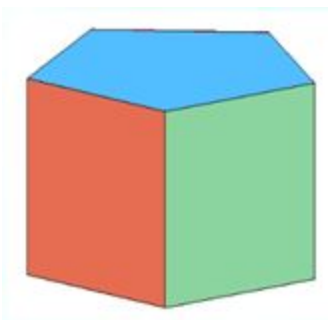
Многогранник называется ***выпуклым***, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

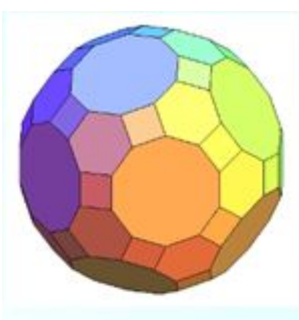


Многогранники

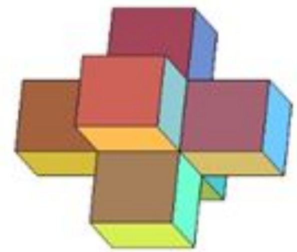
Выпуклые







Невыпуклые



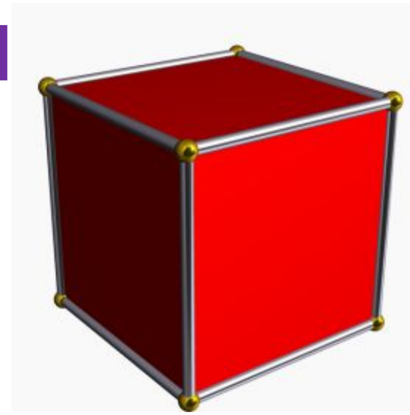
Многогранник называется правильным, если:

- Все его грани равные правильные многоугольники;
- В каждой вершине сходится одно число ребер.

Правильные многогранники называют Платоновыми телами.
Существует 5 видов правильных многогранников.

Правильные

мн



ники

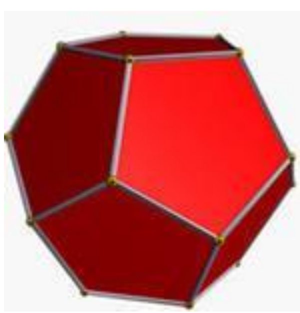
Додекаэдр

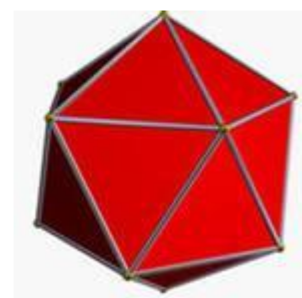
Тетраэдр

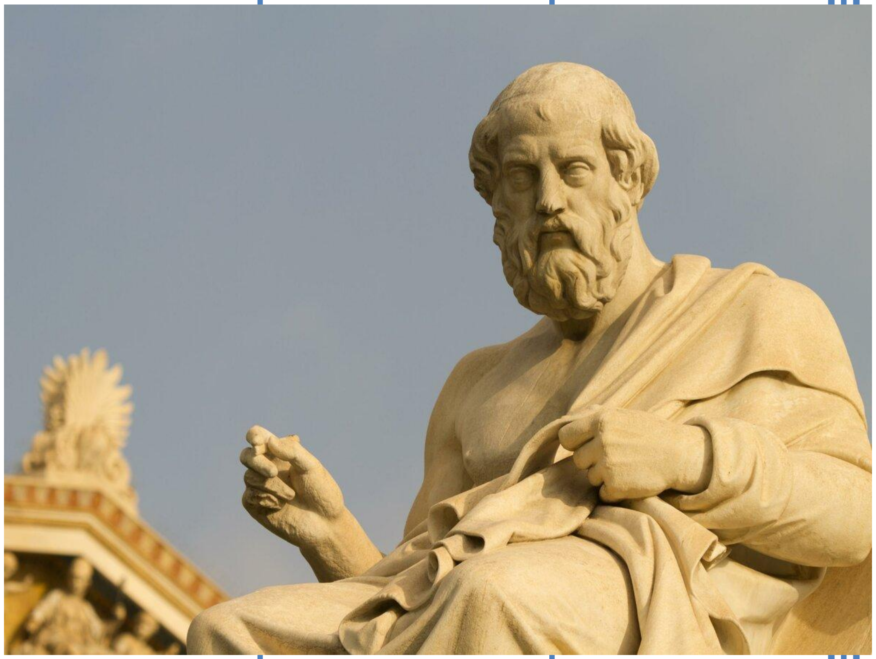
Октаэдр

Икосаэдр

Куб







Правильные многогранники занимали видное место в идеалистической картине мира древнегреческого философа Платона

Платоновы тела

тетраэдр	икосаэдр	куб	октаэдр	додекаэдр
огонь	вода	земля	воздух	«всё сущее»

Число вершин, рёбер и граней правильных многогранников связано друг с другом интересным соотношением.

Теорема Эйлера:

Число вершин - число ребер + число граней =2

Леонард Эйлер

(1707-1783)

Швейцарский, немецкий и российский математик

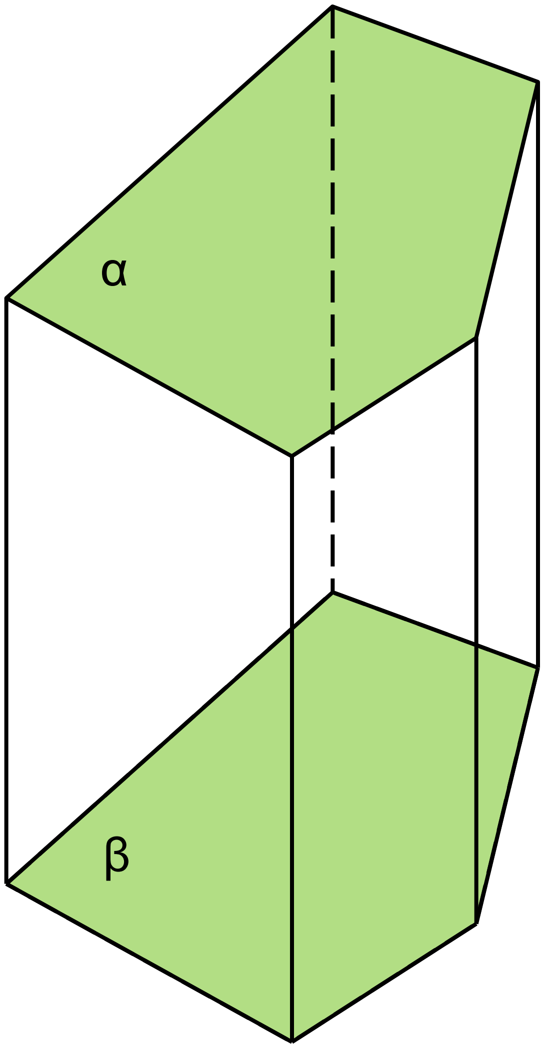
автор более чем 800 работ
по математическому анализу,
дифференциальной
геометрии, теории музыки и др.

Задание 1: Проверьте справедливость теоремы Эйлера для правильных многогранников:

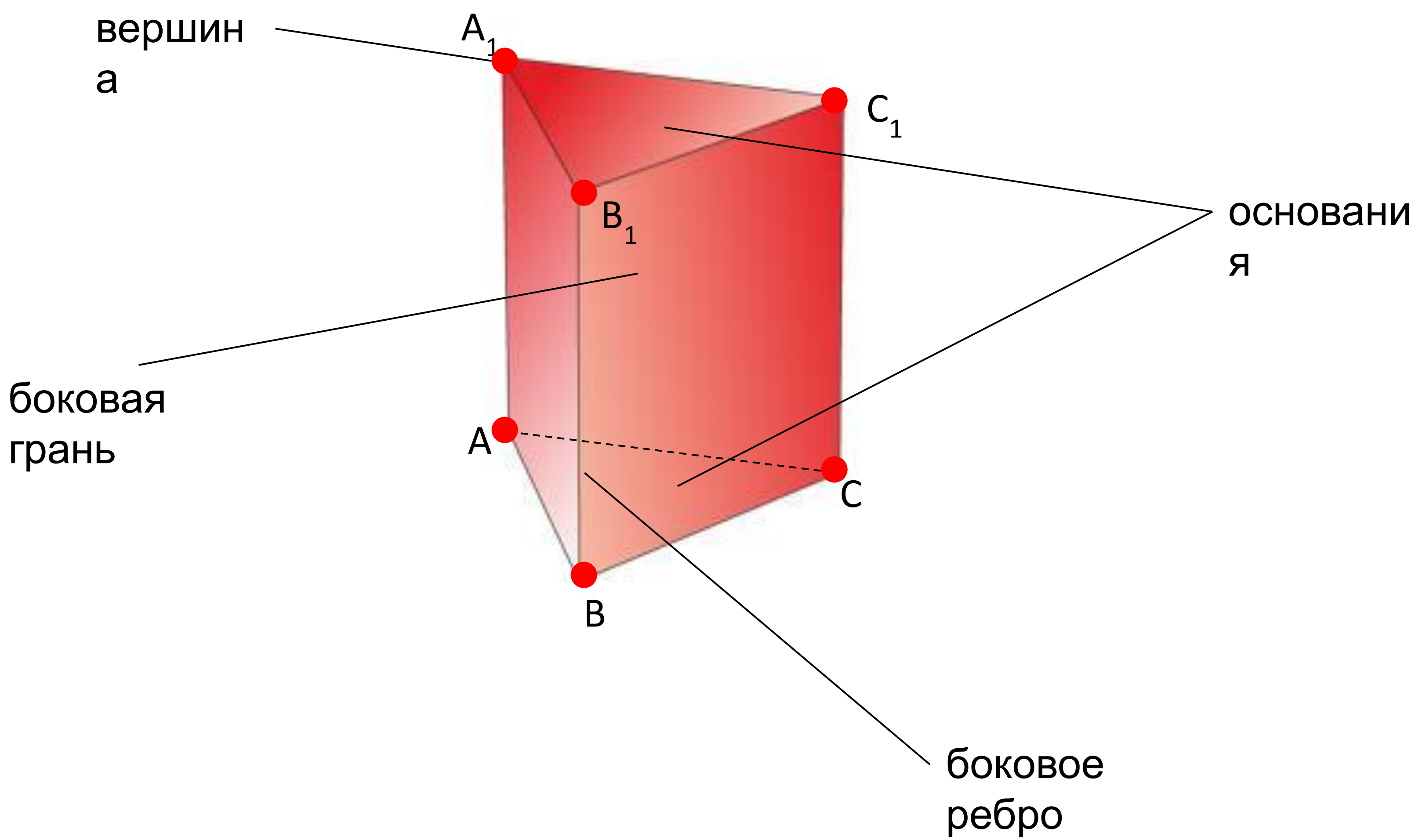
Правильный многогранник	Число		
	Граней	Вершин	Ребер
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

