

**Двойственная задача  
линейного  
программирования.  
Экономическая  
интерпретация.**



# Прямая задача линейного программирования:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$1) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{array} \right\}$$

(



- Матрица коэффициентов двойственной задачи транспонирована, т.е. строки заменены столбцами, а столбцы – строками.
- Задачи (1) и (2) называются ***парой взаимно двойственных задач линейного программирования.***

# Теорема двойственности

- Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение  $x^*$ , то другая также имеет оптимальное решение .

При этом  $Z^* = G^*$ , где

$$Z^* = G^*$$

$$Z^* = Z(x^*), \quad G^* = G(y^*)$$

# Экономический смысл двойственной задачи

Пусть  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  - число изделий,

$b_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  - количество ресурсов для изготовления изделий.

$a_{ij}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $j = \overline{1, n}$  - количество ресурсов  $i$ -го типа на изготовление одного изделия  $j$ -го вида;

$c_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  - прибыль от реализации одного вида изделия  $j$ -го вида

Тогда модель (1) – задача определения оптимального плана производства продукции, обеспечивающего максимальную прибыль.

Пусть предприятие решило прекратить производство изделий и продать ресурсы, идущие на их изготовление.

Обозначим:

$y_i$  - цена на единицу ресурсов  $i$ -го вида,  $i = \overline{1, m}$

Цены на ресурсы должны удовлетворять условиям:

1. Они не должны быть слишком высокими, иначе ресурсы невозможно будет продать,
  2. Цены на ресурсы должны быть такими, чтобы прибыль от их реализации была больше прибыли от реализации готовой продукции.
- 1 условие выражается ЦФ в модели (2), а 2 условие – ограничениями.

Двойственная задача соответствует следующей экономической проблеме:

По каким минимальным ценам следует продавать ресурсы, чтобы прибыль от их реализации была больше прибыли, полученной от реализации продукции, изготавливаемой с использованием этих ресурсов.

Значения  $y_1, y_2, \dots, y_m$  - теневые цены.

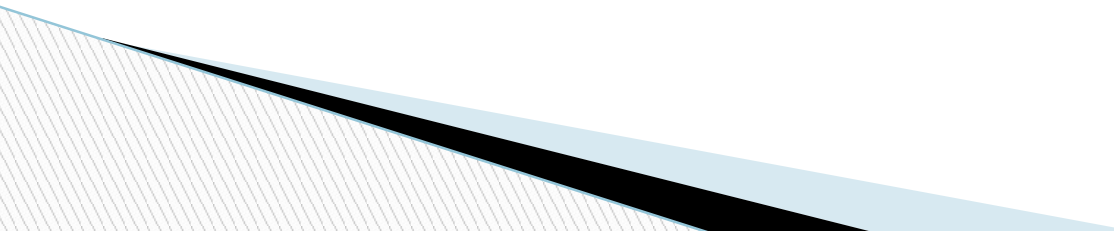
*Теневая цена* - двойственные оценки ограничений (ресурсов), показывающие, насколько изменится оптимальное значение ЦФ, если увеличить на единицу правую часть ограничения.



**Решение ЗЛП с помощью  
MS Excel.  
Анализ оптимального  
плана**

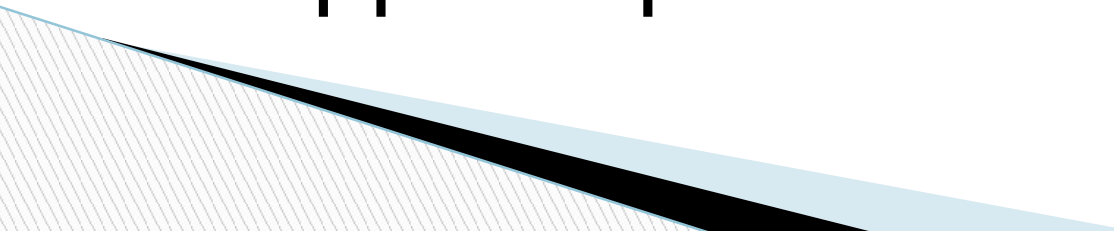


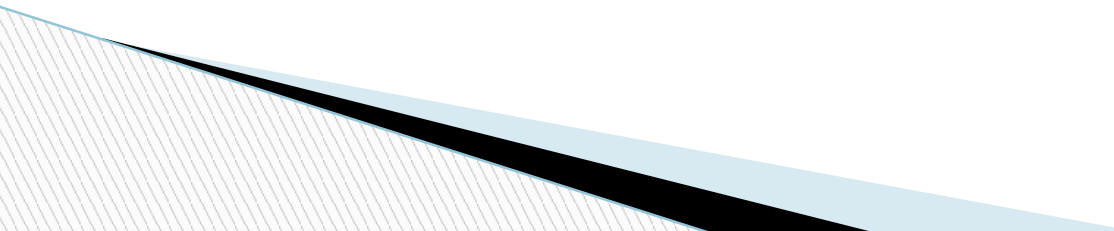
# План:

1. Экономико-математический анализ
  2. Анализ устойчивости решения
- 

# Экономико-математический анализ проводят для:

- определения возможных последствий в системе в целом и в каждом её элементе при изменении параметров модели;

- оценки устойчивости оптимального плана к изменению отдельных параметров задачи;
  - проведения вариантных расчётов и получения новых вариантов плана без повторного решения задачи от исходного базиса с помощью корректировки.
- 

- Процесс решения оптимизационной задачи в Excel 2010 включает следующие этапы:
  - Подготовка исходных данных
  - Формирование модели
  - Настройка параметров расчетов
  - Нахождение оптимального решения
  - Анализ устойчивости решения
  - Сохранение результатов
- 

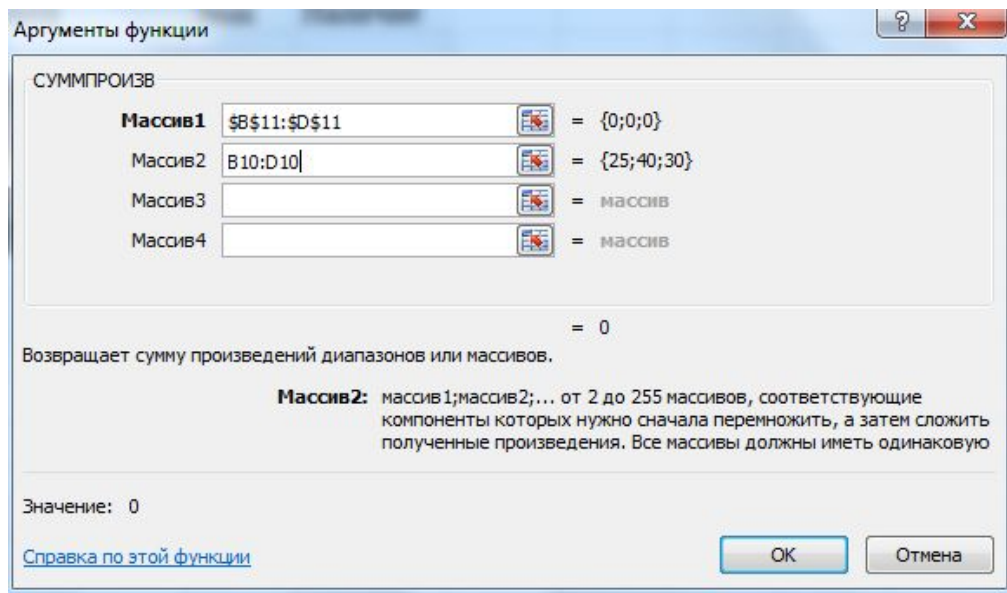
- Пример. Для производства трех видов изделий фирма располагает следующими видами ресурсов: сырье , оборудование , труд. Расход ресурсов, на производство одной единицы изделий каждого вида, и удельная прибыль от их продажи приведены в таблице. Требуется найти оптимальный план производства для получения максимальной прибыли

<b>Расчет оптимального плана фирмы</b>				
	Нормы расхода ресурсов			
	<b>Изделие 1</b>	<b>Изделие 2</b>	<b>Изделие 3</b>	<b>Наличие</b>
<b>Ресурс</b>				
Сырье, кг	5	6	4	400
Оборудование, ед.	4	7	6	350
Труд, чл-ч.	6	8	5	480
Удельная прибыль, у.д.е.	25	40	30	

## □ Размещение информации на рабочем листе

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	<b>Расчет оптимального плана фирмы</b>						
3							
4	Нормы расхода ресурсов						
5		Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Расход	Знак	Наличие
6	Ресурс						
7	Сырье	5	6	4	0	<=	400
8	Обустройство	4	7	6	0	<=	350
9	Труд	6	8	5	0	<=	480
10	Удельная прибыль	25	40	30			
11	Выпуск						
12							

