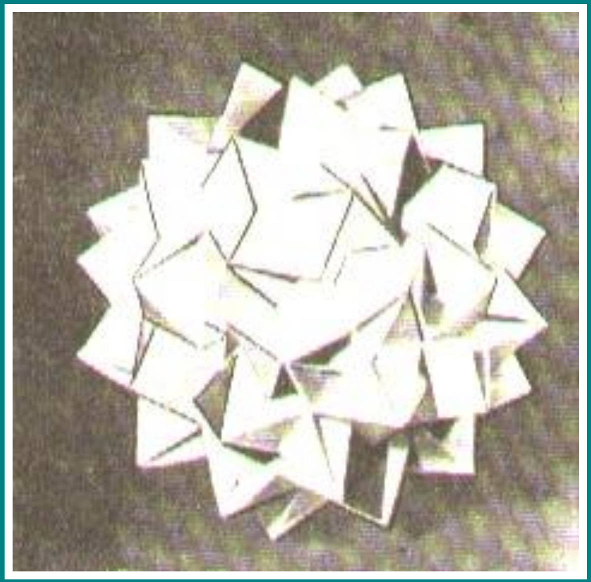
Как много нам открытий чудных
Готовит просвещенья дух,
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений- парадоксов друг...

А.С. Пушкин



Математика владеет не только
Истиной, но и высшей красотой—
Красотой отточенной и строгой,
Возвышенно чистой и стремящейся
К подлинному совершенству,
Которое свойственно лишь
Величайшим образцам искусства

Бертран Рассел

МНОГОГРАННИКИ

Проект Фёдорова Матвея, ученика 11-Э3 ГОУ №1480

Определение многогранника

Многогранником(многогранной поверхностью) **называется поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело.**

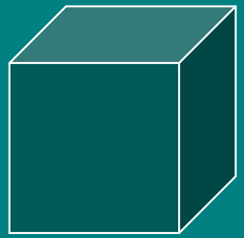
Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его гранями, стороны граней называются ребрами, а концы ребер - вершинами многогранника

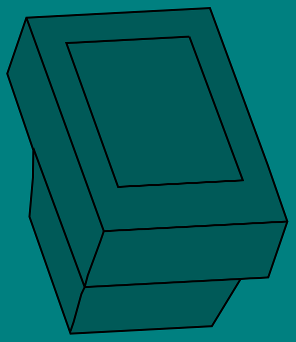
<u>Выпуклый многогранник</u>

Многогранник называется <u>выпуклым</u>, если он расположен <u>по одну</u> сторону от плоскости его грани.

Выпуклый многогранник

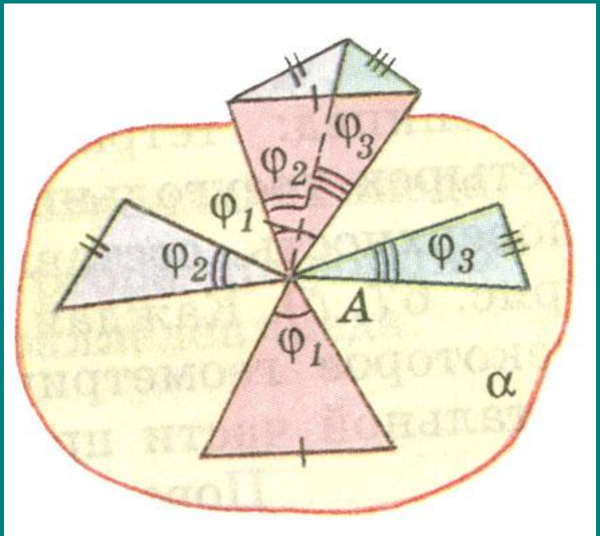
Невыпуклый многогранник





<u>Выпуклый многогранник</u>

В выпуклом многограннике <u>сумма всех плоских углов при каждой его вершине</u> <u>меньше 360°</u>



Многогранник «разрезан» вдоль рёбер и все его грани с общей вершиной А развёрнуты так, что оказались расположенными в одной плоскости α. Видно, что сумма всех плоских углов при вершине А, т.е $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, меньше 360°

Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

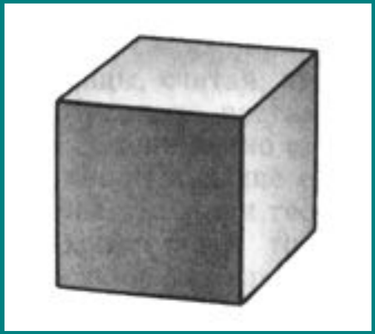
Многогранник называется правильным, если:

1. он выпуклый;
2. все его грани являются равными правильными многоугольниками;
3. в каждой его вершине сходится одинаковое число граней;
4. все его двухгранные углы равны;

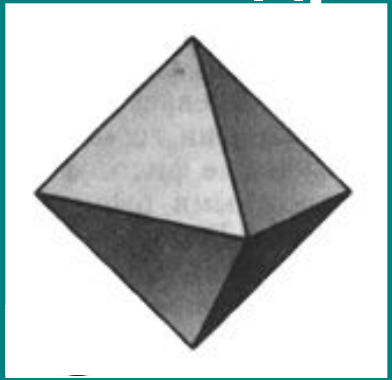
Правильные многогранники

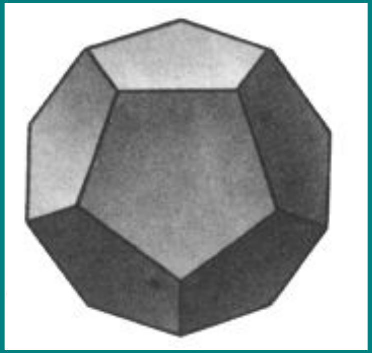
Тетраэдр

Гексаэдр (куб)