Призмы и параллелепипеды

Призма



Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников

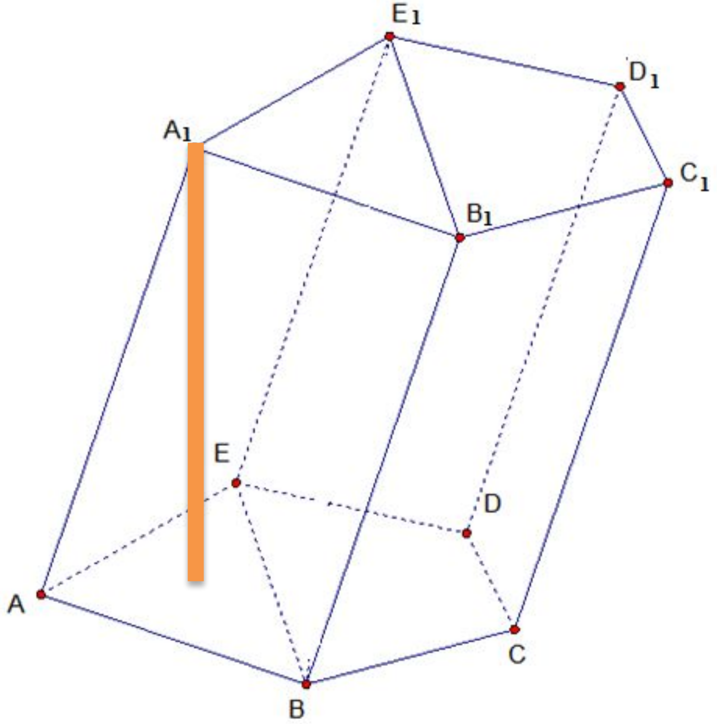


$ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма

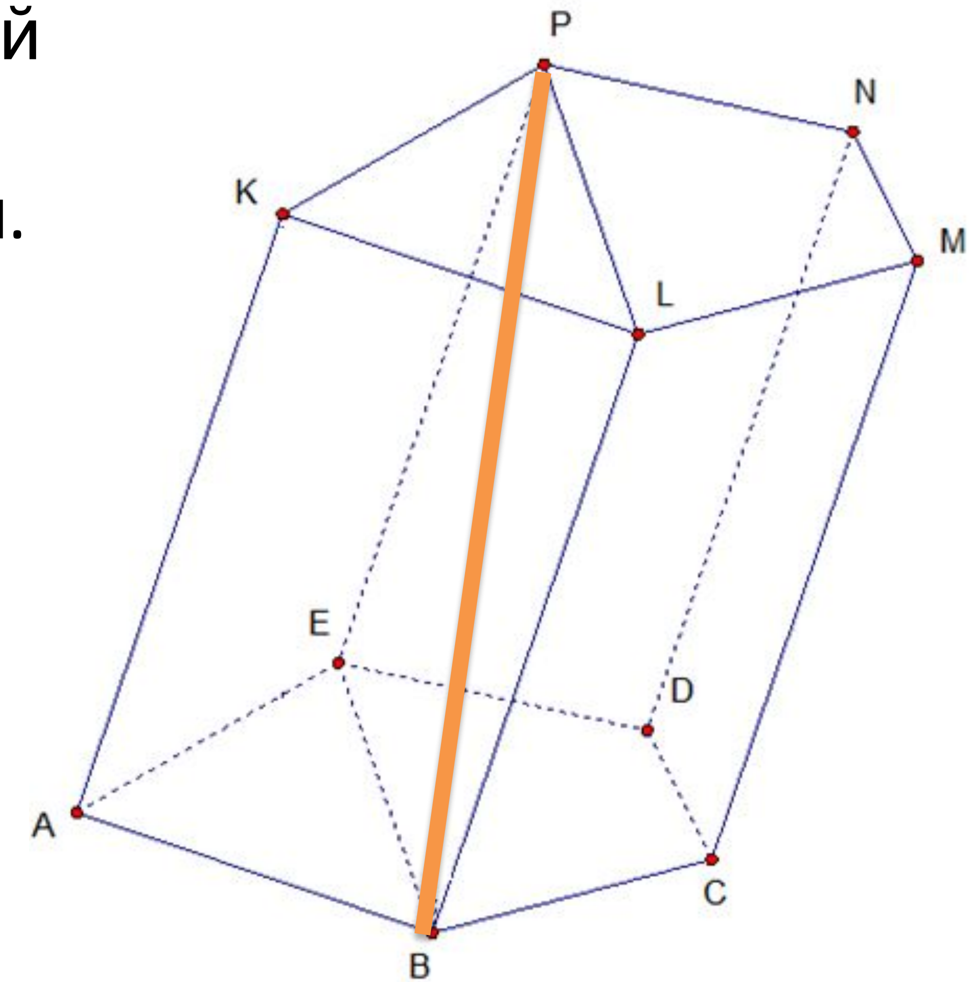
Свойства призмы

- Основания призмы равны.
- Основания призмы лежат в параллельных плоскостях.
- Боковые ребра призмы параллельны и равны.
- Боковые грани наклонной призмы - параллелограммы, прямой призмы - прямоугольники.

Высотой призмы называется расстояние между её основаниями.



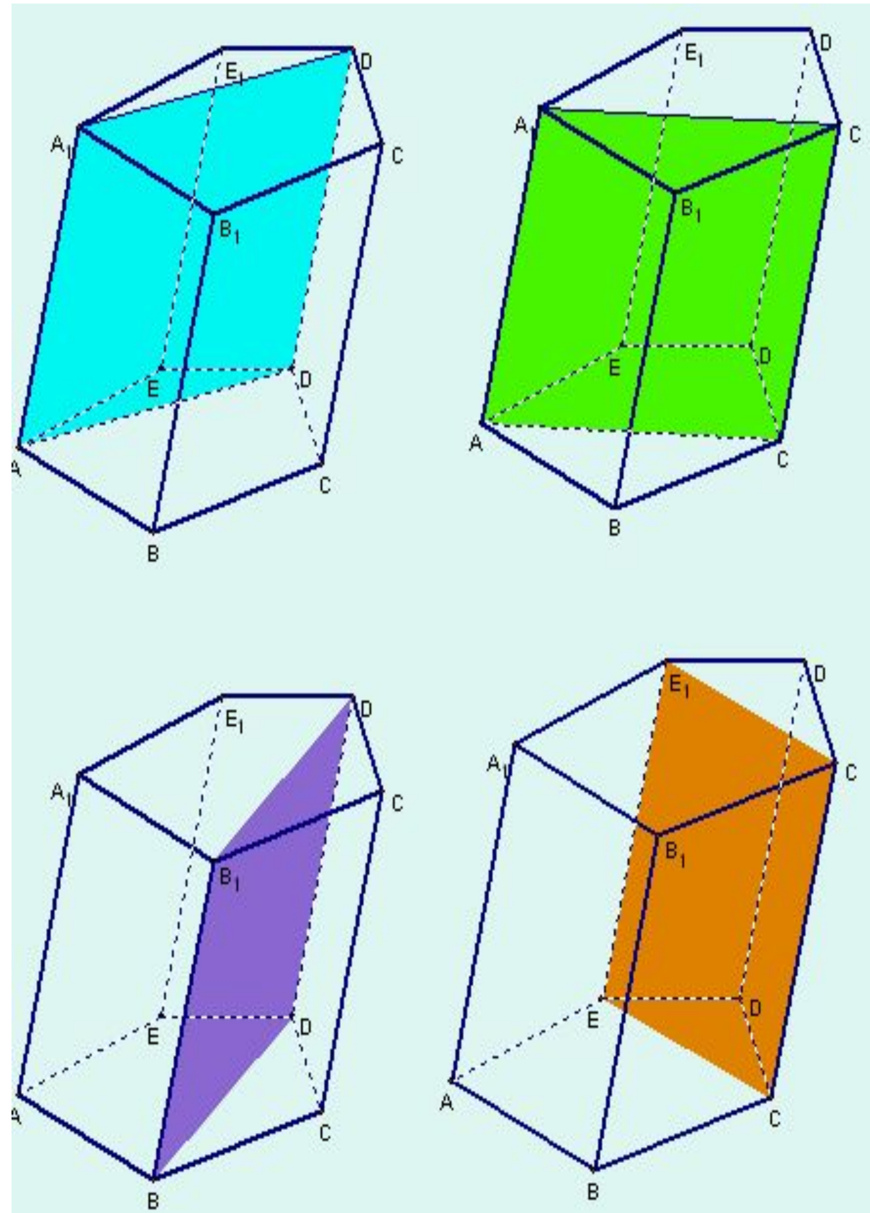
Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю призмы**.

