2.2.5. Метод деления интервала пополам

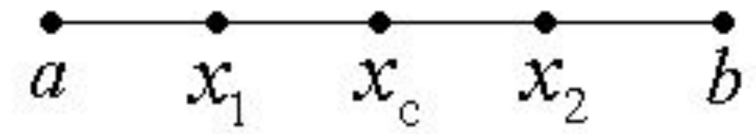
Метод относится к *последовательным стратегиям* и позволяет исключить из дальнейшего рассмотрения на каждой итерации в точности половину текущего интервала.

Задается начальный интервал неопределенности $[a, b]$ и требуемая точность поиска ε.

Реализация метода основана на выборе трех пробных точек, равномерно распределенных на текущем интервале (делящем его на четыре равные части).

Пусть $l = b - a$ длина интервала $[a, b]$.

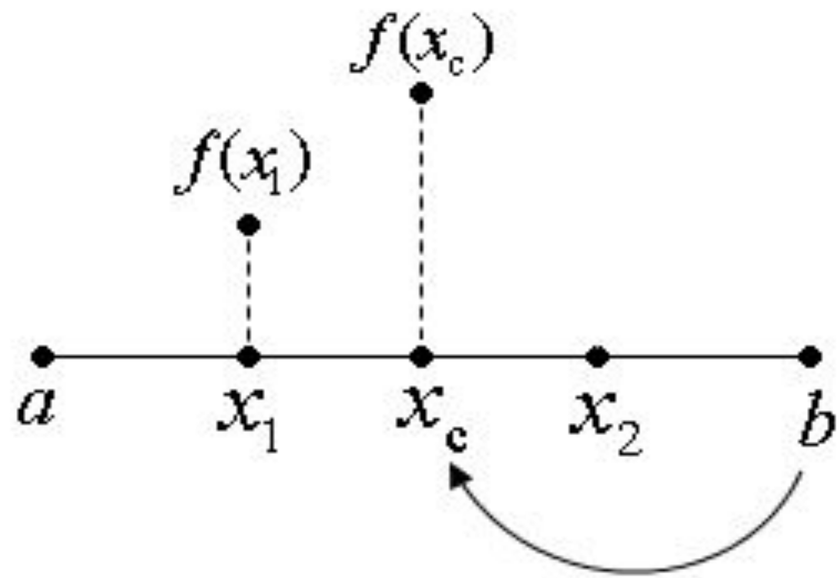
Разделим интервал $[a, b]$ точками x_1, x_{c} и x_2 на четыре равные части



$$x_1 = a + \frac{l}{4}; \quad x_{\text{c}} = \frac{a+b}{2}; \quad x_2 = b - \frac{l}{4}.$$

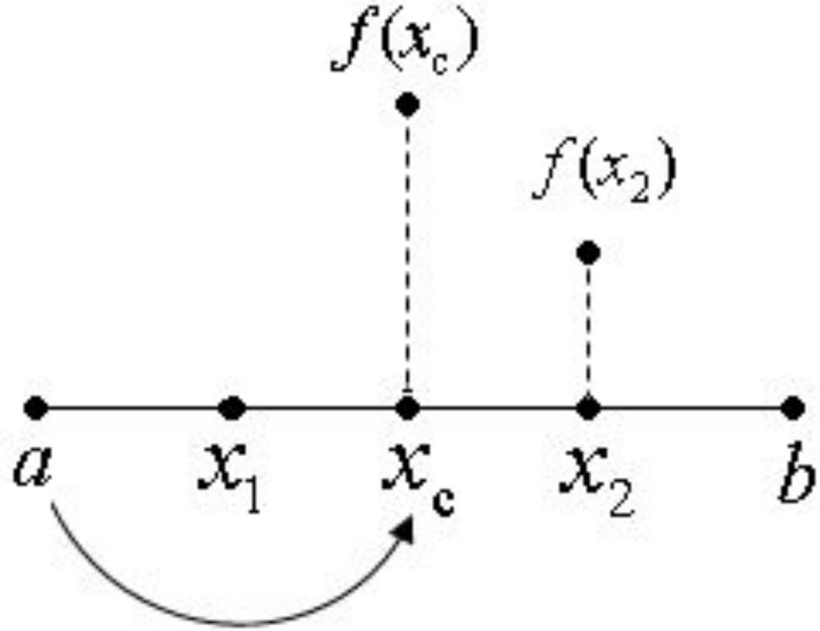
Вычисляются значения целевой функции $f(x_1),\ f(x_{\text{c}}),\ f(x_2)$.
Сравниваются полученные значения и находится новый интервал неопределенности следующим образом:

а) Если $f(x_1) < f(x_c)$, положить $b = x_c$.



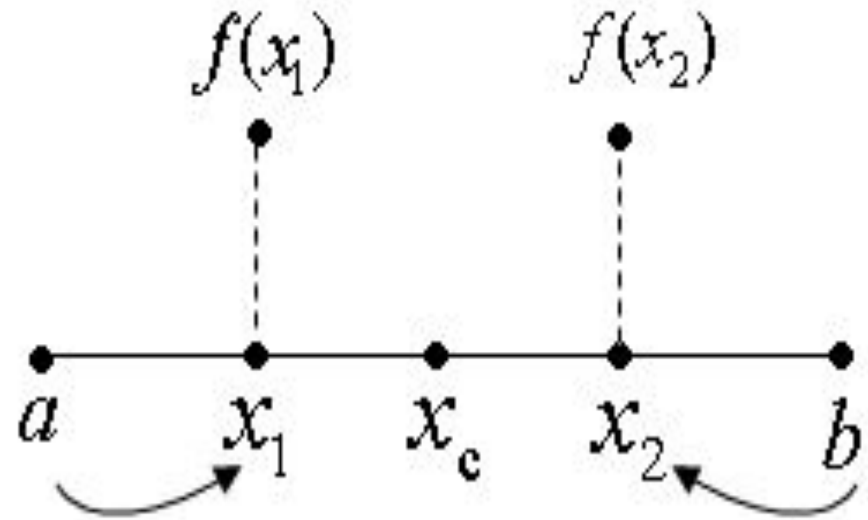
Средняя точка нового интервала $x_c = x_1$.