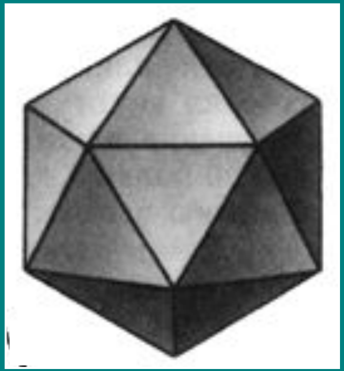


Октаэдр



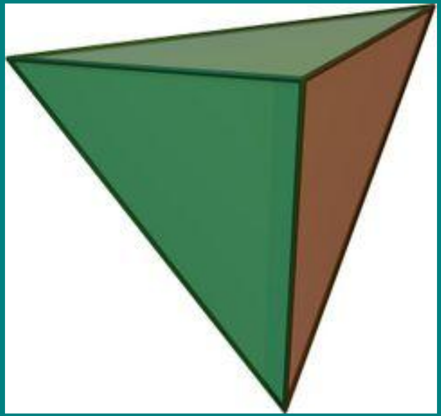


Додекаэдр



Икосаэдр

Тетраэдр



Тетра́эдр — многогранник с четырьмя треугольными гранями, в каждой вершин которого сходятся по 3 грани.

У **правильного тетраэдра** все грани являются равносторонними треугольниками, все двугранные углы при рёбрах и все трёхгранные углы при вершинах равны.

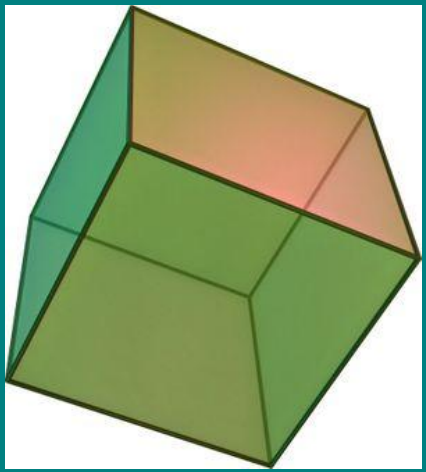
Свойства тетраэдра:

- ✔ В тетраэдр можно вписать октаэдр, притом четыре (из восьми) грани октаэдра будут совмещены с четырьмя гранями тетраэдра, все шесть вершин октаэдра будут совмещены с центрами шести рёбер тетраэдра.
- ✔ Тетраэдр с ребром x состоит из одного вписанного октаэдра (в центре) с ребром x/2 и четырёх тетраэдров (по вершинам) с ребром x/2.
- ✔ Тетраэдр можно вписать в куб двумя способами, притом четыре вершины тетраэдра будут совмещены с четырьмя вершинами куба.

  Все шесть рёбер тетраэдра будут лежать на всех шести гранях куба и равны диагонали грани-квадрата.
- ✔ Тетраэдр можно вписать в икосаэдр, притом, четыре вершины тетраэдра будут совмещены с четырьмя вершинами икосаэдра.

Тип	Правильный многогранник
Грань	Правильный треугольник
Вершин	4
Рёбер	6
Граней	4
Граней при вершине	3
Длина ребра	a
Площадь поверхности	$\sqrt{3}a^2$
Объём	$\frac{\sqrt{2}}{12}a$

Куб или гексаэдр



Куб или **гексаэдр** — правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат. Частный случай параллелепипеда и призмы.

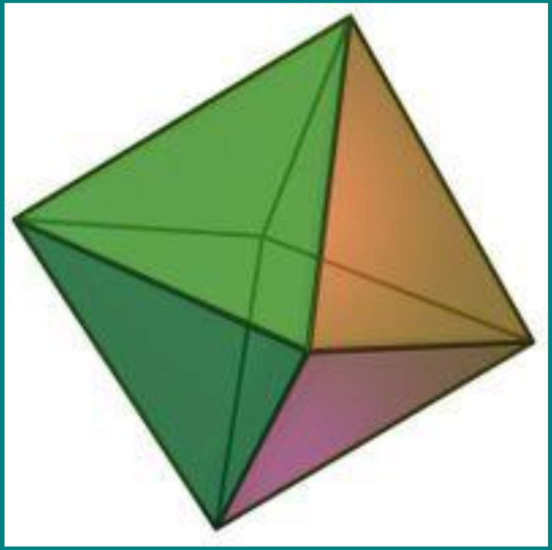
Тип	Правильный многогранник
Грань	квадрат
Вершин	8
Рёбер	12
Граней	6
Граней при вершине	3
Длина ребра	a
Площадь поверхности	$6a^2$
Объём	a^3

Свойства куба:

- ✔ В куб можно вписать тетраэдр двумя способами, притом четыре вершины тетраэдра будут совмещены с четырьмя вершинами куба. Все шесть рёбер тетраэдра будут лежать на всех шести гранях куба и равны диагонали грани-квадрата.
- ✔ Четыре сечения куба являются правильными шестиугольниками - эти сечения проходят через центр куба перпендикулярно четырём его диагоналям.
- ✔ В куб можно вписать октаэдр, притом все шесть вершин октаэдра будут совмещены с центрами шести граней куба.
- ✔ Куб можно вписать в октаэдр, притом все восемь вершин куба будут расположены в центрах восьми гранях октаэдра.
- ✔ В куб можно вписать икосаэдр, при этом, шесть взаимно параллельных рёбер икосаэдра будут расположены соответственно на шести гранях куба, остальные 24 ребра внутри куба, все двенадцать вершин икосаэдра будут лежать на шести гранях куба

Октаэдр

Окта́эдр — один из пяти правильных многогранников. Октаэдр имеет 8 граней (треугольных), 12 рёбер, 6 вершин (в каждой вершине сходятся 4 ребра).