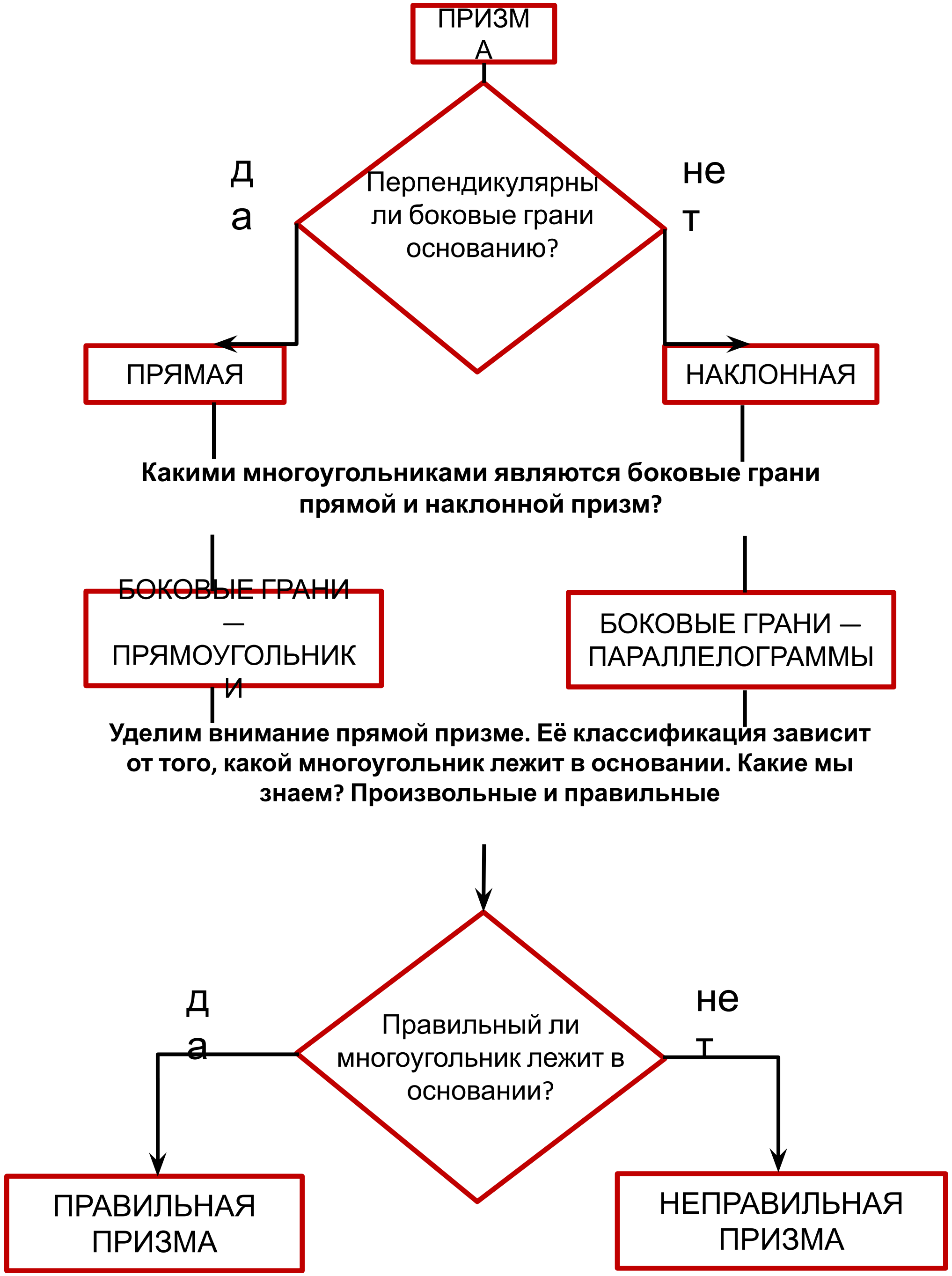


Диагональные сечения призмы

Сечения призмы плоскостями, проходящими через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, называются ***диагональными сечениями***

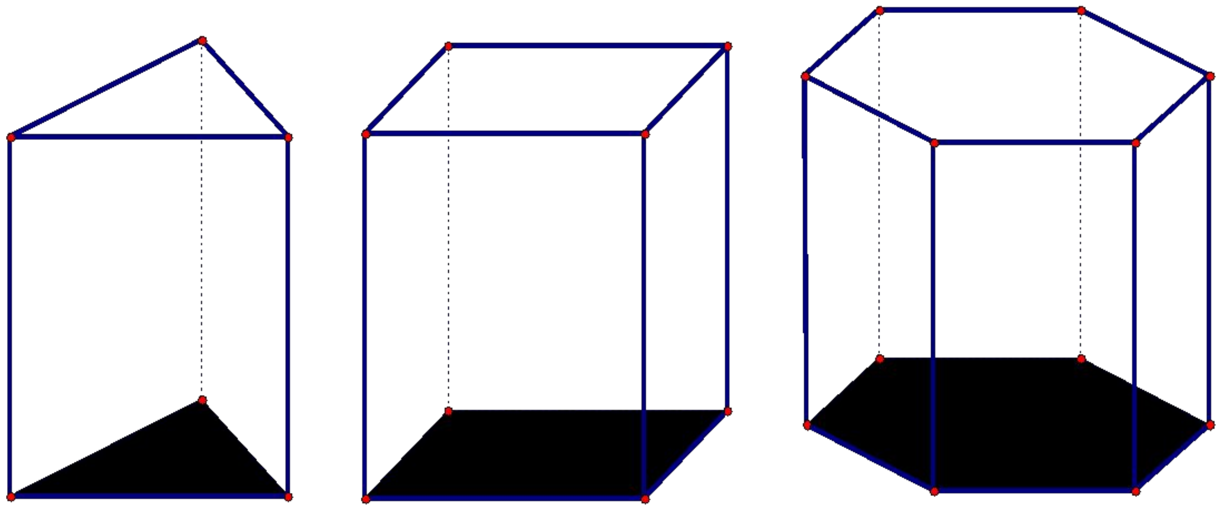
Диагональные сечения призмы являются ***параллелограммами***




ПРИЗМ
А
Перпендикулярны
ли боковые грани
основанию?
д
а
не
т
ПРЯМАЯ
НАКЛОННАЯ
Какими многоугольниками являются боковые грани
прямой и наклонной призм?
БОКОВЫЕ ГРАНИ
—
ПРЯМОУГОЛЬНИК
И
БОКОВЫЕ ГРАНИ —
ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ
Уделим внимание прямой призме. Её классификация зависит
от того, какой многоугольник лежит в основании. Какие мы
знаем? Произвольные и правильные
Правильный ли
многоугольник лежит в
основании?
д
а
не
т
ПРАВИЛЬНАЯ
ПРИЗМА
НЕПРАВИЛЬНАЯ
ПРИЗМА

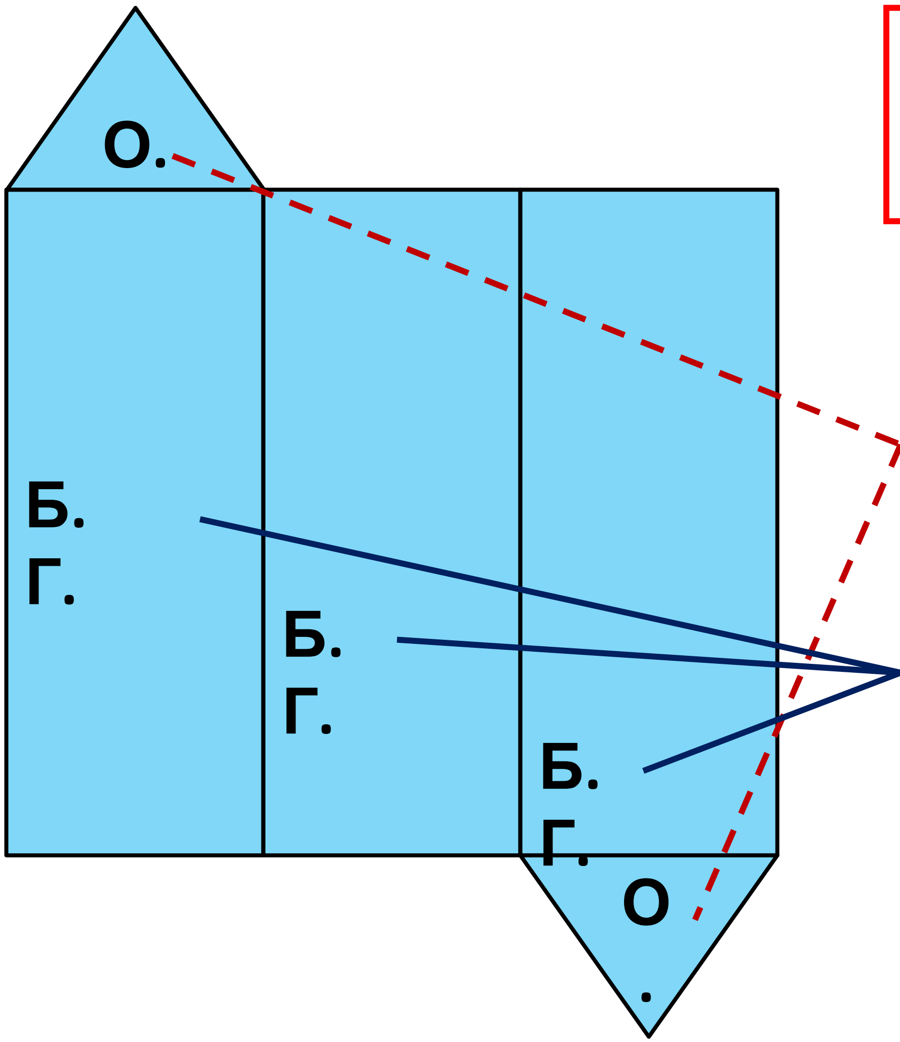
Правильные призмы

Призма:



Основание:

Сумма площадей всех граней призмы называется **площадью полной поверхности**



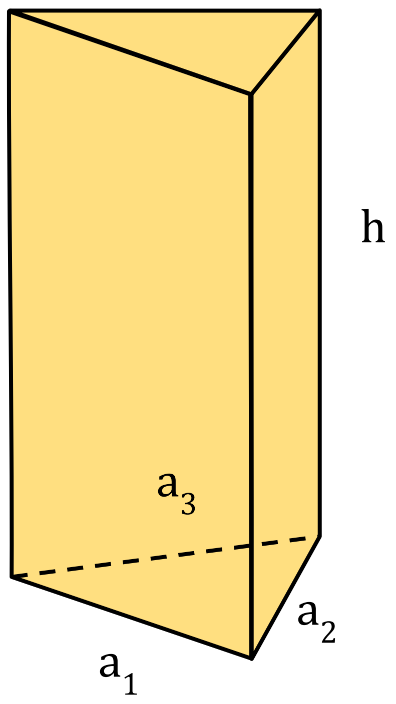
— основания

— боковые грани

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению **высоты призмы** на **периметр** её **основания**

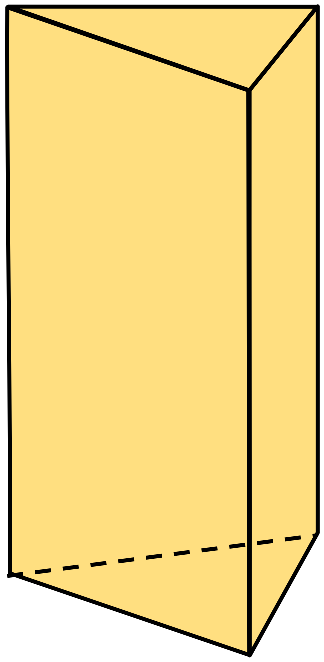


$$S_{бок.} = a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + a_3 \cdot h + \dots a_n \cdot h =$$

$$= \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + \dots an)}_{P_{осн.}} \cdot h \Rightarrow$$