б) Если $f(x_2) < f(x_c)$, положить $a = x_c$.



Средняя точка нового интервала $x_c = x_2$.

в) Если $f(x_2)=f(x_c)$, положить $a = x_1,\ b = x_2$.



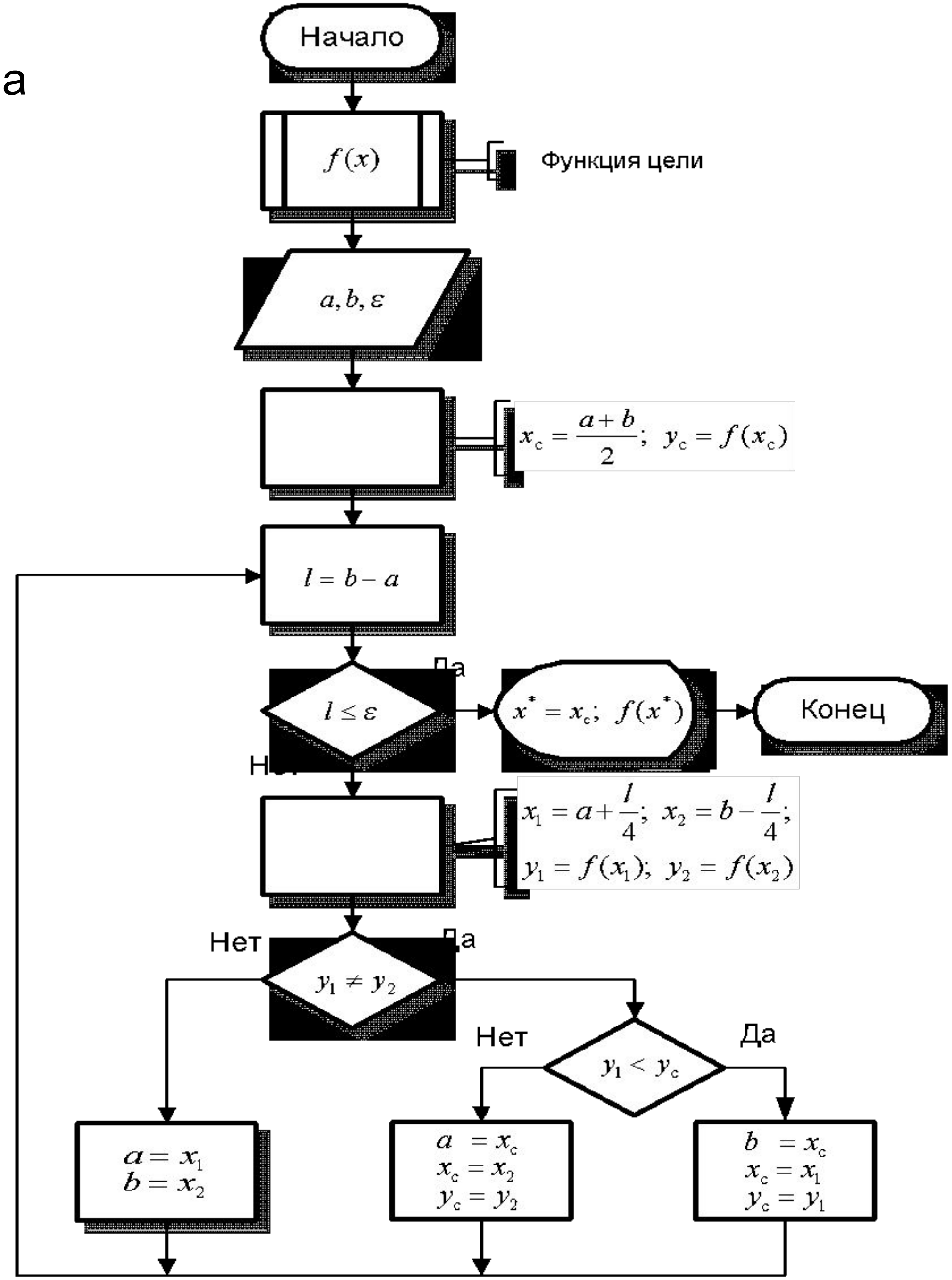
x_c - остается средней точкой нового интервала.

Затем снова вычисляются координаты x_1 и x_2 и продолжают поиск до выполнения условия

$$b - a \le \varepsilon.$$

За минимальное значение принимают $x^* = x_c$.

Блок-схема алгоритма



2.2.6. Метод золотого сечения

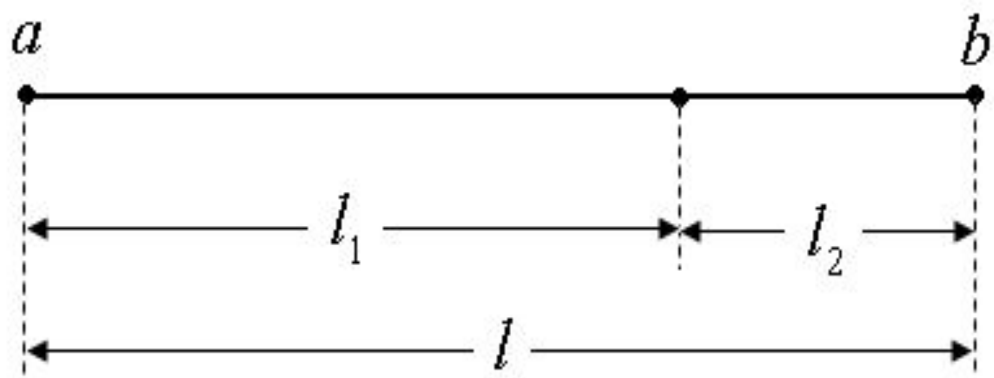
Метод относится к *последовательным стратегиям*.

Задается начальный интервал неопределенности $[a, b]$ и требуемая точность поиска ε.

В качестве точек вычисления целевой функции выбираются точки золотого сечения. Тогда с учетом свойств золотого сечения на каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление целевой функции.

Рассмотрим способ размещения точек золотого сечения на интервале $[a, b]$.

Пусть длина интервала равна l, а точка делит его на две части l_1 и l_2 $(l_1 > l_2, \;\; l = l_1 + l_2)$.