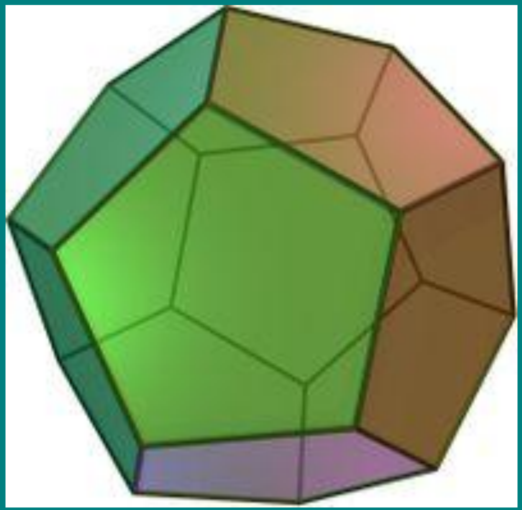


Свойства октаэдра:

- ✔ Октаэдр можно вписать в тетраэдр, притом четыре (из восьми) грани октаэдра будут совмещены с четырьмя гранями тетраэдра, все шесть вершин октаэдра будут совмещены с центрами шести рёбер тетраэдра.
- ✔ Октаэдр с ребром у состоит из 6 октаэдров (по вершинам) с ребром у:2 и 8 тетраэдров (по граням) с ребром у:2
- ✔ Октаэдр можно вписать в куб, притом все шесть вершин октаэдра будут совмещены с центрами шести граней куба.
- ✔ В октаэдр можно вписать куб, притом все восемь вершин куба будут расположены в центрах восьми гранях октаэдра.

Тип	Правильный многогранник
Грань	треугольник
Граней	8
Рёбер	12
Вершин	6
Граней при вершине	4
Двойственный многогранник	Куб

Додекаэдр



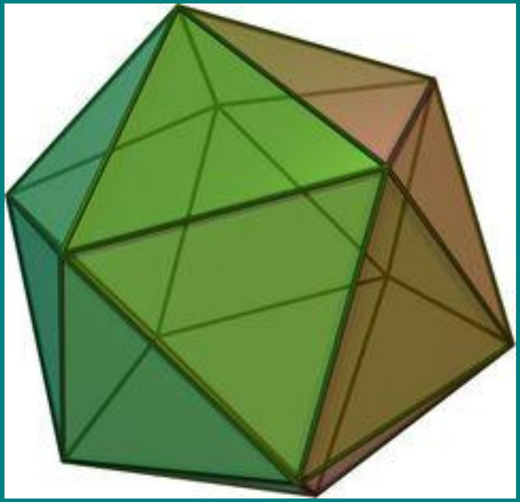
Додека́эдр (двенадцатигранник) — правильный многогранник, объёмная геометрическая фигура, составленная из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трёх правильных пятиугольников.

Тип	Правильный многогранник
Грань	Правильный пятиугольник
Граней	12
Рёбер	30
вершин	20
Граней при вершине	3
Двойственный многогранник	икосаэдр

Таким образом, додекаэдр имеет 12 граней (пятиугольных), 30 рёбер и 20 вершин (в каждой сходятся 3 ребра. Сумма плоских углов при каждой из 20 вершин равна 324°.

Додекаэдр применяется как генератор случайных чисел (вместе с другими костями) в настольных ролевых играх.

Икосаэдр



Икоса́эдр — правильный выпуклый многогранник, двадцатигранник, одно из Платоновых тел. Каждая из 20 граней представляет собой равносторонний треугольник. Число ребер равно 30, число вершин — 12.

Свойства:

- ✔ Икосаэдр можно вписать в куб, при этом, шесть взаимно параллельных рёбер икосаэдра будут расположены соответственно на шести гранях куба, остальные 24 ребра внутри куба, все двенадцать вершин икосаэдра будут лежать на шести гранях куба
- ✔ В икосаэдр может быть вписан тетраэдр, притом, четыре вершины тетраэдра будут совмещены с четырьмя вершинами икосаэдра.
- ✔ Икосаэдр можно вписать в додекаэдр притом, вершины икосаэдра будут совмещены с центрами граней додекаэдра.
- ✔ В икосаэдр можно вписать додекаэдр притом, вершины додекаэдра будут совмещены с центрами граней икосаэдра.

Тип	Правильный многогранник
Грань	Правильный треугольник
Граней	20
Рёбер	30
вершин	12
Граней при вершине	5
Двойственный многогранник	додекаэдр

Теорема

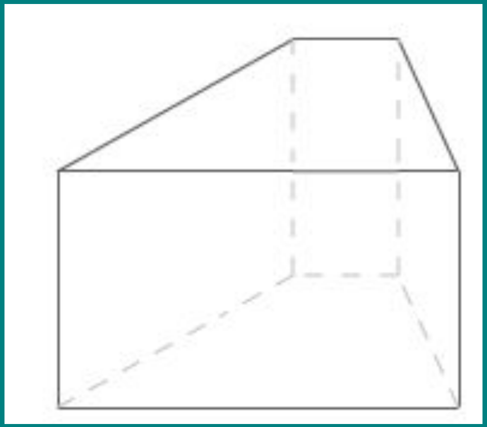
Леонард Эйлер доказал теорему о связи количества граней, вершин и рёбер правильного многогранника:

Г + В = Р + 2.

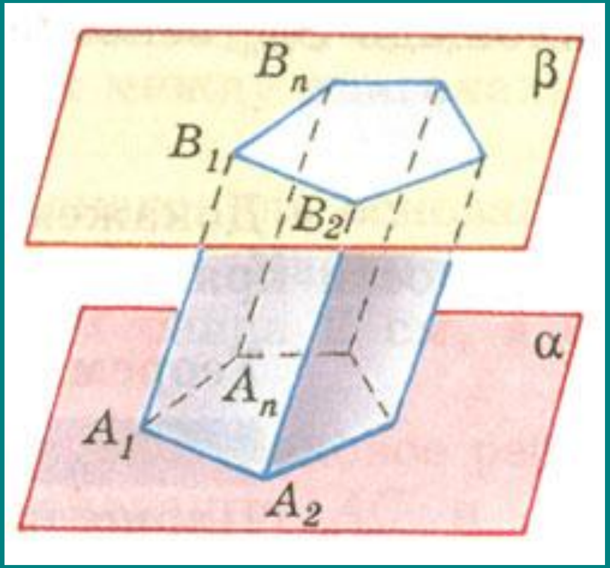
А позднее он показал, что эта теорема выполняется ***для любого выпуклого многогранника***.

Призма

Призма —многогранник, который состоит из двух плоских равных многоугольниов с соответственно параллельными сторонами, и из отрезков, соединяю щих соответствующие точки этих многоугольников.



Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, — боковыми рёбрами призмы. Все боковые грани призмы — параллелограммы.