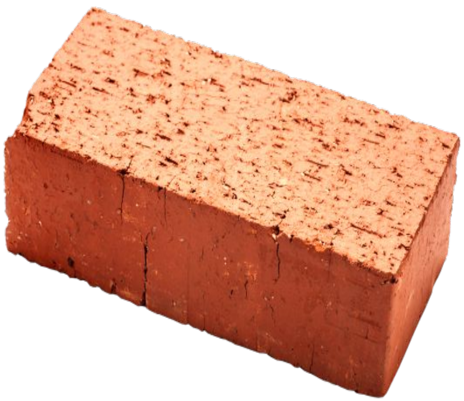
$$\boxed{\Rightarrow S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h}$$

Объем призмы



$V_{призмы} = S_{осн.} \cdot h,$

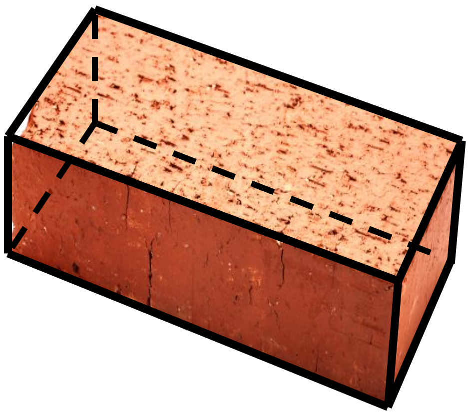
где h – высота призмы



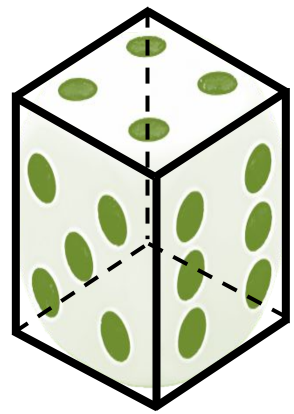
Строительный кирпич

Игральный кубик

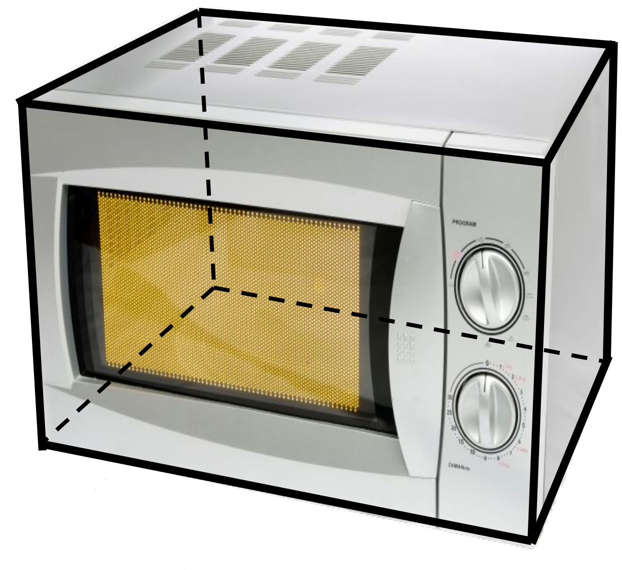
Микроволновая печь



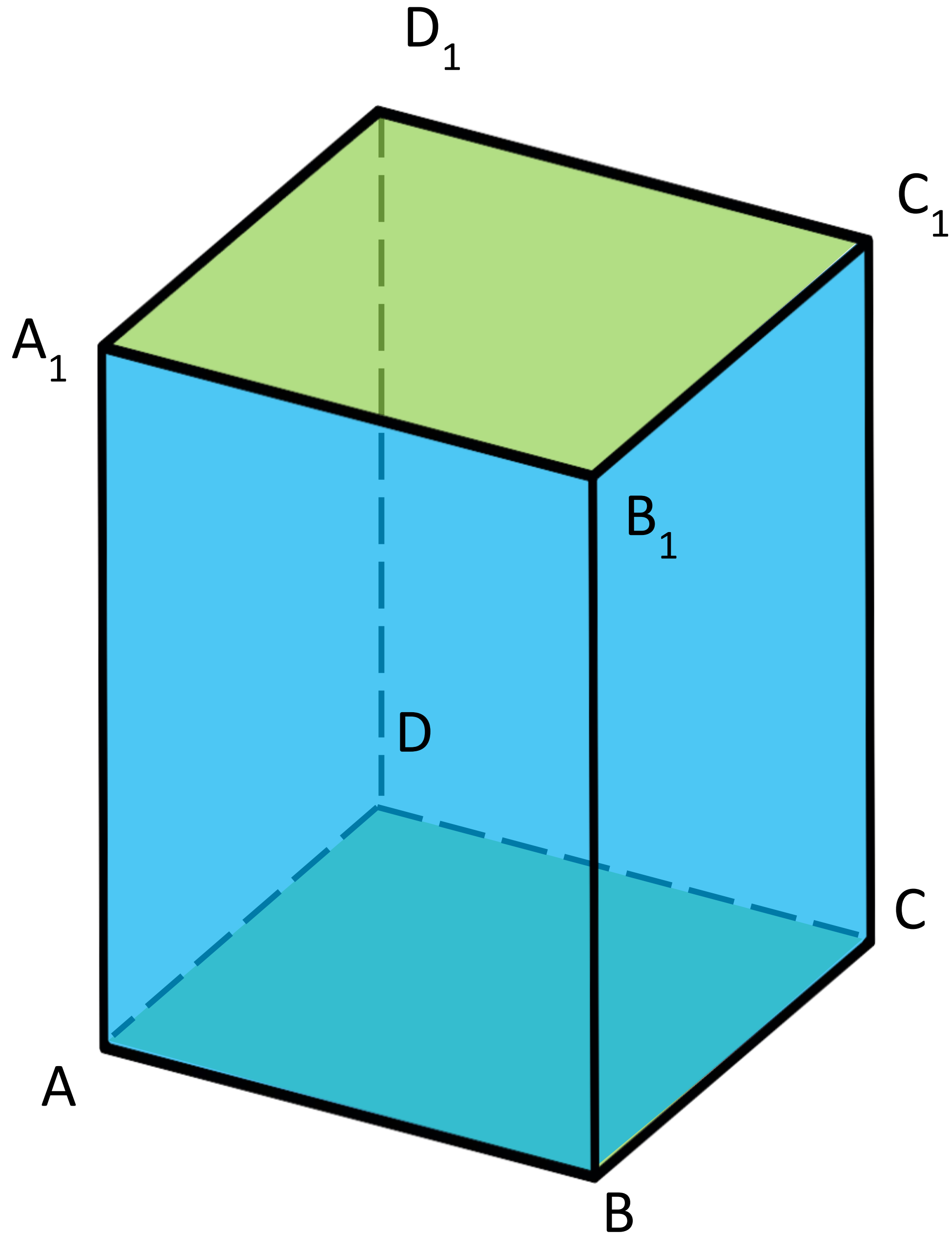
Строительный
кирпич



Игральный
кубик

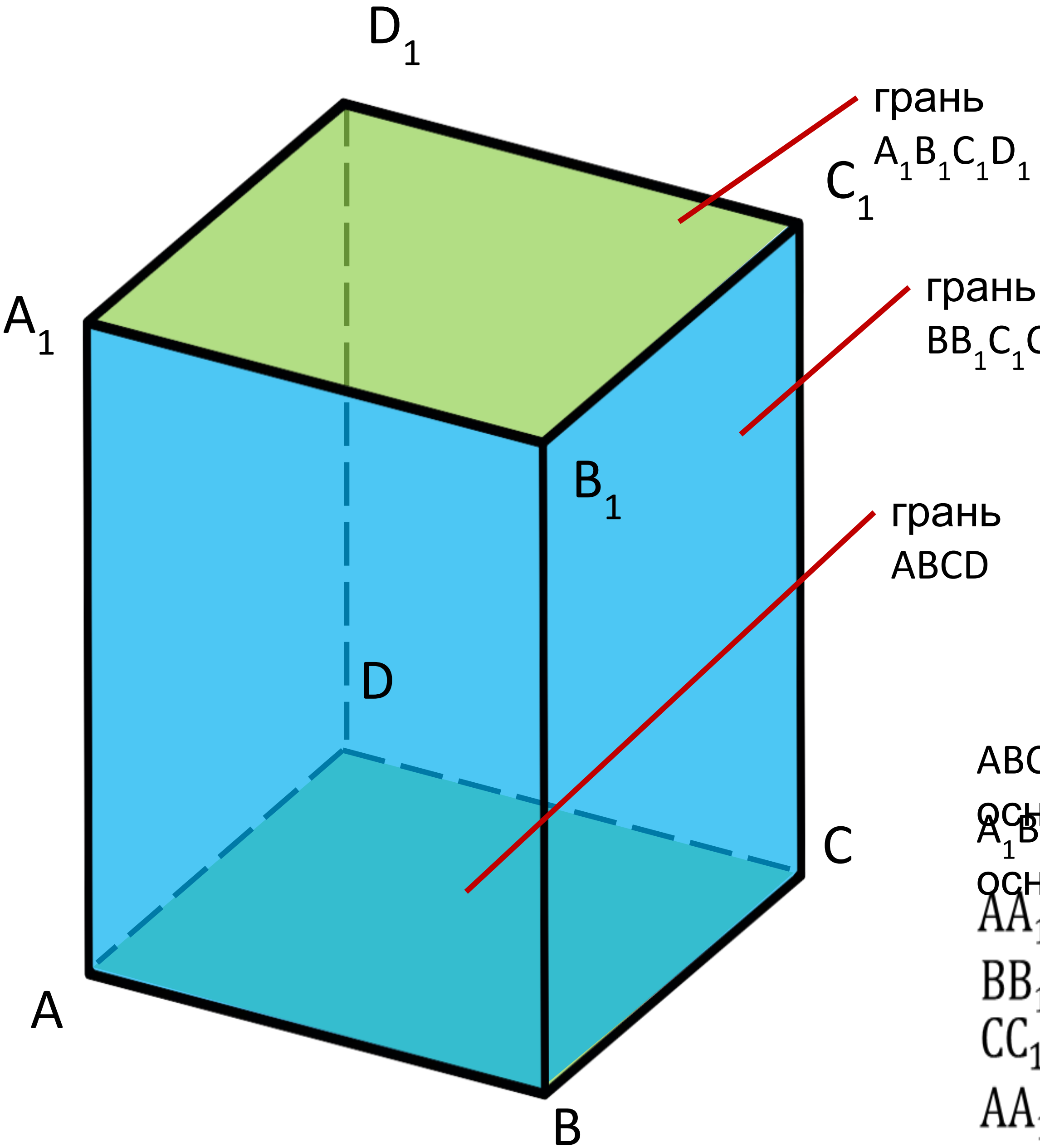


Микроволновая
печь



Параллелепипед – призма, основанием которой является параллелограмм