# □ Ввод формул

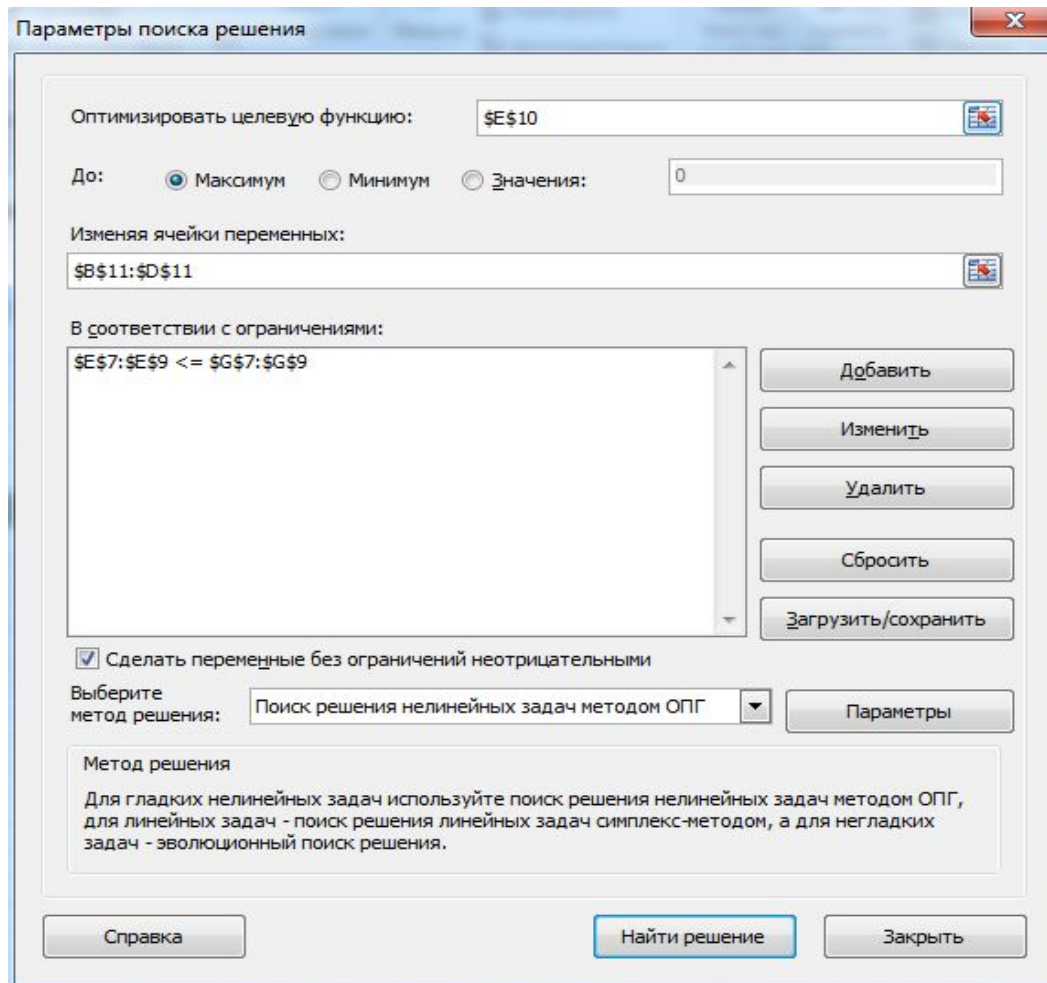
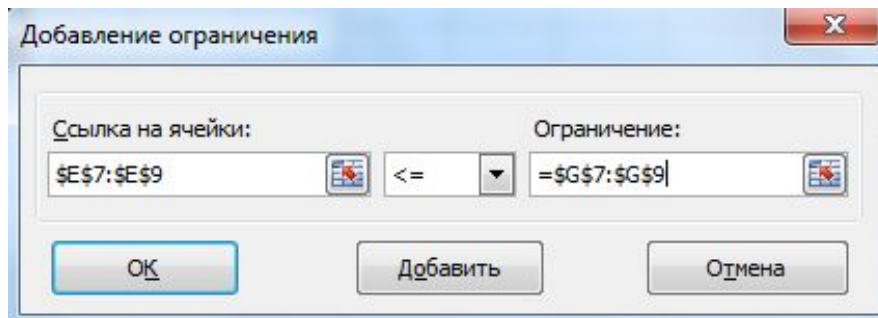


E10    fx    =СУММПРОИЗВ(\$B\$11:\$D\$11;B10:D10)

	A	B	C	D	E	F	G	
1								
2		<b>Расчет оптимального плана фирмы</b>						
3								
4		Нормы расхода ресурсов						
5		Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Расход	Знак	Наличие	
6	Ресурс							
7	Сырье	5	6	4		0 <=	400	
8	Оборудование	4	7	6		0 <=	350	
9	Труд	6	8	5		0 <=	480	
10	Удельная прибыль	25	40	30	0			
11	Выпуск							
12								



- Поиск решения (Вкладка «Данные»)
- Добавление ограничений





# Анализ результатов

Отчёт по результатам содержит информацию о решении задачи, состоит из 3-х таблиц.