Призма. Свойства призмы

Свойства призмы:

1. Основания призмы являются равными многоугольниками.
2. Боковые грани призмы являются параллелограммами.
3. Боковые ребра призмы равны.

Объём призмы равен произведению её высоты на площадь основания:

$$V = S * h$$

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней:

$$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей её боковых граней

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Призма

Связанные определения:

Полная поверхность призмы — фигура, образованная всеми гранями призмы.

Боковая поверхность призмы — фигура, образованная боковыми гранями призмы.

Высота призмы — перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки плоскости одного основания к плоскости другого основания.

Диагональная плоскость — плоскость проходящая через боковое ребро призмы и диагональ основания, а сечение призмы этой плоскостью называется диагональным сечением. Оно является параллелограммом, а в прямой призме прямоугольником.

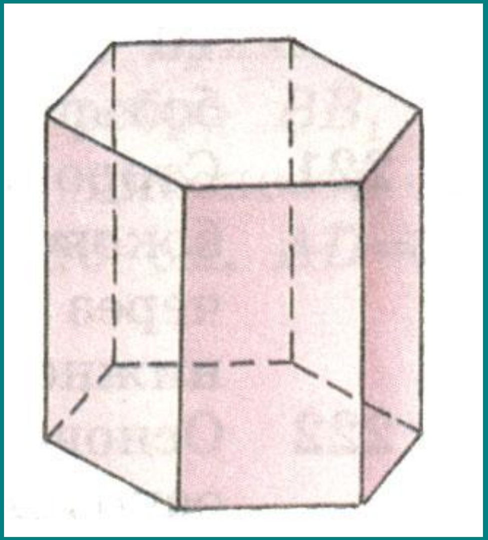
Перпендикулярное сечение — плоскость, проходящая через призму перпендикулярно ее ребру.

Призма. Виды призм

Призмы бывают прямые и наклонные.

Прямая призма — призма, у которой все боковые ребра перпендикулярны основанию.

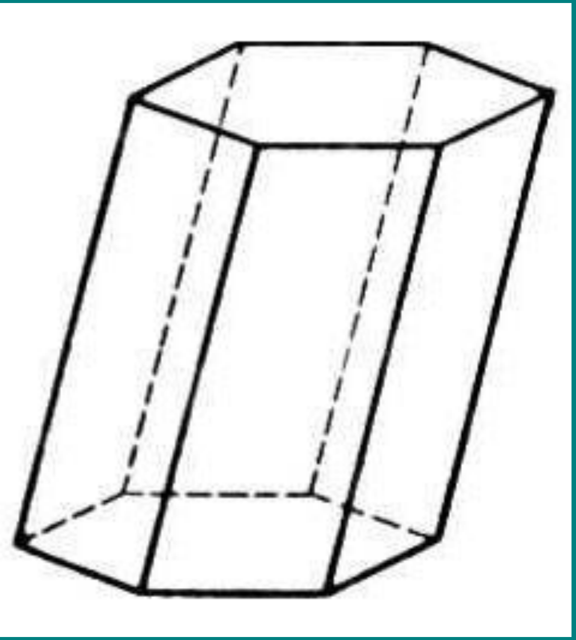
Площадь полной поверхности прямой призмы равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания.



Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

Призма. Виды призм

Наклонная призма — призма, у которой хотя бы одно боковое ребро которой не перпендикулярно основанию.

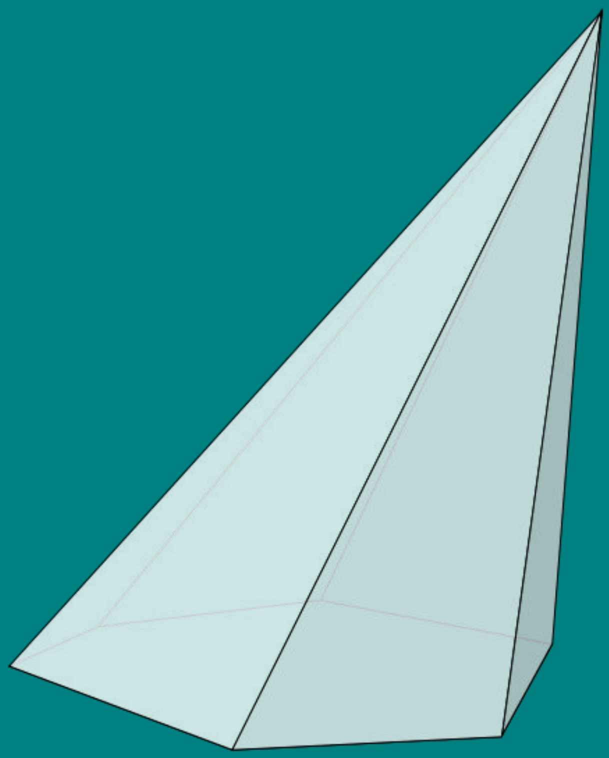


Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра.

Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

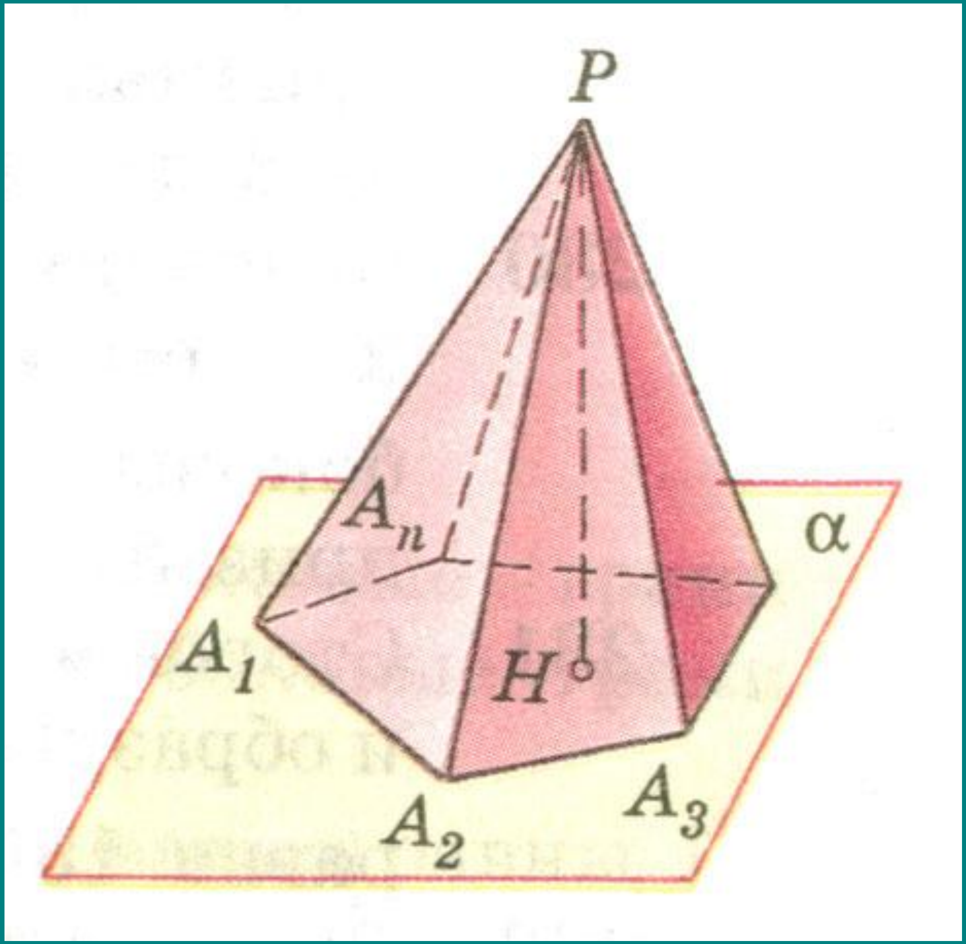
Пирамида

Пирамида (др.-греч. πυραμίς, род. п. πυραμίδος) — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные и т. д.. Пирамида является частным случаем конуса.



Неправильная шестигранная пирамида

Пирамида



Многоугольник $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ – основание пирамиды.

Треугольники A_1PA_2 , A_2PA_3 , … A_nPA_1 - боковые грани,

P – вершина пирамиды

PH_0 – высота пирамиды (перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания)

Пирамида. Свойства

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей её основания и боковых граней:

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$$

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей её боковых граней

Объем пирамиды может быть вычислен по формуле:

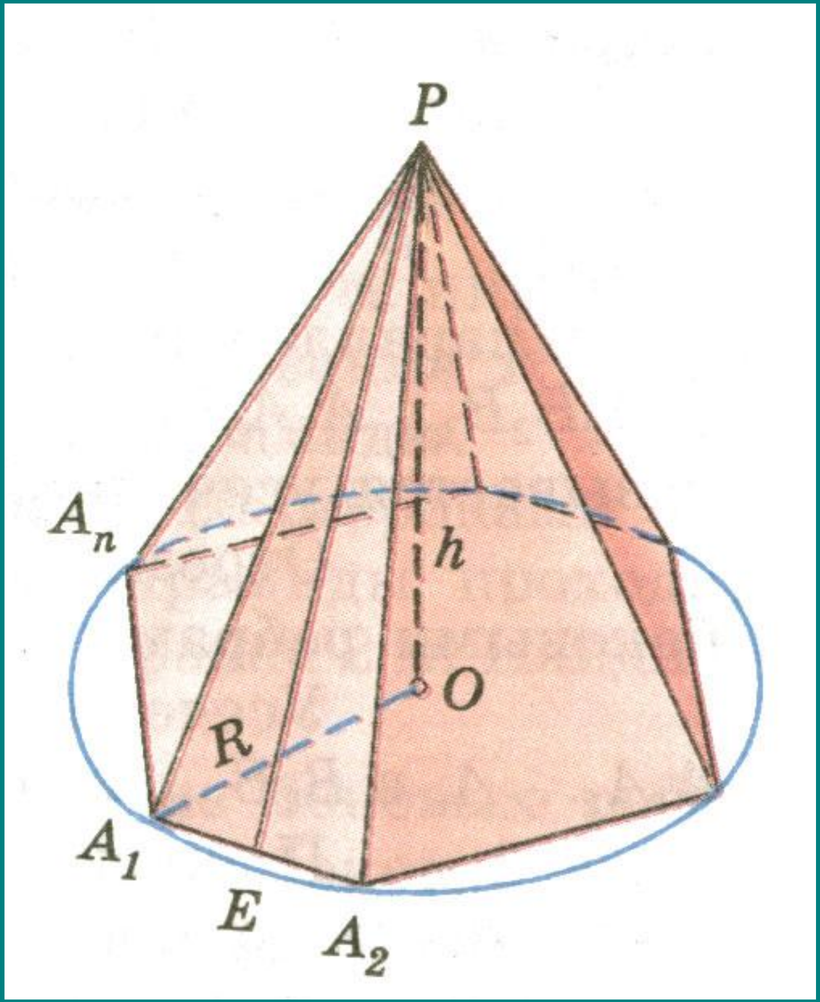
$$V = 1/3\ S_{осн} * h$$

где S — площадь основания и h — высота

Пирамида. Правильная пирамида

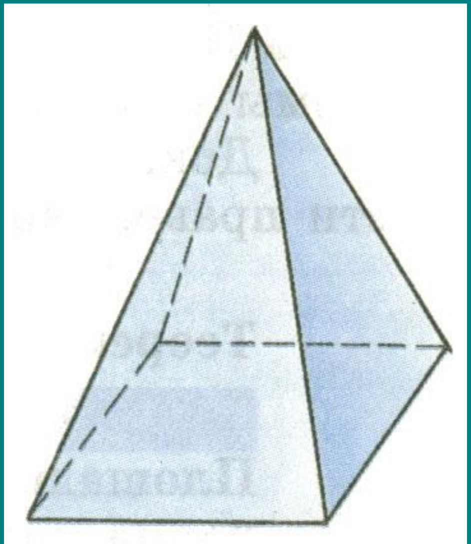
Пирамида называется **правильной**, если основанием её является правильный многоугольник(у которого все углы и стороны равны между собой), а вершина проецируется в центр основания. В правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