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед

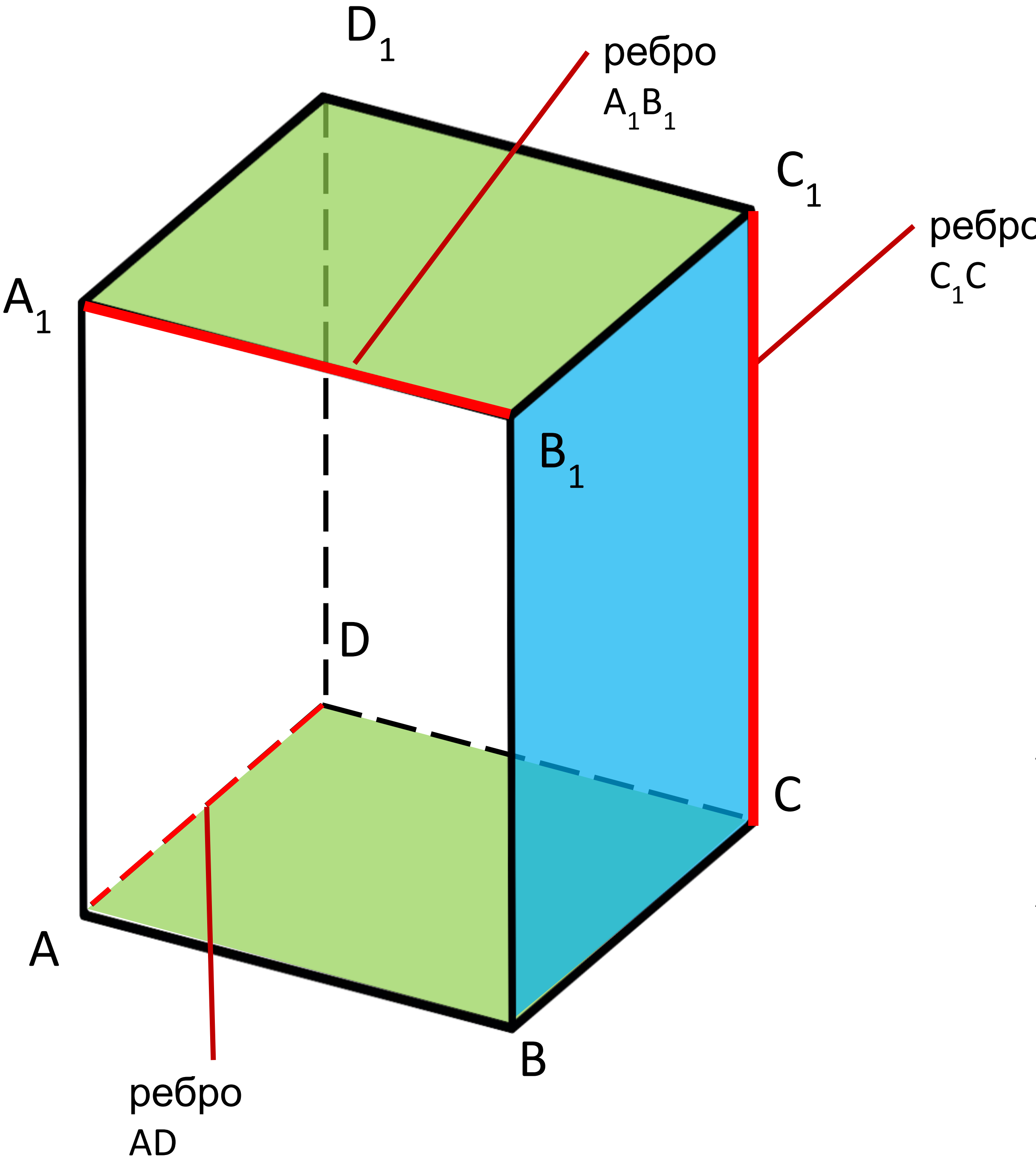


Грани:

ABCD — нижнее основание

$A_1B_1C_1D_1$ — верхнее основание

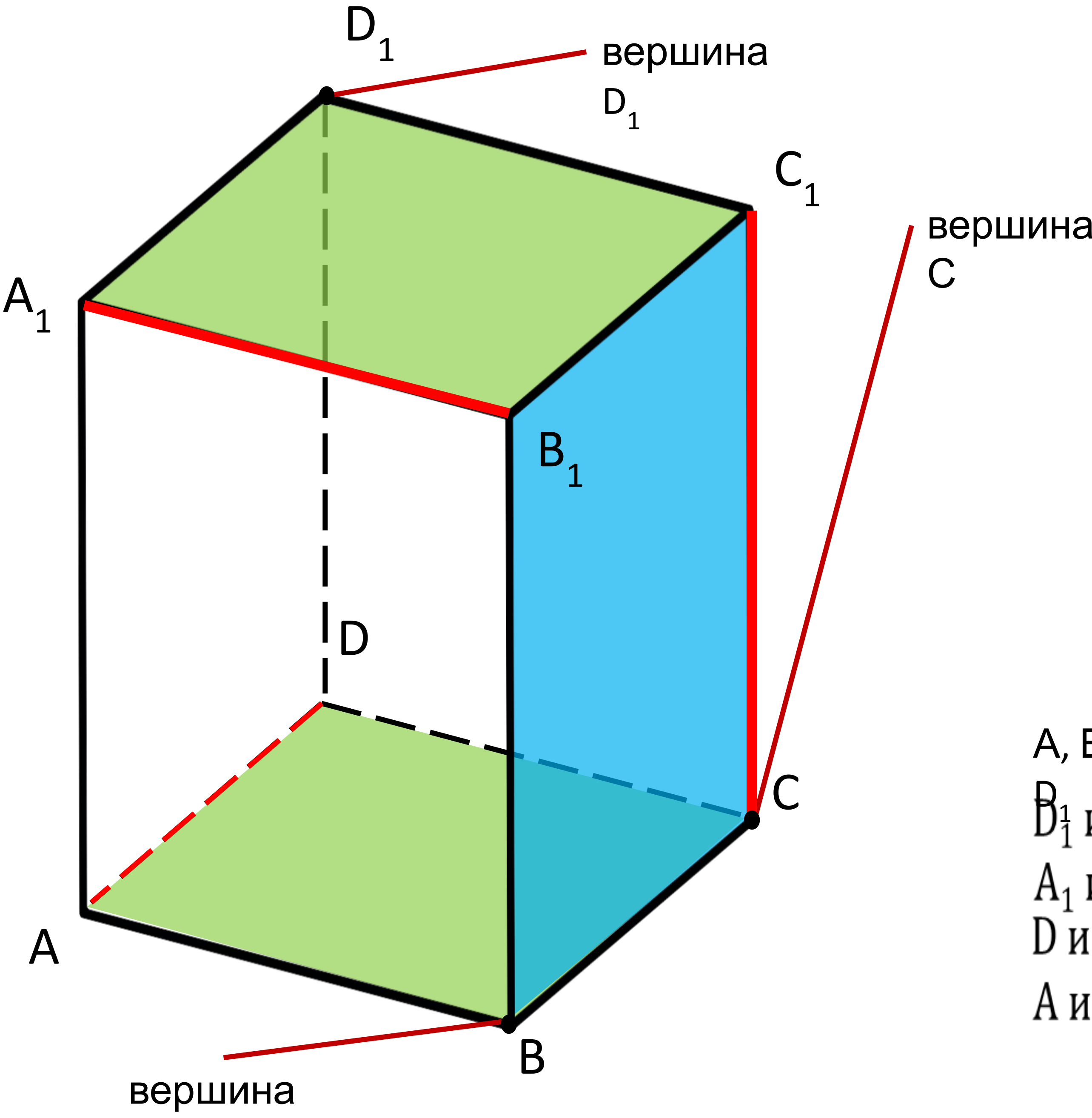
$$\left.\begin{array}{l} AA_1B_1B \\ BB_1C_1C \\ CC_1D_1D \\ AA_1D_1D \end{array}\right\} \text{боковые грани}$$



Рёбра:

AB, BC, CD, AD, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1

AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые рёбра

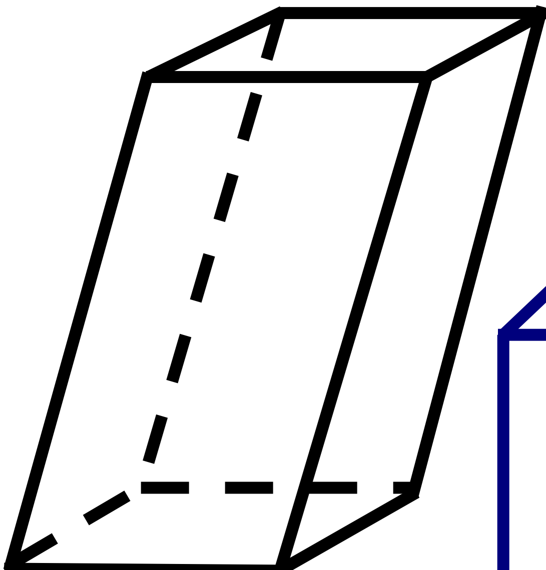


Вершины:

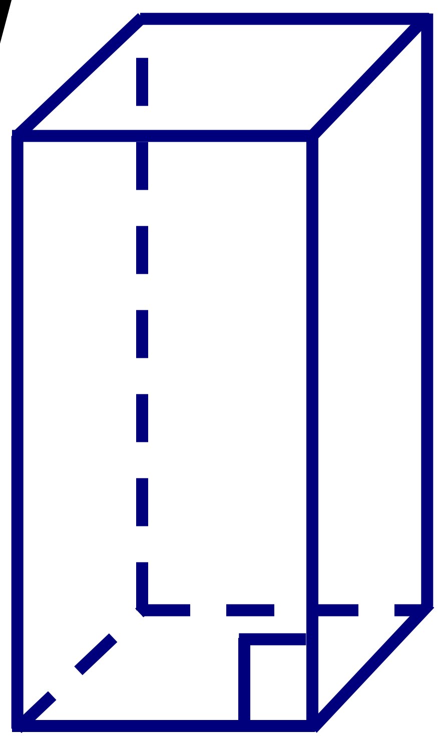
A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1

