

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ (ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ И ПРИМЕР)

# Актуальность проблемы

- Для решения оптимизационных задач необходимы знания основ математического моделирования технических систем, методов решения оптимизационных задач, современного программного обеспечения персональных компьютеров.
- Формулировка любой технической задачи должна быть переведена на формальный математический язык, т.е. записана с помощью определенных математических выражений. *Нужно знать основы математического моделирования и уметь составлять математические модели оптимизационных задач.*
- Для конкретной оптимизационной задачи не разрабатывается специальный метод решения. Существуют математические методы, предназначенные для решения любых оптимизационных задач - методы математического программирования. *Нужно знать эти методы математического программирования и уметь выбрать целесообразный метод для решения конкретной технической задачи.*


# Основные понятия и определения

- При проектировании и эксплуатации технических систем постоянно приходится решать задачи поиска наилучшего решения из некоторого множества допустимых решений. Такое решение называют *оптимальным*, процесс поиска такого решения - *оптимизацией*, а задачи, в которых ищется такое решение - *оптимизационными задачами*.
- Показатель, по величине которого оценивают, является ли решение оптимальным, называется *критерием оптимальности*. В качестве критерия оптимальности наиболее часто принимается *экономический критерий*, представляющий собой минимум затрат (финансовых, сырьевых, энергетических, трудовых) на реализацию поставленной задачи. При заданной или ограниченной величине указанных затрат экономический критерий выражается в получении максимальной прибыли.
- В электроэнергетике в зависимости от требований поставленной задачи могут приниматься и другие критерии оптимальности, в частности:
  - критерий надежности электроснабжения;
  - критерий качества электроэнергии;
  - критерий наименьшего отрицательного воздействия на окружающую среду (экологический критерий).



# Основные этапы

Решение оптимизационной задачи включает в себя следующие *этапы*:

1. Сбор исходной информации (исходных данных).
  2. Составление математической модели, под которой понимается формализованное математическое описание решаемой задачи.
  3. Выбор метода решения, определяемого видом математической модели.
  4. Выполнение математических вычислений, поручаемое, как правило, компьютеру.
  5. Анализ решения задачи.
- 

# 1. Сбор информации для оптимизационной задачи

- Исходная информация может быть определенной и однозначной. Такая информация и называется *определенной* или *детерминированной*.
- Исходная информация может носить случайный характер и подчиняться законам теории вероятностей. Такая информация и называется *случайной*.
- Исходная информация может носить неопределенный характер и не подчиняться законам теории вероятностей. Такая информация называется *неопределенной* или *недетерминированной*.

# 2. Математическая модель

- Формализованное математическое описание оптимизационной задачи, другими словами, математическая модель включает в себя:
  - целевую функцию;
  - ограничения;
  - граничные условия.
- *Целевая функция* представляет собой математическую запись критерия оптимальности. При решении оптимизационной задачи ищется экстремум целевой функции, например минимальные затраты или *максимальная* прибыль. Обобщенная запись целевой функции имеет следующий вид:

$$\underline{Z(x^1, x^2, \dots, x^n)} \rightarrow \text{extr}, (1.1)$$

где  $x^1, x^2, \dots, x^n$  – искомые переменные, значения которых вычисляются в процессе решения задачи; общее количество переменных равно  $n$ .

- Искомые переменные по своему характеру делятся на непрерывные, дискретные и целочисленные. Если переменная может принимать любые значения, такая переменная называется *непрерывной*.
- Если переменная может принимать только значения целых чисел, такая переменная называется *целочисленной*.
- Если переменная может принимать только определенные значения, такая переменная называется *дискретной*.

- Зависимость между переменными в целевой функции (1.1) может быть *линейной* или *нелинейной*. Напомним, что линейной называется такая зависимость, в которую переменные  $x^i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) входят только в первой степени и с этими переменными выполняются только действия сложения, вычитания и умножения на постоянный коэффициент. Во всех других случаях зависимость будет нелинейной.
- Нелинейная целевая функция в заданном диапазоне изменения переменных может иметь один экстремум или несколько экстремумов. В первом случае функция будет *одноэкстремальной*, во втором – *многоэкстремальной*. На рис. 1.1 приведены примеры одноэкстремальной (один минимум) и многоэкстремальной (два минимума и один максимум) функции  $Z(x)$  одной переменной в диапазоне изменения этой переменной  $d \leq x \leq D$ .