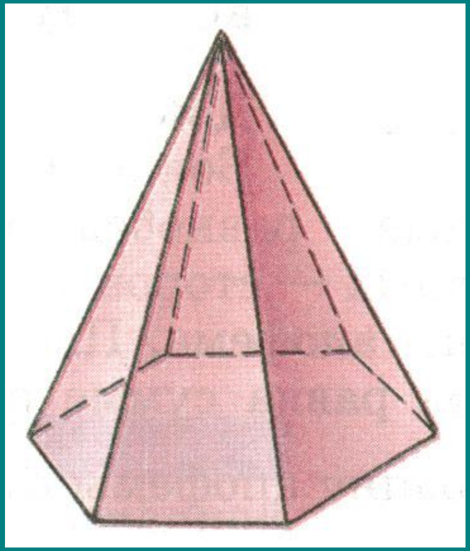
Высота боковой грани правильной пирамиды (РЕ на рис.), проведённая из её вершины, называется апофемой



Пирамида. Правильная пирамида

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему



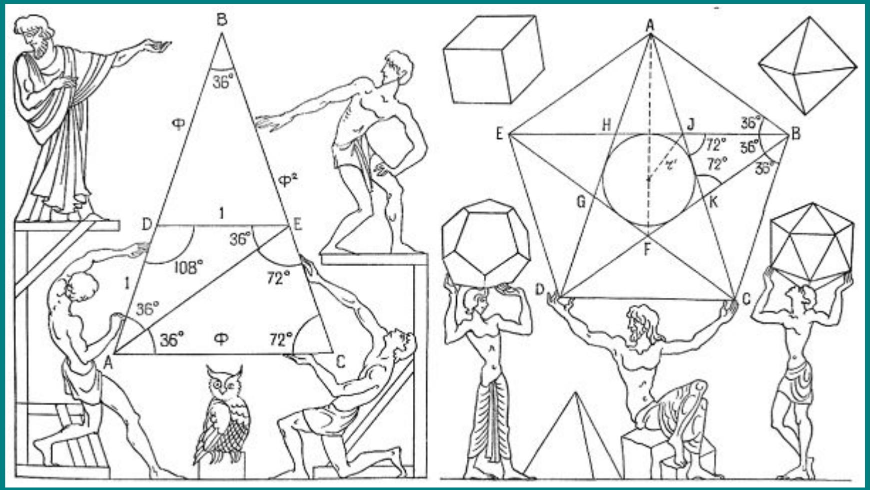


Это интересно

- Построение правильных многоугольников, то есть деление окружности на равные части, позволяло решать практические задачи:
- Создание колеса со спицами;
- Деление циферблата часов;
- Строительство античных театров;
- Создание астрономических сооружений

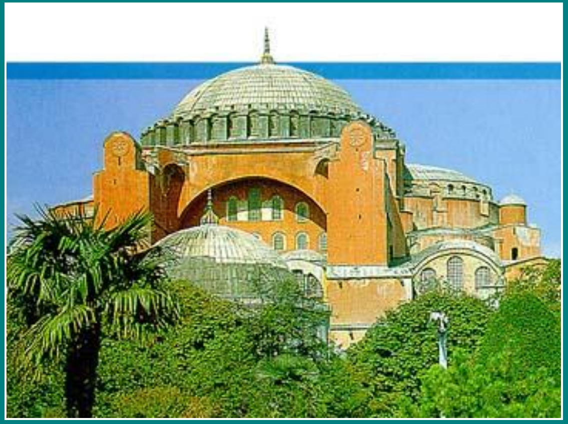
Это интересно

- В школе ПИФАГОРА зародилось учение о правильных многоугольниках; кроме того, пифагорейцы рассмотрели вопрос покрытия плоскости правильными многоугольниками.

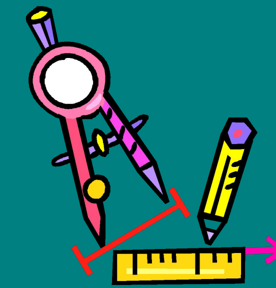


Это интересно

Исидор из Милета - по некоторым источникам, он являлся автором сочинения о правильных многоугольниках, часто присоединяемого к "Началам" в качестве XV книги. Исидор из Милета (532-537 гг.) - византийский архитектор и геометр, построивший вместе с Анфимием собор Святой Софии в Константинополе.