$\left.\begin{array}{l} D_1 \text{ и } B \\ A_1 \text{ и } C \\ D \text{ и } B_1 \\ A \text{ и } C_1 \end{array}\right\}$ противоположные вершины

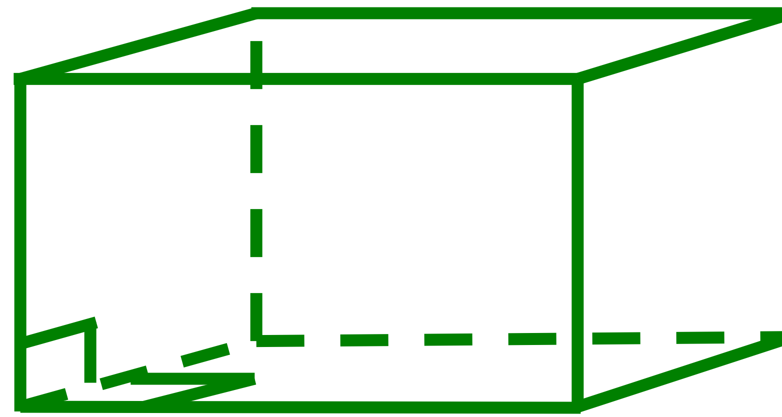
ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ



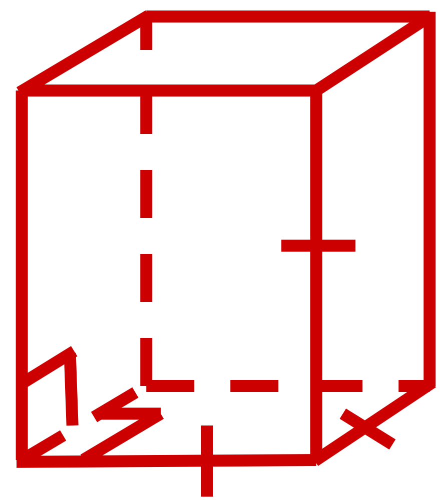
НАКЛОННЫЙ



ПРЯМОЙ

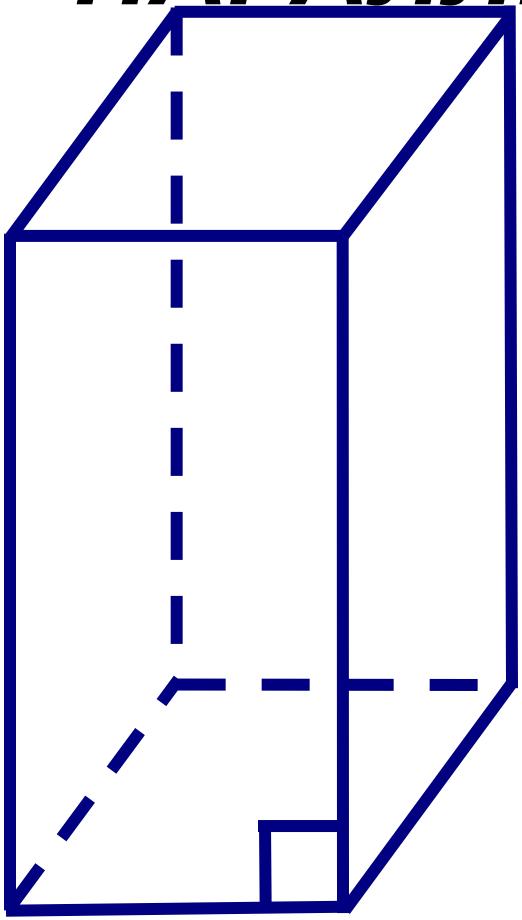


ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ



КУБ

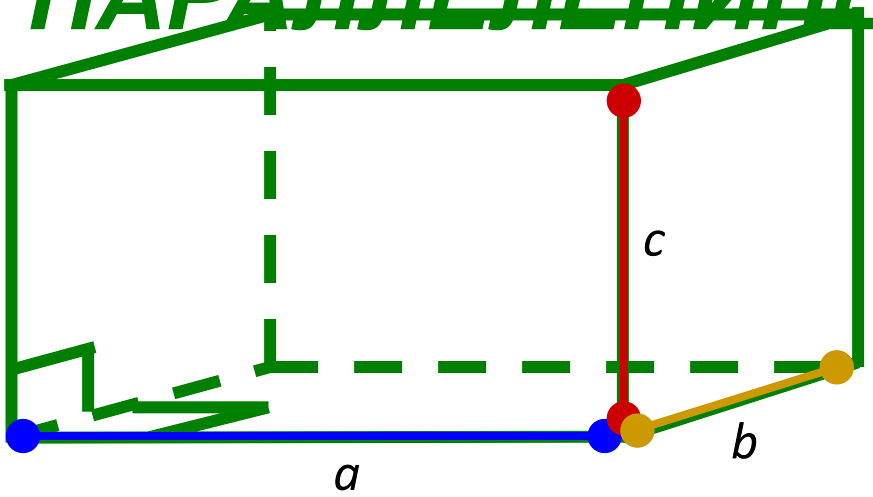
ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



Параллелепипед, у которого боковые рёбра перпендикулярны основанию, называется прямым.

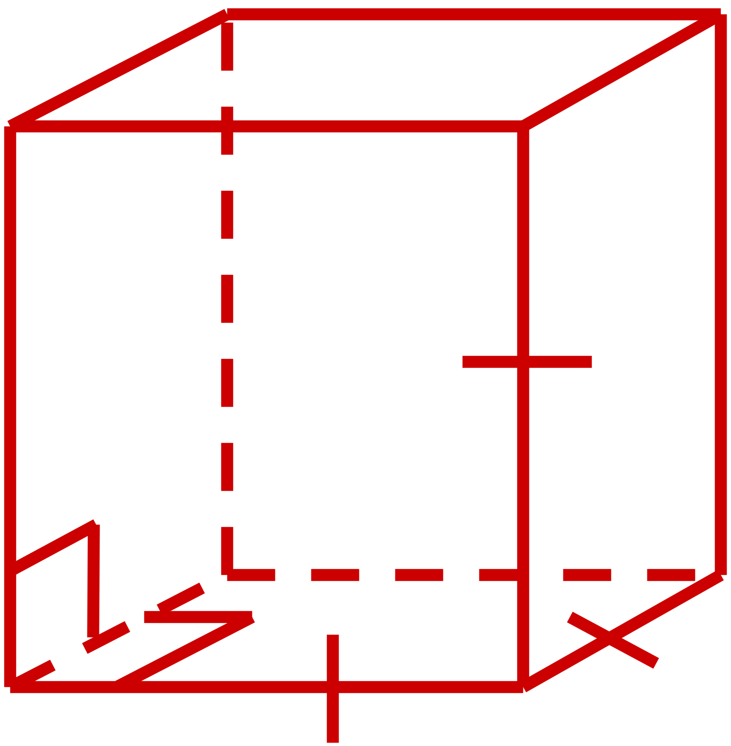
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые рёбра перпендикулярны к основанию, а основания являются прямоугольниками.

ПРАВИЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



КУБ

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны.

Свойство 1

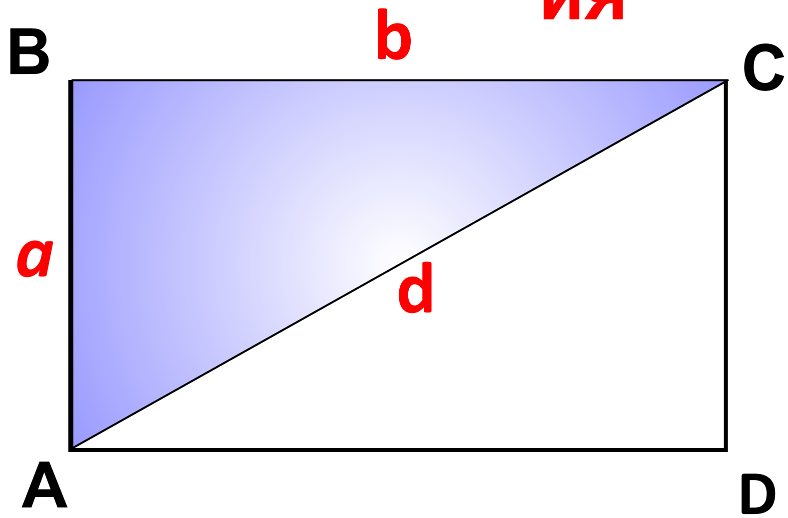
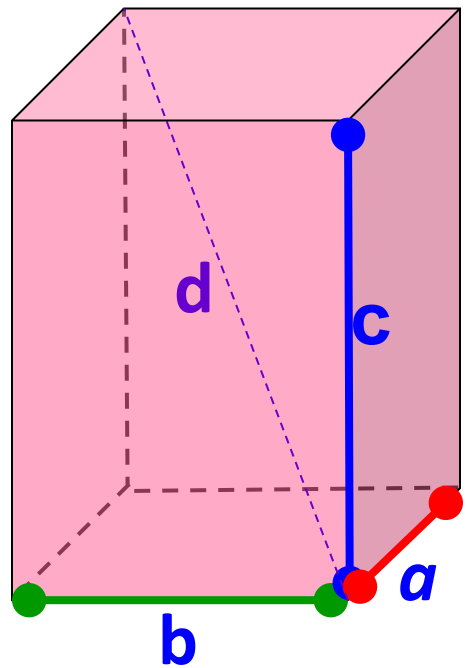
Противоположные грани параллелепипеда **параллельны** и **равны**

Определение

Диагональ параллелепипеда — это отрезок, соединяющий противоположные вершины

Свойство 2

Диагонали параллелепипеда пересекаются **в одной точке** и точкой пересечения **делятся пополам**

Планиметрия	Стереометрия
 В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов двух его измерений. $d^2 = a^2 + b^2$	Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Прямой параллелепипед