- *Ограничения* представляют собой различные технические, экономические, экологические условия, учитываемые при решении задачи. Ограничения представляют собой зависимости между переменными  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , задаваемые в форме неравенств или равенств

$$\begin{aligned} f^1(x^1, x^2, \dots, x^n) &\leq b^1; \\ f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) &= b^2; \end{aligned} \quad (1.2)$$

.....

$$f^m(x^1, x^2, \dots, x^n) > b^m.$$

- Общее количество ограничений равно  $m$ . Правые части ограничений, представляющие собой постоянные коэффициенты  $b^j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ), называются свободными членами.
- Как и в выражении целевой функции (1.1), зависимости между переменными в системе ограничений (1.2) могут быть линейными и нелинейными.

- **Граничные условия** устанавливают диапазон изменения искоемых переменных  $d^i \leq x^i \leq D^i, i=1, 2, \dots, n,$  (1.3), где  $d^i$  и  $D^i$  - соответственно нижняя и верхняя границы диапазона изменения переменной  $x^i$ .

- Наиболее часто в технических задачах все искоемые переменные, как правило, неотрицательны. В этом случае граничные условия имеют следующий вид:


$$x^i \geq 0, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3a)$$

- При наличии ограничений и граничных условий ищется уже не абсолютный, а **относительный экстремум целевой функции**. На рис. 1.2 показана некоторая функция одного переменного  $Z(x)$ . Указан диапазон изменения переменной  $x$  (нижняя граница  $d$  и верхняя граница  $D$ ). Видно, что абсолютный минимум функции соответствует точке 1, а относительный минимум – точке 2, принадлежащей заданному диапазону изменения переменной  $x$ .



# 3. Методы решения ОПТИМИЗАЦИОННЫХ задач

- Для решения подавляющего большинства оптимизационных задач используются методы *математического программирования*, позволяющие найти экстремальное значение целевой функции (1.1) при соотношениях между переменными, устанавливаемых ограничениями (1.2), в диапазоне изменения переменных, определяемом граничными условиями (1.3). Математическое программирование представляет собой, как правило, многократно повторяющуюся вычислительную процедуру, приводящую к искомому оптимальному решению.
- Если в математической модели имеются только линейные зависимости между переменными, для решения оптимизационной задачи используются методы *линейного программирования*.
- Если в математической модели имеются нелинейные зависимости между переменными, для решения оптимизационной задачи используются методы *нелинейного программирования*.
- Если среди переменных имеются целочисленные или дискретные переменные, для решения оптимизационных задач такого класса используются, соответственно, методы *целочисленного или дискретного программирования*.

- 
- В случае, когда исходные данные или их часть являются случайными величинами, решение оптимизационной задачи выполняется методами *стохастического программирования*.
  - При недетерминированной (неопределенной) исходной информации оптимизационные задачи могут быть решены с применением математического аппарата *теории игр*.
  - Задачи, в которых оптимизация проводится не по одному, а по нескольким критериям, относятся к классу задач *многокритериальной оптимизации*. Решение таких задач заключается в нахождении компромисса между принятыми критериями оптимальности.

# 4. Выполнение математических моделей

- Решение оптимизационных задач с небольшим количеством переменных  $x^i (i = 1, 2)$  при знании алгоритмов методов математического программирования можно выполнить традиционными вычислениями с использованием калькулятора.
- Решение реальных задач, размерность которых может быть достаточно большой, возможно только с помощью компьютера. При этом компьютер должен иметь соответствующее программное обеспечение.
- Инженер, непосредственно решающий оптимизационные задачи в области своей деятельности, должен уметь *пользоваться* существующим программным обеспечением современных компьютеров. От выделенного курсивом слова и произошел термин «пользователь».
- Появление такого мощного программного средства, как Excel 7.0, дает возможность пользователю решать практически любые оптимизационные задачи, совершенно различные по своему классу и содержанию.

# **Последовательность операций при решении оптимизационных задач с помощью программного обеспечения Excel следующая:**

- 1. Размещение комментариев и исходной информации в ячейках рабочего поля.
- 2. Вызов из главного меню МЛ команды «Сервис»; из содержания этой команды вызвать МЛ команду «Поиск решения»; на экране появляется диалоговое окно «Поиск решения»; в это диалоговое окно вводится исходная информация (адрес ячейки целевой функции, вид экстремума целевой функции, адреса ячеек искомых переменных, ограничения).
- 3. Активируется МЛ клавиша «Параметры»; автоматически раскрывается диалоговое окно «Параметры поиска решения». В это диалоговое окно вводится информация по алгоритму поиска решения и активируется МЛ клавиша «ОК», автоматически выполняется возврат к диалоговому окну «Поиск решения».
- 4. Получение решения. В диалоговом окне «Поиск решения» активируется МЛ клавиша «Выполнить»; компьютер выполняет вычисления; в ячейках рабочего поля появляются результаты решения; открывается диалоговое окно «Результаты поиска решения».