Термин золотое сечение ввел **Леонардо да Винчи**.

Точка называется золотым сечением отрезка l, если имеет место соотношение

$$\frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Отсюда

$$l_1^2 = l_2 \cdot l,$$

$$l_1^2 = l_2 (l_1 + l_2),$$

$$l_2^2 + l_2 \cdot l_1 - l_1^2 = 0,$$

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right) - 1 = 0,$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 \pm 2{,}236}{2}.$$

Так как нас интересует только положительное решение, то

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{-1 + 2{,}236}{2} = 0{,}618.$$

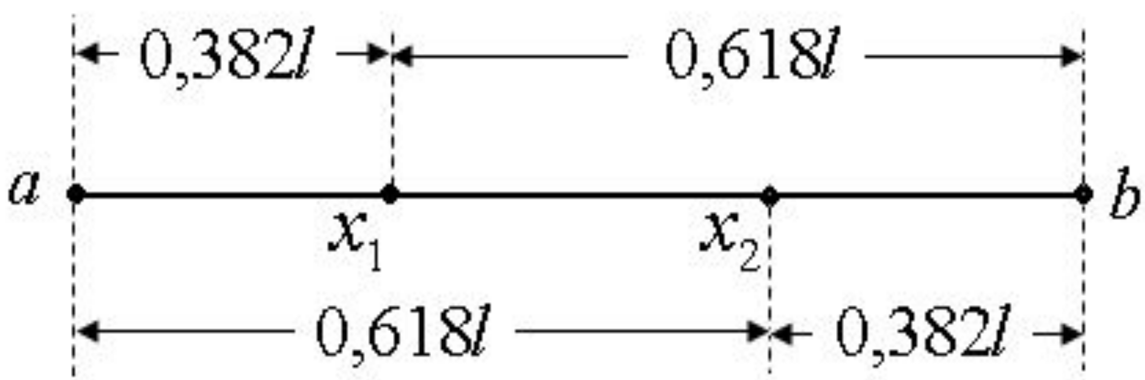
Из этого соотношения имеем

$$\frac{l_1}{l} = \frac{l_2}{l_1} = 0,618\,;$$

$$l_1 = 0,618 \cdot l\,;$$

$$l_2 = 0,618 \cdot l_1 = (\,0,618\,)^2 \cdot l = 0,382 \cdot l.$$

Поскольку заранее неизвестно, в какой последовательности ($l_1 > l_2$ или $l_1 < l_2$) делить интервал неопределенности, то рассматривают внутренние точки, соответствующие двум этим способам деления



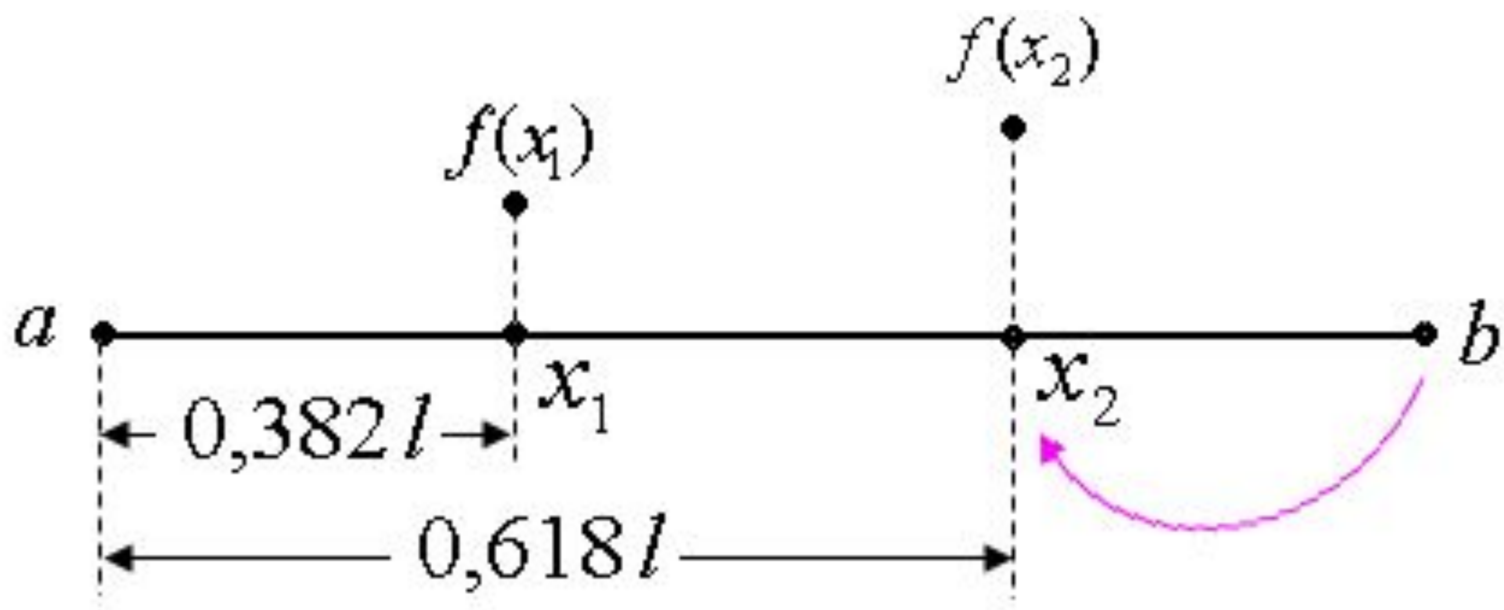
Точки деления x_1 и x_2 с учетом полученных значений

$$x_1 = a + 0{,}382(b - a),$$

$$x_2 = a + 0{,}618(b - a).$$

Новый уменьшенный интервал неопределенности выбирается следующим образом.

а) если $f(x_1) < f(x_2)$, то отрезком локализации точки минимума становится отрезок $[a, x_2]$.