- ***Площадь боковой поверхности***

$$S_{б.п.}=P_o*h,$$

где P_o — периметр основания, h — высота

- ***Площадь полной поверхности***

$$S_{п.п.}=S_{б.п.}+2S_{осн}$$

где S_o — площадь основания

- ***Объём***

$$V=S_o*h$$

Прямоугольный параллелепипед

- ***Площадь боковой поверхности***

$$S_{б}=2c(a+b),$$

где a, b — стороны основания, c — боковое ребро прямоугольного параллелепипеда

- ***Площадь полной поверхности***

$$S_{п}=2(ab+bc+ac)$$

- ***Объём***

$$V=abc$$

Куб

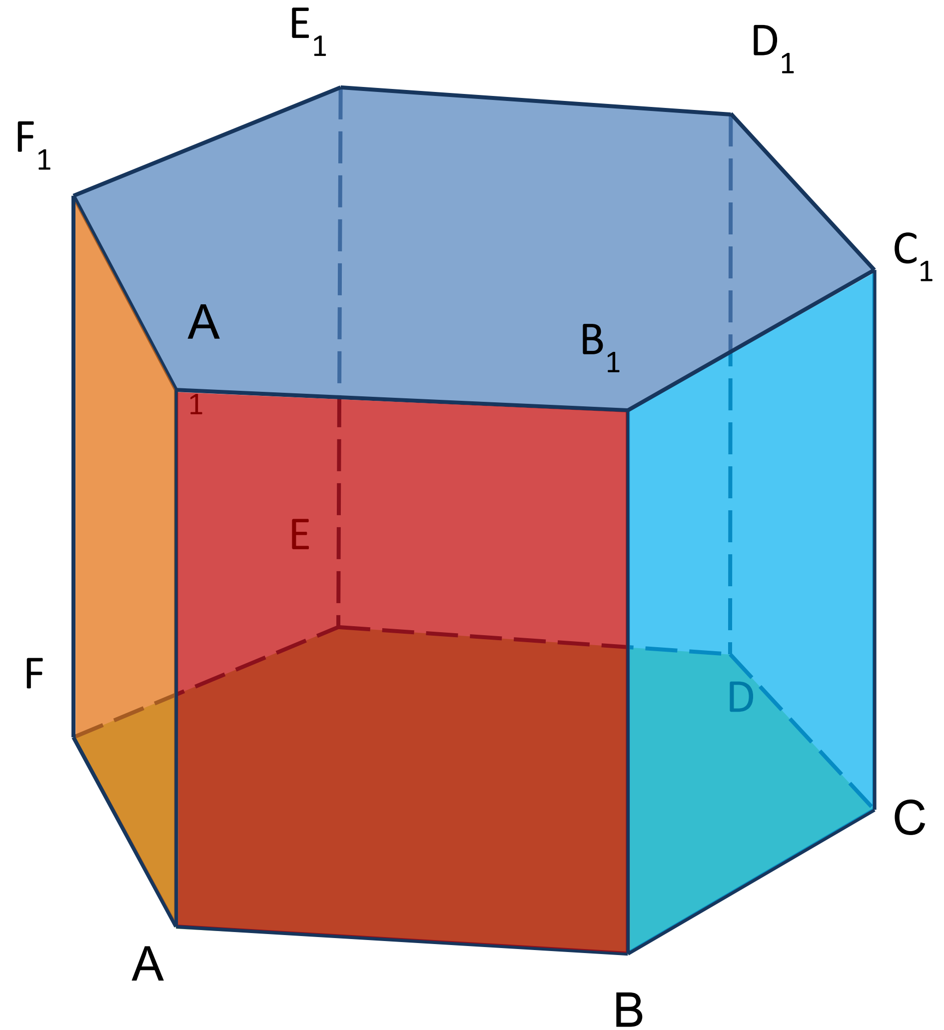
- ***Площадь поверхности***:

$$S=6a^2$$

- ***Объём***:

$$V=a^3,$$

где a — ребро куба.



Задание 2: Назовите шестиугольную призму. Перечислите ее вершины, ребра, основания, боковые грани

Пирамида

Пирамида – многогранник, который состоит из плоского многоугольника (*основания пирамиды*), точки, не лежащей в плоскости основания (*вершины пирамиды*) и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания

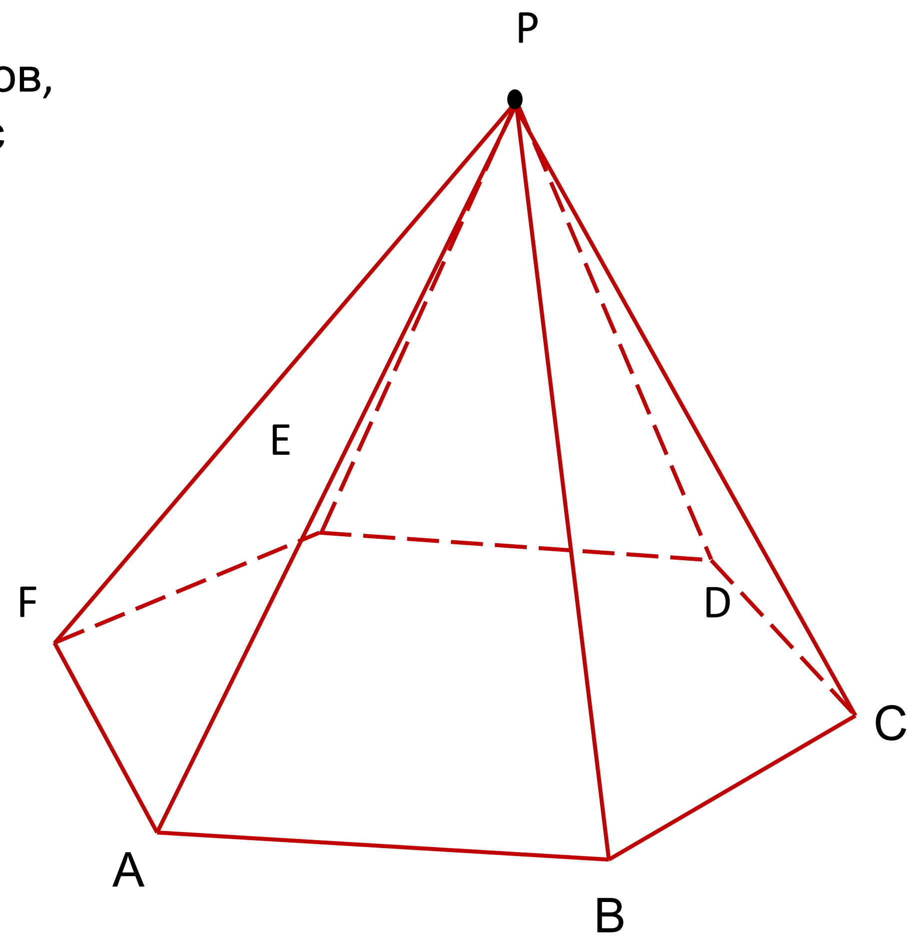
PABCDEF — шестиугольная пирамида

ABCDEF — основание пирамиды

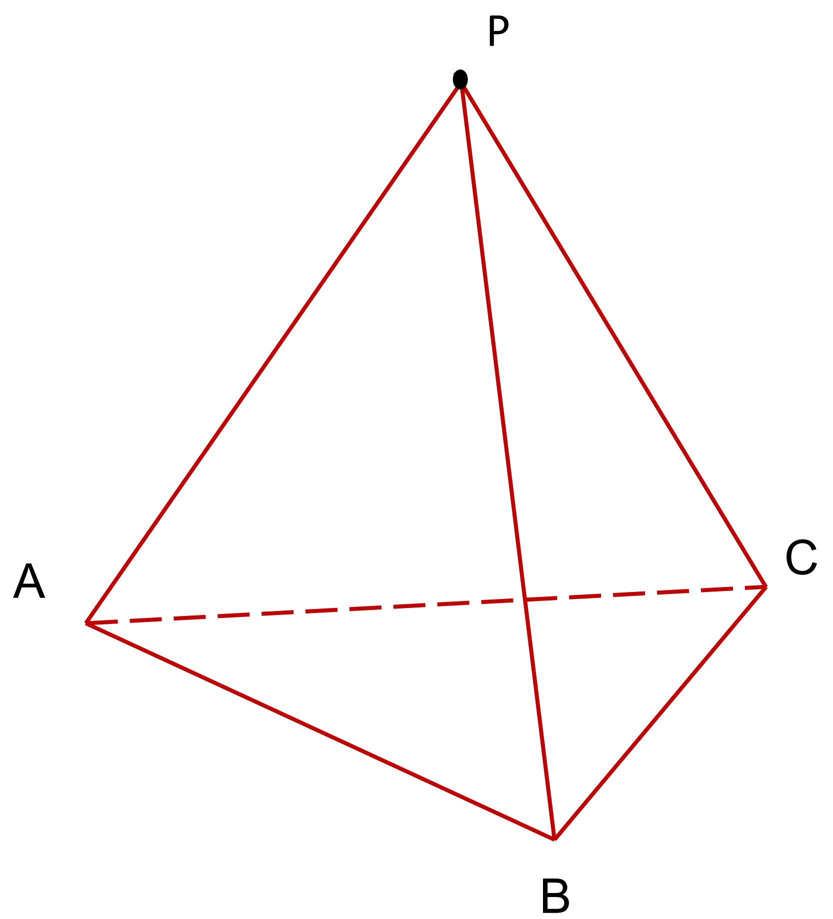
P — вершина

PAB, PBC, PCD и др. — боковые грани (треугольники)