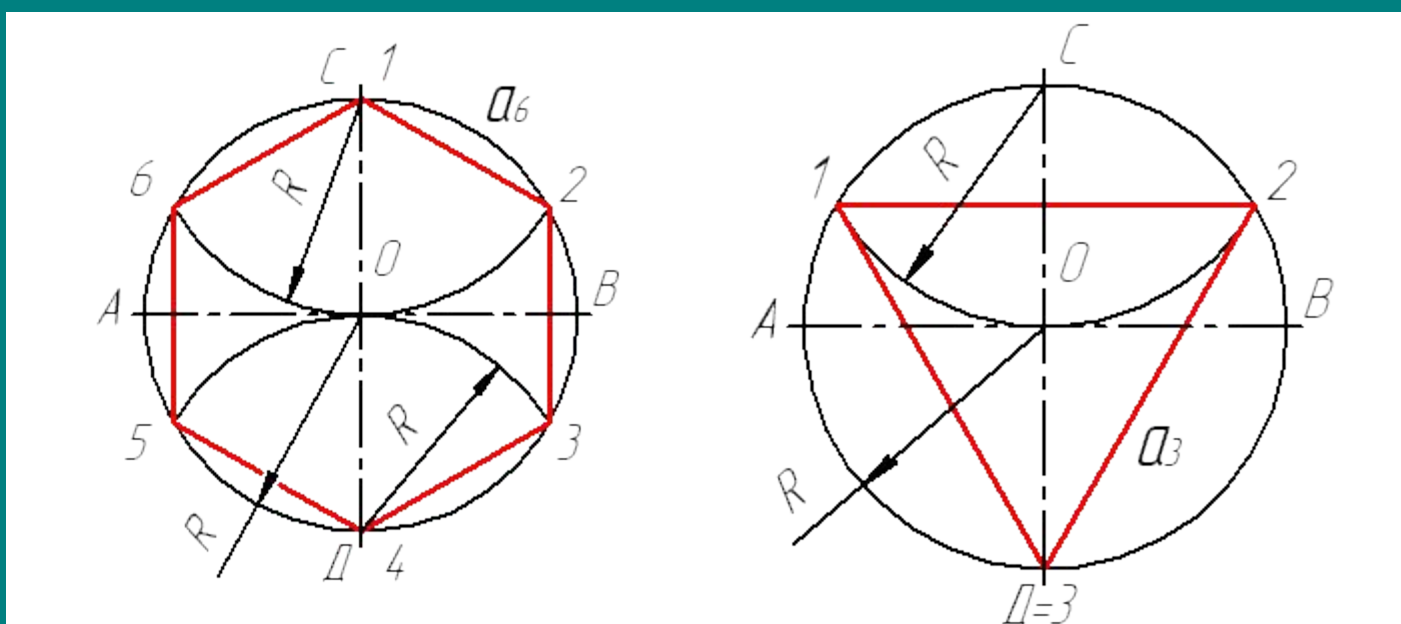


Это интересно



Классическая геометрия признает только построения при помощи циркуля и линейки

Деление окружности на равные части выполнялось только этими инструментами



Это интересно

Задача о квадратуре круга

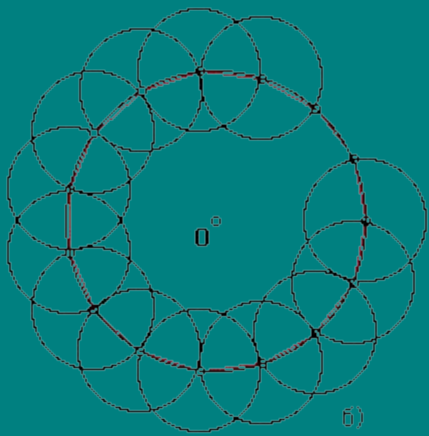
Для вычисления площади круга и длины окружности использовали построение правильных вписанных и описанных многоугольников.

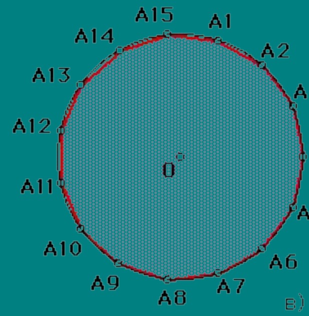
АРХИМЕД при работе с правильным 96-угольником вывел значение числа π

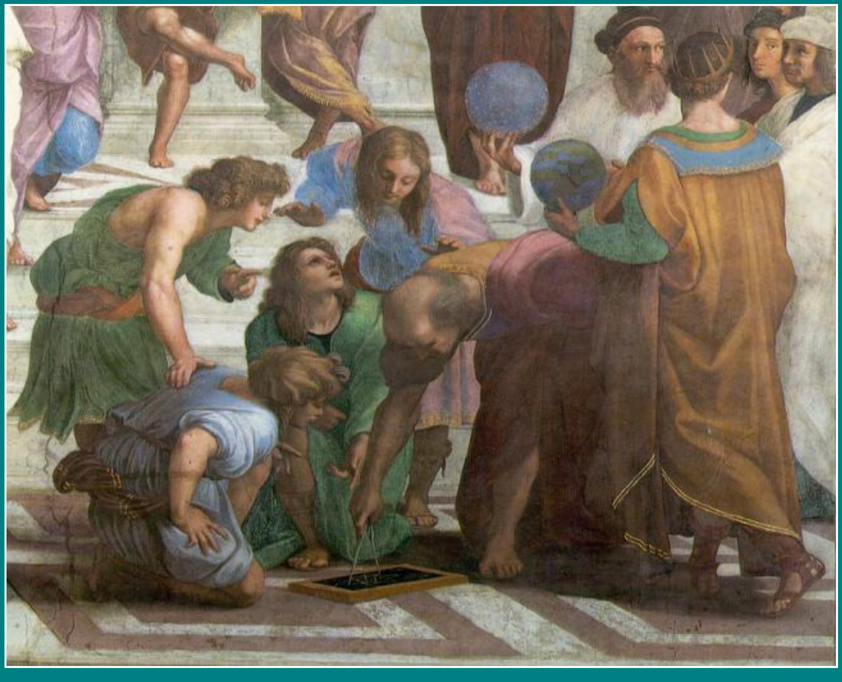
Это интересно

Евклид

Описал построение 3 , 4 , 5 , 6- угольников, построил 15-угольник







Это интересно

Эпоха Возрождения

В эпоху Возрождения возобновился интерес к правильным многоугольникам- появились переводы античных авторов.

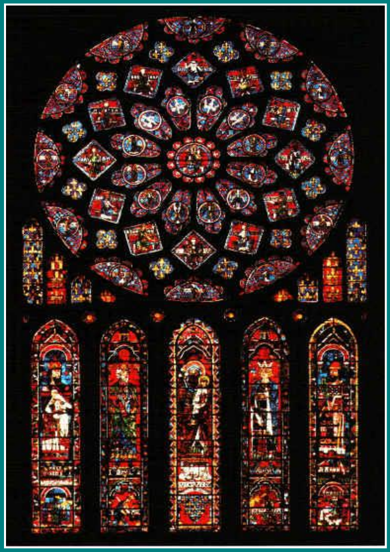
Теория правильных многоугольников была востребована в связи с появлением книгопечатания (разработка шрифтов), появлением огнестрельного оружия (строительство крепостей), популярностью восточных орнаментов.

Правильными многоугольниками заинтересовались знаменитые художники.