Определим положение точки x_1 на интервале $[a, x_2]$.
Вычислим отношение

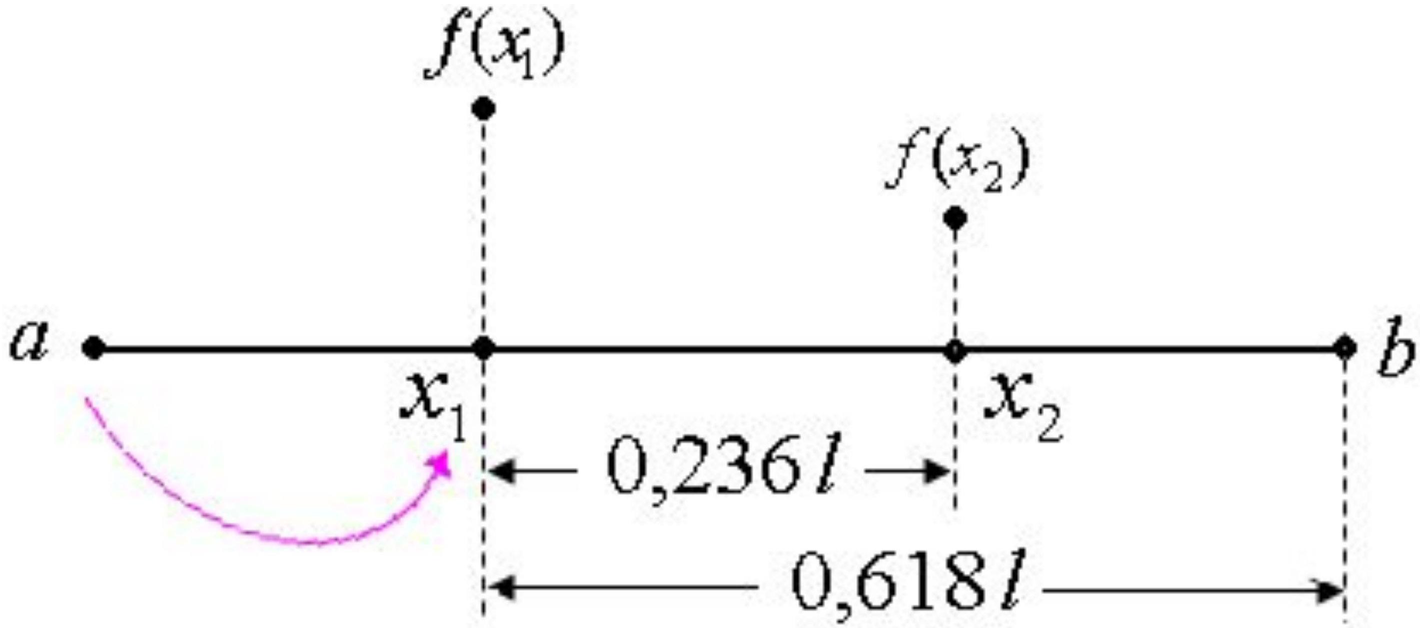
$$k = \frac{0,382\, l}{0,618\, l} = 0,618.$$

Следовательно точка x_1 является второй точкой золотого сечения отрезка $[a, x_2]$.

Положим

$$\begin{cases} b = x_2 \\ x_2 = x_1 \\ f(x_2) = f(x_1) \\ x_1 = a + 0,382 \cdot (b - a) \\ \text{Вычислить } f(x_1) \end{cases}$$

б) если $f(x_1) > f(x_2)$, то отрезком локализации точки минимума становится отрезок $[x_1, b]$



Определим положение точки x_2 на интервале $[x_1, b]$.

Вычислим отношение

$$k = \frac{0{,}236\,l}{0{,}618\,l} = 0{,}382.$$

Следовательно точка x_2 первая точка золотого сечения отрезка $[x_1, b]$.

Положим

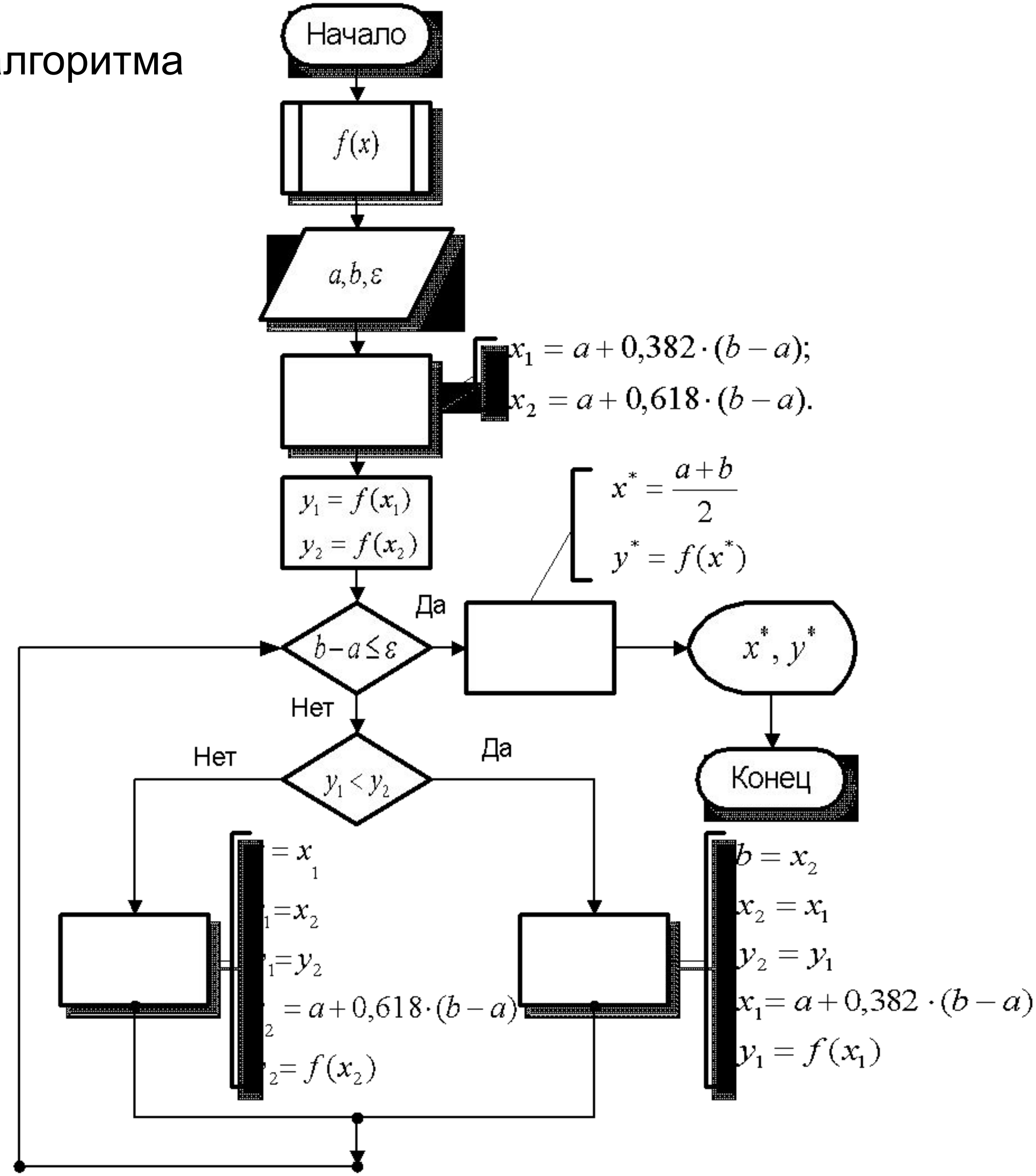
$$\begin{cases} a = x_1 \\ x_1 = x_2 \\ f(x_1) = f(x_2) \\ x_2 = a + 0{,}618 \cdot (b - a) \\ \text{Вычислить } f(x_2) \end{cases}$$