PA, PB, PC и др. — боковые рёбра

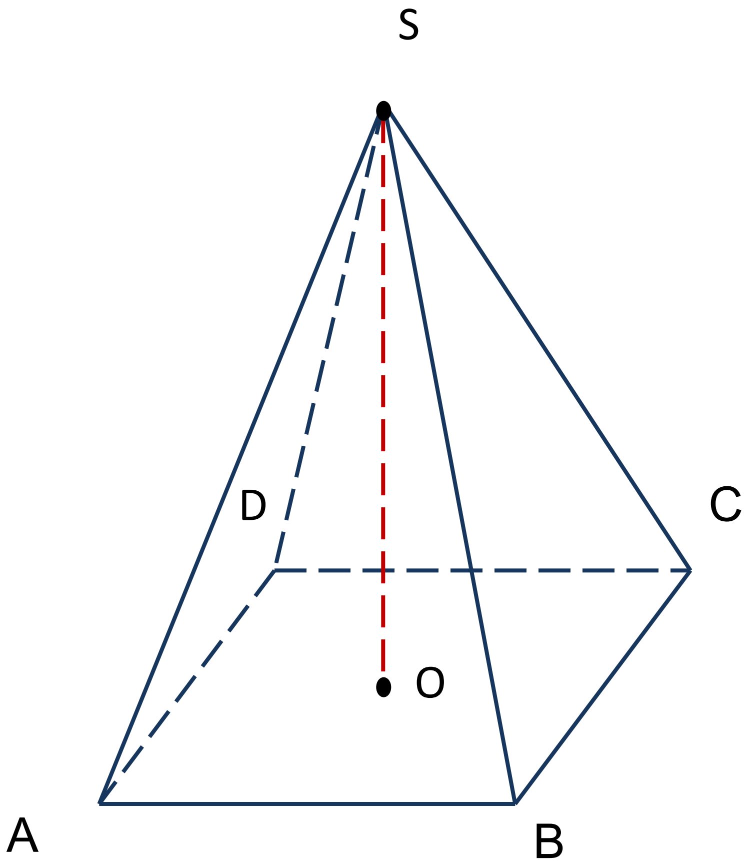


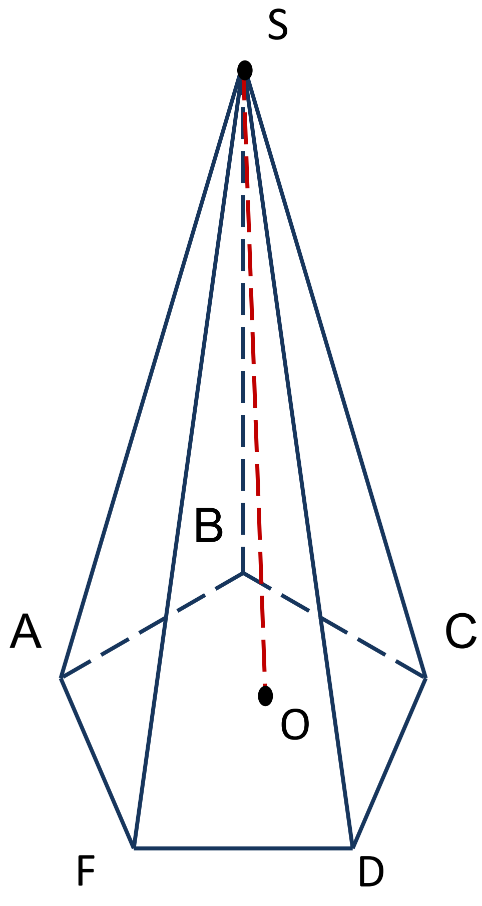
Задание 3: Назовите треугольную пирамиду (тетраэдр), вершину пирамиды, вершины при ее основании, ребра пирамиды, основание пирамиды, боковые грани



Определение

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из её вершины к основанию





— Сумма площадей **боковых граней** пирамиды называется **площадью её боковой поверхности**
— Сумма площадей **всех граней** (и основания и боковых граней), называется **площадью полной поверхности** пирамиды

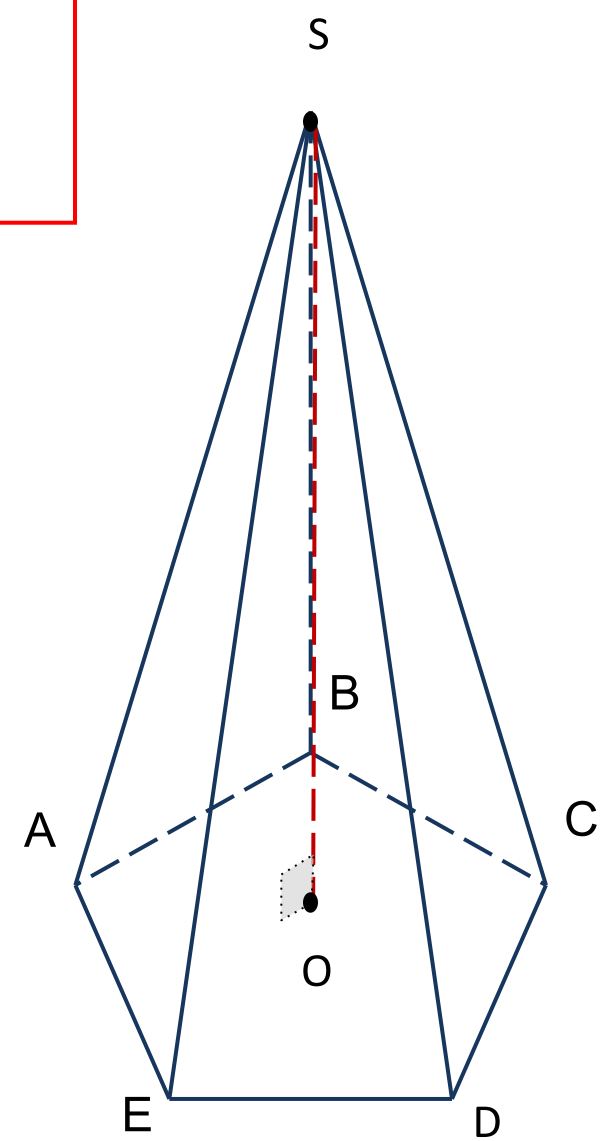
$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$$

Пирамида называется **правильной**, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.

Если ABCDE — правильный пятиугольник, то SABCDE — правильная пятиугольная пирамида

SO — высота

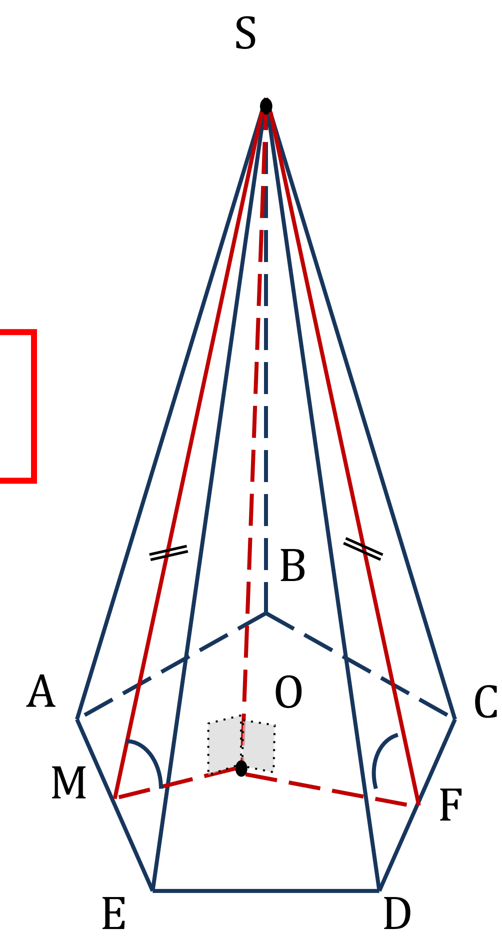
SO ⊥ (ABCDE)



Все боковые рёбра правильной пирамиды равны

Боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками

Апофема — высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины.



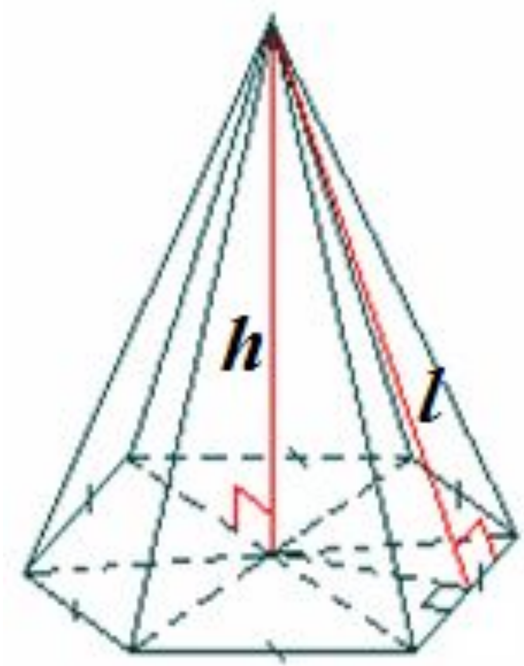
!

Все **апофемы** правильной пирамиды равны, а так же все **двугранные углы при основании** равны

$S_{\text{б.п.}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$, где l – апофема

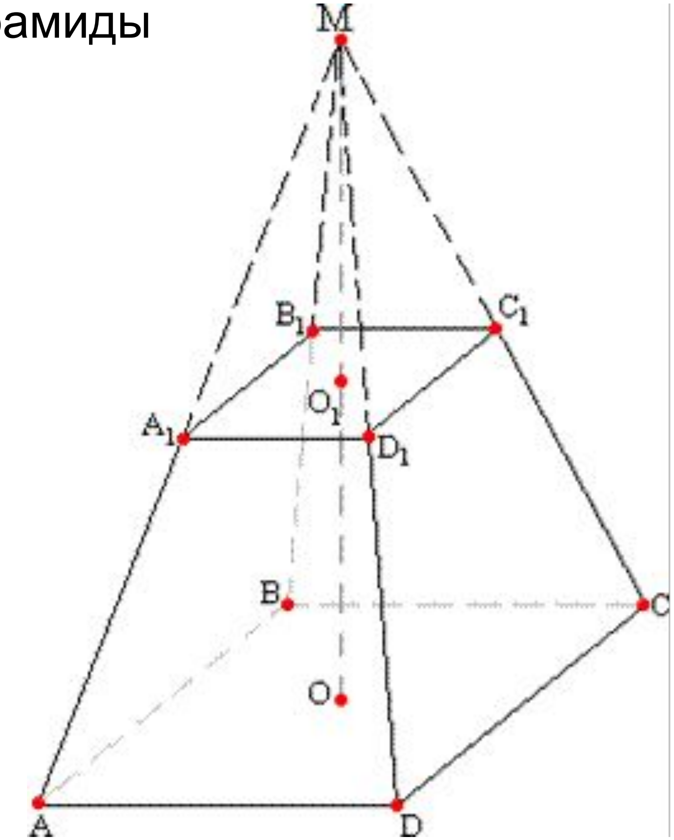
$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + S_{\text{осн.}}$

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$



Усеченная пирамида

Плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая пирамиду, отсекает от нее ***подобную пирамиду***. Другая часть пирамиды представляет собой многогранник, который называют ***усеченной пирамидой.***



Объем усеченной пирамиды:

$$V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$$

Площадь боковой поверхности:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h_{бок}$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{полн} = S_1 + S_2 + S_{бок}$$

где *h* - высота усечённой пирамиды,
$h_{бок}$ – апофема усечённой пирамиды,
S_1 – нижнее основание усечённой пирамиды,
S_2 – верхнее основание усечённой пирамиды