Это интересно

Эпоха Возрождения

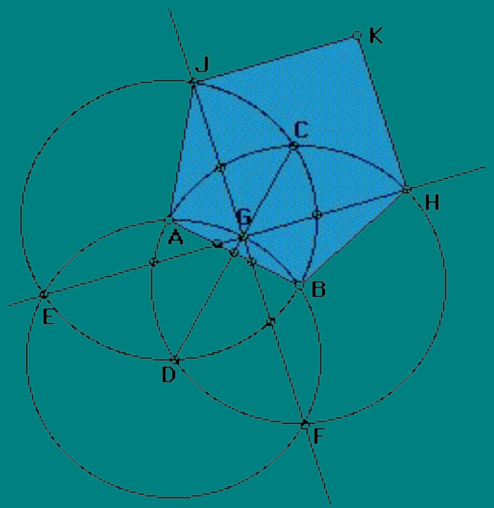
Развитие готического стиля и широкое применение витражей в строительстве соборов также заставило вернуться к задачам построения правильных многоугольников.



Это интересно

Альберхт Дюрер – «северный Леонардо»

Именно Альбрехт Дюрер осуществил новое построение правильного пятиугольника, передав потомкам средневековый способ построения постоянным раствором циркуля.



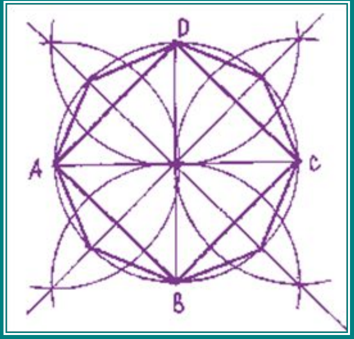
Это интересно

Альберхт Дюрер – «северный Леонардо»

Дюрер занимался фортификацией, разрабатывая системы оборонительных сооружений;

Решил задачу построения правильного восьмиугольника;

Разработал принципы черчения художественно исполненных букв.



Это интересно

Великий Леонардо да Винчи

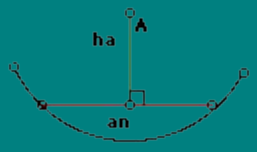


рис.2

Занимаясь построениями, установил соотношение между стороной n-угольника и апофемой: $an/2 : ha = 3/n-1$;

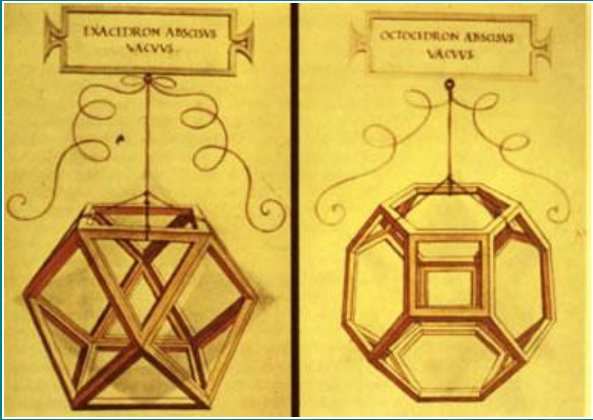
Не обошел вниманием и разработку первых типографских шрифтов;

Привлекали его внимание и орнаменты.

Это интересно

Великий Леонардо да Винчи

Для своего друга Луки Пачоли Леонардо, глубоко интересующийся пропорциями, создал иллюстрации многогранников, гранями которых являются правильные многоугольники.



Это интересно

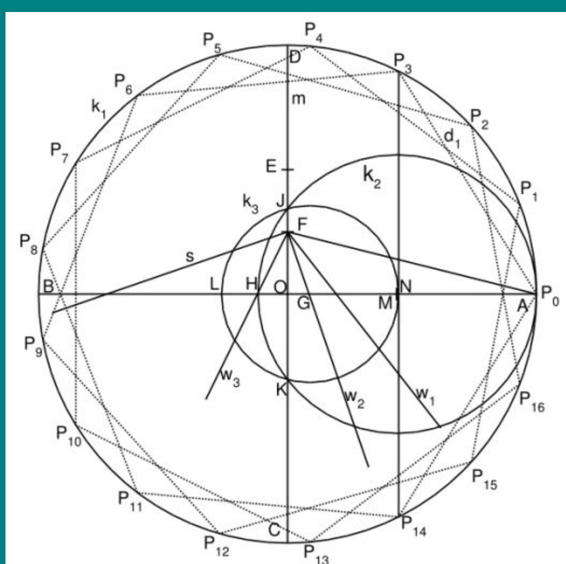
Иоганн Кеплер

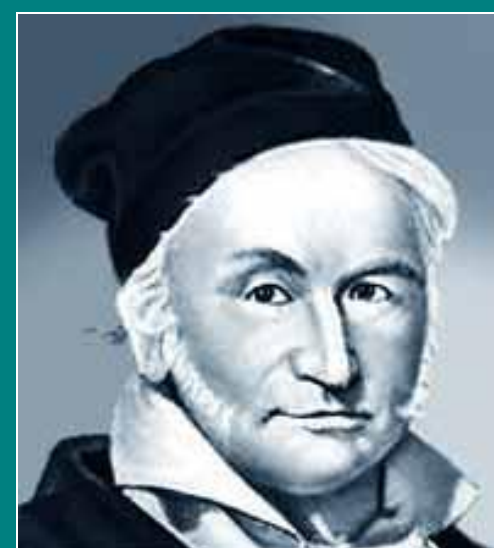
Математик Иоганн Кеплер создал трактат «Новогодний подарок или о шестиугольных снежинках», опубликованный в 1611 году. В нем он практически привел первый пример разбиения плоскости на правильные шестиугольники.

Это интересно

Карл Фридрих Гаусс

Доказал возможность построения правильного 17-угольника. После этого 19-летний юноша решил заняться математикой, а не филологией.





Это интересно

«Дело о построении правильных многоугольников»

Лишь в 1796 году Карлу Фридриху Гауссу удалось доказать, что если число сторон правильного многоугольника равно простому числу Ферма, к которым, кроме 3 и 5, относятся 17, 257 и 65537, то **его можно построить при помощи циркуля и линейки.**

Точку в деле построения правильных многоугольников поставило нахождение построений 17-, 257-и 65537-угольника. Первое было найдено в 1825 году, второе —в 1832 году, а последнее — в 1894 году.

С тех пор проблема считается полностью решённой.