Процесс оптимизации заканчивается при выполнении условия $b - a \le \varepsilon.$

В качестве минимального значения берется середина последнего интервала

$$x^* = \frac{a+b}{2}.$$

Блок-схема алгоритма



При $n > 2$ эффективность метода золотого сечения выше, чем у метода дихотомии, так как при каждом последующем вычислении целевой функции интервал неопределенности уменьшается в $\tau = \frac{1}{0{,}618}$ раза.

За n итераций длина интервала будет равна $\frac{b-a}{\tau^n}$.

Точность на n шаге вычислений можно оценить неравенством $\frac{b-a}{\tau^n} \le \varepsilon$.

Отсюда следует, что для достижения требуемой точности требуется

$$n \ge \frac{\ln[(b-a)/\varepsilon]}{\ln \tau}$$

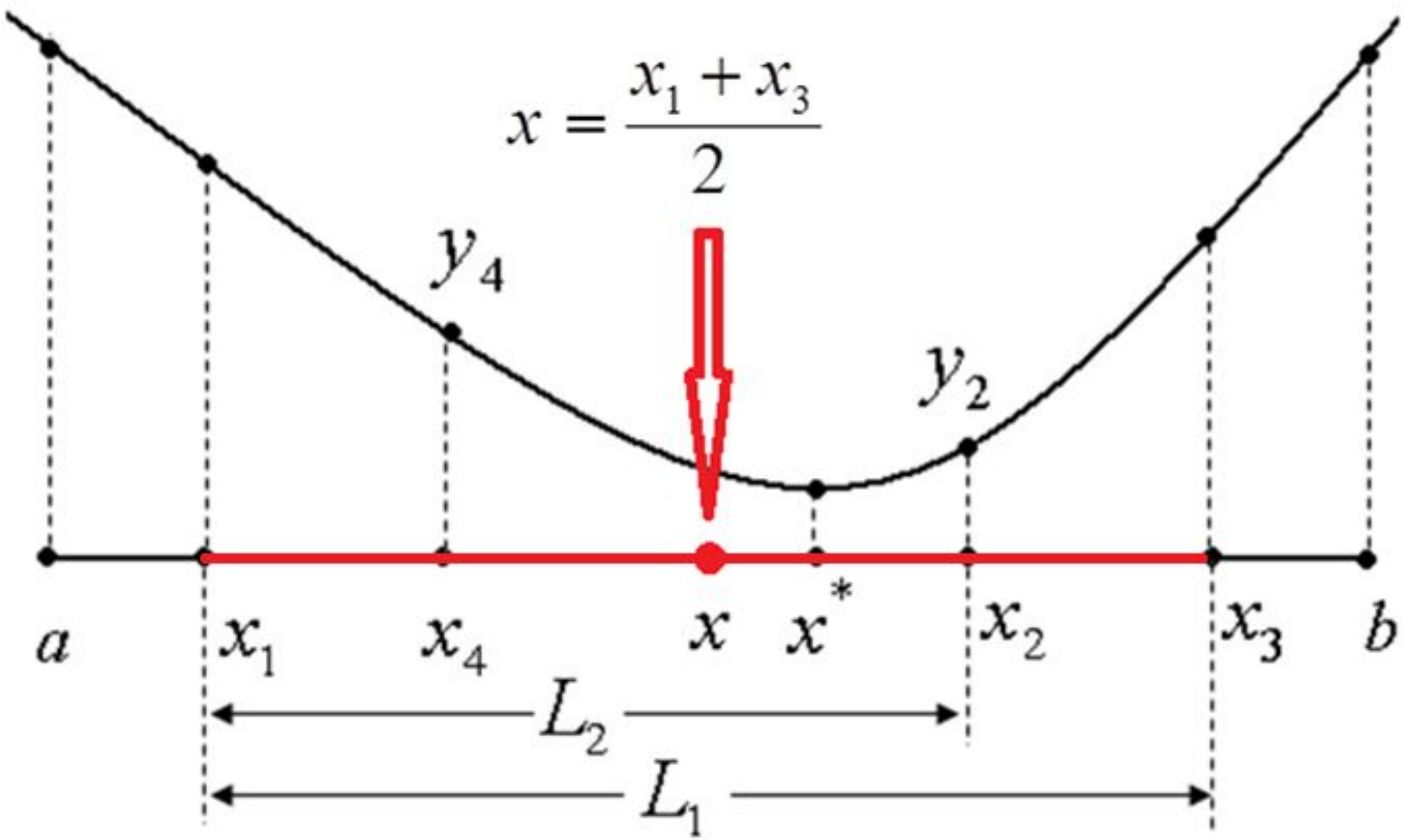
итераций.