- 1 – сведения об оптимальном значении ЦФ;
- 2 – начальные и оптимальные значения переменных;
- 3 – информация об ограничениях в оптимальном плане.

Ячейка целевой функции (Максимум)					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение		
\$E\$10	Удельная прибыль	Расход	0	2120	

Ячейки переменных					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	
\$B\$11	Выпуск	Изделие 1	0	56	Продолжить
\$C\$11	Выпуск	Изделие 2	0	18	Продолжить
\$D\$11	Выпуск	Изделие 3	0	0	Продолжить

Ограничения						
Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск	
\$E\$7	Сырье	Расход	388	\$E\$7<=\$G\$7	Без привязки	12
\$E\$8	Оборудование	Расход	350	\$E\$8<=\$G\$8	Привязка	0
\$E\$9	Труд	Расход	480	\$E\$9<=\$G\$9	Привязка	0

Столбец **Статус (Состояние)** содержит информацию о состоянии ограничения.

Если ресурс используется полностью, то соответствующее ограничение является **связанным (привязка)**; если ресурс недоиспользуется, то ограничение – **несвязанное (без привязки)**.

# Анализ устойчивости решения

Влияние на решение изменений различных параметров модели называют **анализом устойчивости решения.**

## Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$11	Выпуск Изделие 1	56	0	25	1,153846154	2,142857143
\$C\$11	Выпуск Изделие 2	18	0	40	3,75	0,9375
\$D\$11	Выпуск Изделие 3	0	-1,5	30	1,5	1E+30

## Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$E\$7	Сырье Расход	388	0	400	1E+30	12
\$E\$8	Оборудование Расход	350	4	350	70	30
\$E\$9	Труд Расход	480	1,5	480	10,90909091	80

- Позволяет выяснить, насколько решение модели чувствительно к изменению внешних условий, а также определить область изменения параметров, в которой оно остаётся прежним.

*Результ. Значение (окончательное значение)*– оптимальные значения переменных

*Нормир. Стоимость* – двойственные оценки переменных, показывающие, насколько изменится оптимальное значение ЦФ, если принудительно включить единицу переменной в оптимальный план

□ *Допустимое увеличение*  
*(Уменьшение)* -  
насколько можно увеличить  
(уменьшить)  
соответствующий  
коэффициент ЦФ, чтобы  
оптимальное решение не  
изменилось.



▣ *Теневая цена* –  
двойственные оценки  
ограничений (ресурсов),  
показывающие, насколько  
изменится оптимальное  
значение ЦФ, если увеличить  
на единицу правую часть  
ограничения.

□ *Допустимое увеличение (Уменьшение)* -  
насколько можно увеличить (уменьшить) правую часть соответствующего ограничения, чтобы не изменилась его двойственная оценка (теневая цена).

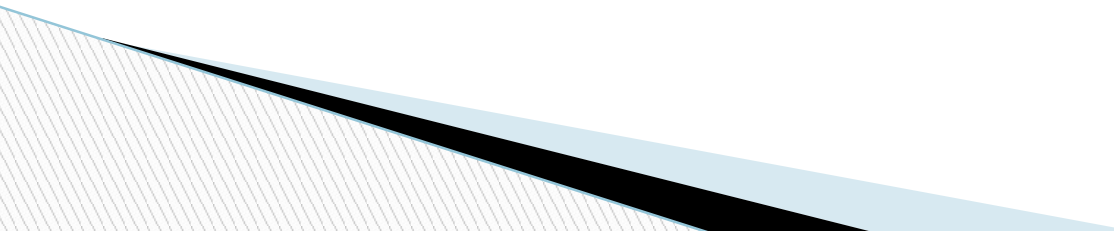
## □ Отчет по пределам

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
\$E\$10	Удельная прибыль Расход	2120

Переменная		
Ячейка	Имя	Значение
\$B\$11	Выпуск Изделие 1	56
\$C\$11	Выпуск Изделие 2	18
\$D\$11	Выпуск Изделие 3	0

Нижний	Целевая функция
Предел	Результат
0	720
0	1400
0	2120

Верхний	Целевая функция
Предел	Результат
56	2120
18	2120
0	2120

- Отчет по пределам содержит результирующее) оптимальное значение целевой ячейки, а также результирующие (оптимальные) значения изменяемых ячеек с их нижними и верхними пределами и соответствующими целевыми результатами.
  - Нижний предел - это наименьшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксированы (равны оптимальным).
- 

- Верхний предел - это наибольшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксированы (равны оптимальным).
  - Целевой результат - это значение целевой ячейки, когда значение изменяемой ячейки равно ее нижнему или верхнему пределу.
- 