# 5. Анализ решения задачи

- Никогда не стоит принимать окончательное решение оптимизационной задачи без результатов ее анализа. В качестве главного средства анализа используется математическая модель, позволяющая выполнить параметрический, структурный и многокритериальный анализ задачи.
- *Параметрическим* называется такой анализ, при котором задача решается многократно при различных значениях некоторого исходного данного (параметра).
- При *структурном* анализе многократное решение задачи выполняется при различной структуре ограничений и граничных условий.
- Решение задачи по различным критериям (с различными целевыми функциями) составляет суть *многокритериального* анализа.
- Окончательное решение задачи принимается после исследования всех решений, полученных при параметрическом, структурном и многокритериальном анализах.

# Пример решения ОПТИМИЗАЦИОННОЙ задачи:

- В качестве примера составления математической модели рассмотрим *задачу распределения ресурсов*. Под ресурсами понимают, например финансы, энергию, сырье, необходимые для выпуска продукции и получения в конечном итоге прибыли. Естественно стремятся к максимальной прибыли при ограниченном количестве ресурсов.
- **Пример.** Определить максимальную прибыль предприятия, выпускающего продукцию в виде изделий трех видов ( $i = 1, 2, 3$ ). Для изготовления каждого  $i$ -го изделия требуются три вида ресурсов: энергетические, финансовые и сырьевые ( $j = 1, 2, 3$ ).
- **Исходные данные:**
  - наличие на предприятии каждого  $j$ -го ресурса  $b^j$ ;
  - норма расхода  $j$ -го ресурса на одно изделие  $i$ -го вида  $a^{ij}$ ;
  - прибыль  $z^i$  от реализации одного  $i$ -го изделия;
  - минимальное количество  $b^4$  всех видов изделий, которое предприятие должно выпустить.



- **Решение.** Обозначим искомые количества 1-го, 2-го и 3-го видов изделий через  $x^1$ ,  $x^2$  и  $x^3$ .
- Поскольку необходимо найти максимальную прибыль предприятия, этот экономический критерий и выразим целевой функцией. Прибыль от реализации изделий  $i$ -го вида есть произведение  $z^i x^i$ . Подлежащая максимизации суммарная прибыль от реализации трех видов изделий (целевая функция) будет иметь следующий вид:

$$Z = z^1 x^1 + z^2 x^2 + z^3 x^3 \rightarrow \max. \quad (1.4)$$

- Перейдем к составлению ограничений. Поскольку на одно изделие 1-го вида требуется  $a^{11}$  единиц энергии, на искомое количество  $x^1$  потребуется  $a^{11} x^1$  единиц энергии. Для искомых количеств изделий 2-го и 3-го видов потребуется соответственно  $a^{12} x^2$  и  $a^{13} x^3$  единиц энергии. Суммарный расход энергии на выпуск трех видов изделий составит  $a^{11} x^1 + a^{12} x^2 + a^{13} x^3$  единиц энергии. Эта величина ограничена наличием на предприятии энергетических ресурсов в количестве  $b^1$ . Таким образом, ограничение по энергетическим ресурсам будет иметь вид

$$a^{11} x^1 + a^{12} x^2 + a^{13} x^3 \leq b^1.$$

- Аналогично составляются ограничения по финансовым и сырьевым ресурсам.
- Ограничение минимального суммарного количества выпускаемых изделий запишется как  $x^1 + x^2 + x^3 \geq b^4$ .

- В итоге, вся система ограничений будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 a^{11}x^1 + a^{12}x^2 + a^{13}x^3 &\leq b^1, \\
 a^{21}x^1 + a^{22}x^2 + a^{23}x^3 &\leq b^2, \\
 a^{31}x^1 + a^{32}x^2 + a^{33}x^3 &\leq b^3, \\
 x^1 + x^2 + x^3 &\geq b^4.
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

- Поскольку количество изделий любого вида не может быть отрицательным числом, граничными условиями будут неотрицательные значения искомым переменных

$$x^i \geq 0, i = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

- Выражения (1.4), (1.5) и (1.6) представляют собой математическую модель поставленной оптимизационной задачи.
- Выражения (1.4) и (1.5) являются линейно зависимыми от искомым переменных  $x^i$ , следовательно, рассматриваемая оптимизационная задача относится к классу линейных задач, решаемых методами линейного программирования.



**СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ!**