2.2.7. Метод Фибоначчи

Метод Фибоначчи относится к последовательным стратегиям и обеспечивает максимальное сокращение интервала неопределенности при заданном количестве вычислений целевой функции.

Алгоритм поиска по методу Фибоначчи определяется тем же правилом симметрии, что и алгоритм по методу золотого сечения: на первой итерации выбираются две точки, расположенные симметрично внутри интервала неопределенности ; на каждой последующей итерации точка очередного вычисления выбирается симметрично оставшейся точки. Разница заключается в выборе точек.

Для простоты изложения алгоритма рассмотрим интервал неопределенности $[x_1, x_3] \subset [a, b]$. Обозначим через - длину L_1 интервала $[x_1, x_3]$.



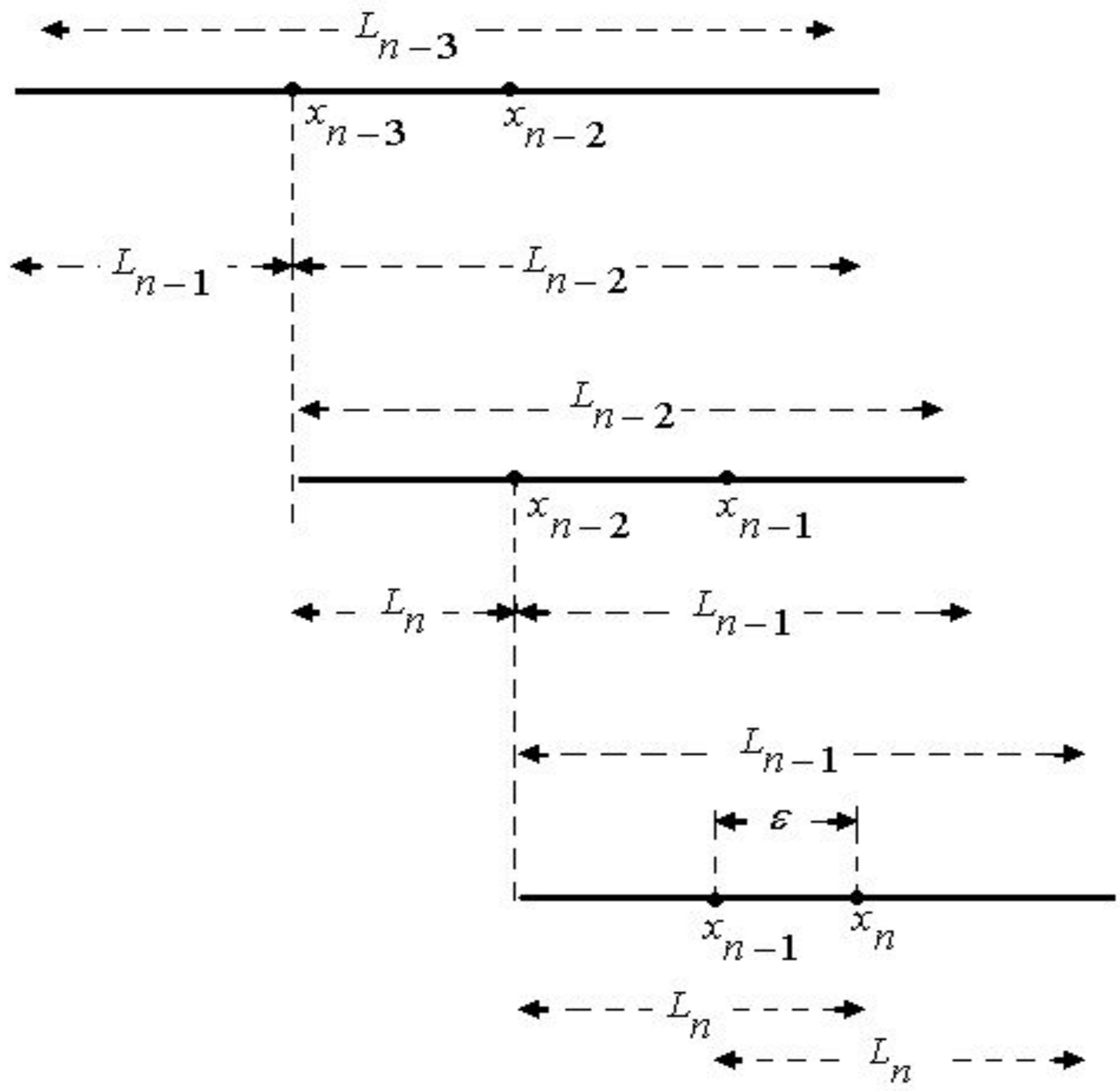
$x = \frac{x_1 + x_3}{2}$
y_4
y_2
a
x_1
x_4
x
x^*
x_2
x_3
b
L_2
L_1

Предположим, что на расстоянии L_2 от одного из концов интервала неопределенности $[x_1, x_3]$ помещена точка x_2. Вторая точка x_4 располагается симметрично относительно середины отрезка

$$x_4 = x - (x_2 - x) =$$
$$= 2x - x_2 =$$
$$= \frac{x_1 + x_3}{2} - \left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2} \right) = x_1 - x_2 + x_3.$$

Определим величину L_2. Для этого рассмотрим n - ю итерацию.

Для того, чтобы получить наибольшее уменьшение интервала неопределенности, расположим точки x_{n-1} и x_n на расстоянии $\varepsilon / 2$ по обе стороны от середины отрезка L_{n-1} (см. рисунок).



L_{n-3}
x_{n-3}
x_{n-2}
L_{n-1}
L_{n-2}
L_{n-2}
x_{n-2}
x_{n-1}
L_n
L_{n-1}
L_{n-1}
ε
x_{n-1}
x_n
L_n
L_n

Интервал неопределенности будет иметь длину L_n, следовательно $L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon.$
На предыдущем этапе точки x_{n-1} и x_{n-2} должны быть помещены симметрично внутри интервала $L_{n-2}.$ Следовательно

$$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n.$$

Аналогично $L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1}.$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
L_{n-1} &= 2L_n - \varepsilon, \\
L_{n-2} &= L_{n-1} + L_n = 3L_n - \varepsilon, \\
L_{n-3} &= L_{n-2} + L_{n-1} = 5L_n - 2\varepsilon, \\
L_{n-4} &= L_{n-3} + L_{n-2} = 8L_n - 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

и так далее.

Общее выражение для произвольного интервала неопределенности имеет вид

$$L_{n-j} = F_{j+1} L_n - F_{j-1} \varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (2.2)$$

где коэффициенты F_j называются числами Фибоначчи и определяются следующим образом

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2},$$

$$k = 2, 3, \ldots$$

Последовательность чисел Фибоначчи имеет вид

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Пусть начальный интервал неопределенности имеет длину $L_1 = b - a \quad (a = x_1, b = x_3)$ Через числа Фибоначчи выражение для определения L_1 можно получить из выражения (2.2), полагая $j = n - 1.$ $L_1 = F_n L_n - F_{n-2}\varepsilon.$

Из последнего выражения найдем длину интервала неопределенности на n -й итерации

$$L_n = \frac{L_1}{F_n} + \frac{F_{n-2}}{F_n}\varepsilon.$$

Далее, используя выражение (2.2), находим положение первой точки $x_2,$ которая помещается на расстоянии L_2 от одного из концов начального интервала.

При $j = n - 2,$ получим

$$L_2 = F_{n-1} L_n - F_{n-3}\varepsilon =$$

$$= F_{n-1}\left(\frac{L_1}{F_n} + \frac{F_{n-2}}{F_n}\varepsilon\right) - F_{n-3}\varepsilon =$$

$$= \frac{F_{n-1}}{F_n} L_1 + \varepsilon\,\frac{\underbrace{F_{n-1}F_{n-2} - F_n F_{n-3}}_{(-1)^n}}{F_n} =$$

$$= \frac{F_{n-1}}{F_n}(b - a) + (-1)^n \frac{\varepsilon}{F_n}.$$

Используемое значение ε определяется из условия

$$\varepsilon < \frac{b-a}{F_n}.$$

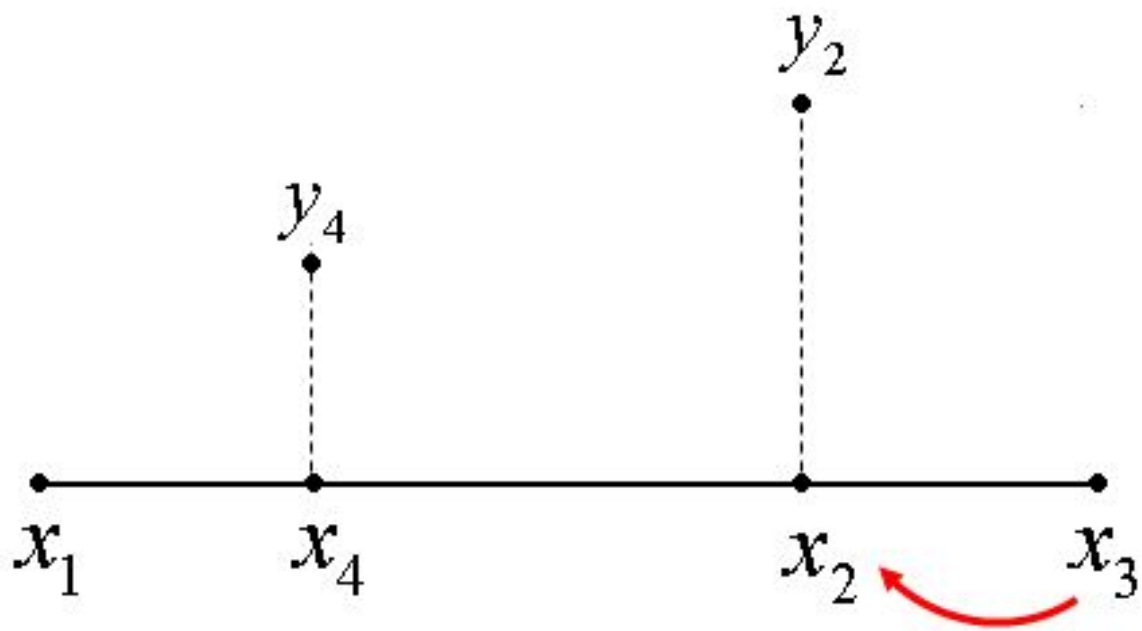
После того как найдено положение первой точки, числа Фибоначчи больше не используются.

Приведем дальнейшую схему вычисления интервала неопределенности.

Вычислим $y_2 = f(x_2),\ y_4 = f(x_4).$

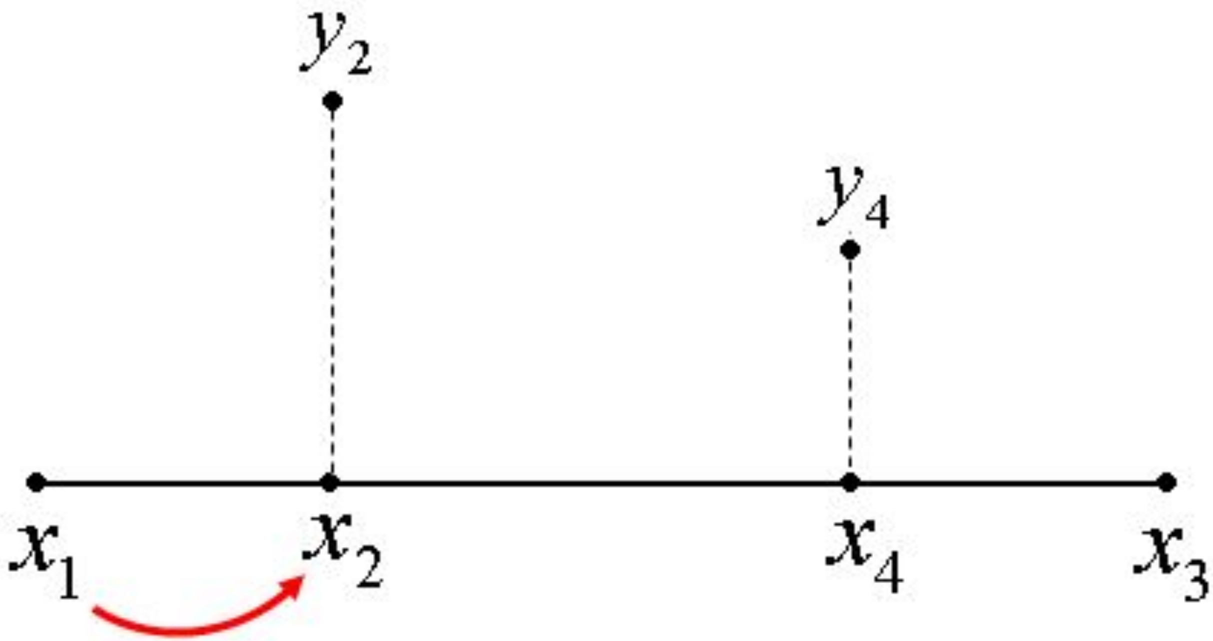
а) если $\begin{cases} x_4 < x_2 \\ y_4 < y_2 \end{cases}$ положить

$$x_3 = x_2, x_2 = x_4, y_2 = y_4$$

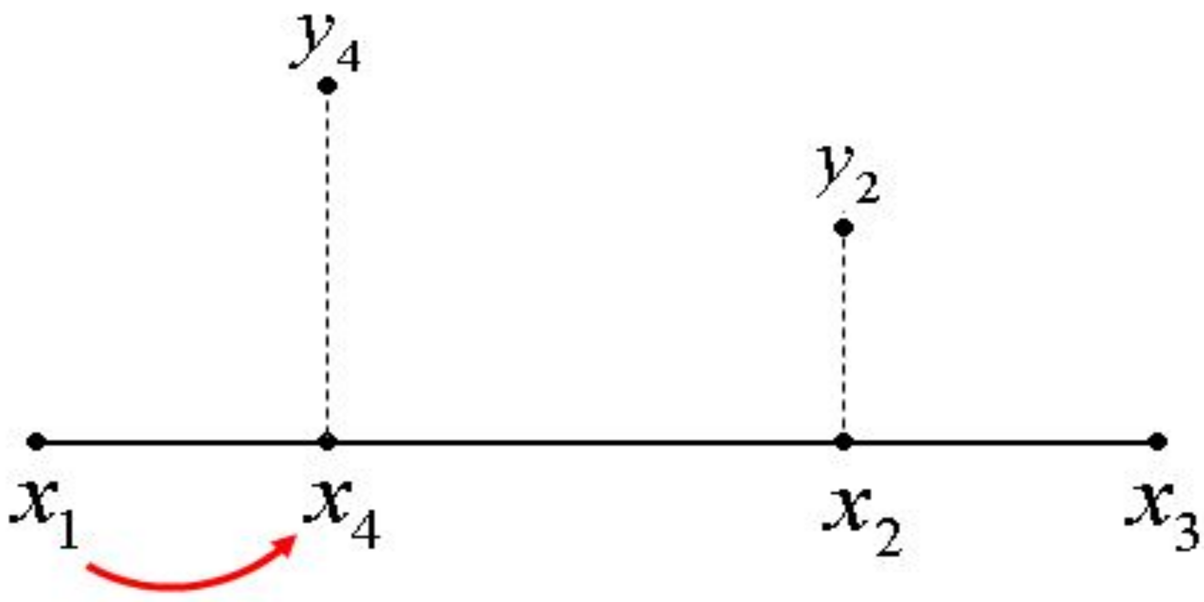


б) если $\begin{cases} x_4 > x_2 \\ y_4 < y_2 \end{cases}$ положить

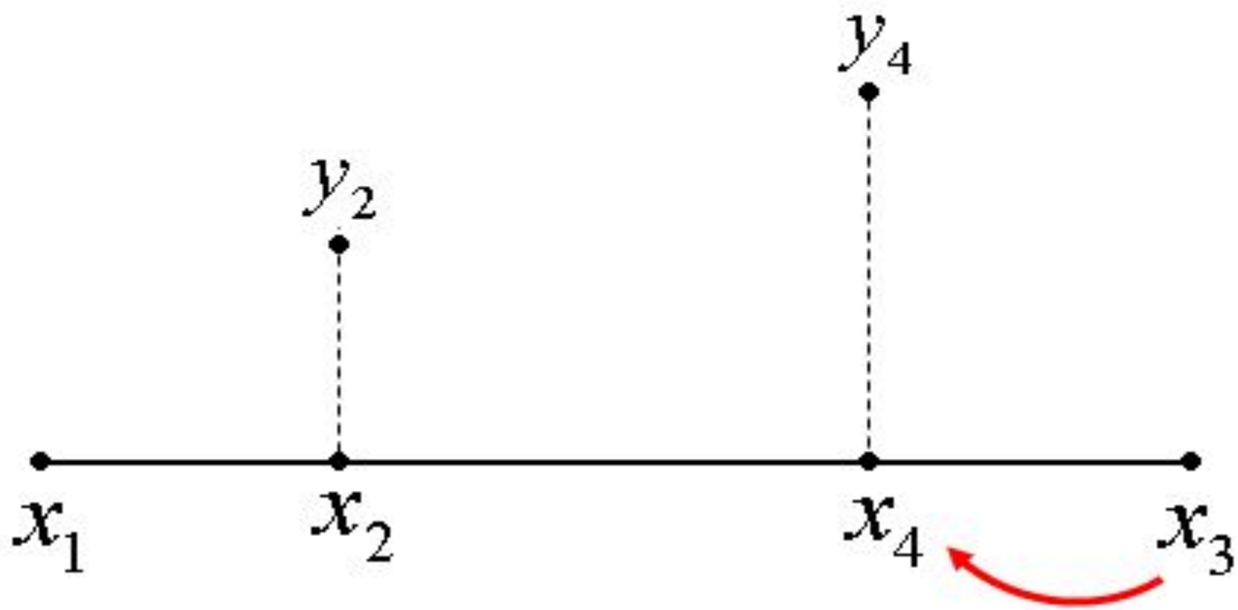
$$x_1 = x_2, x_2 = x_4, y_2 = y_4$$



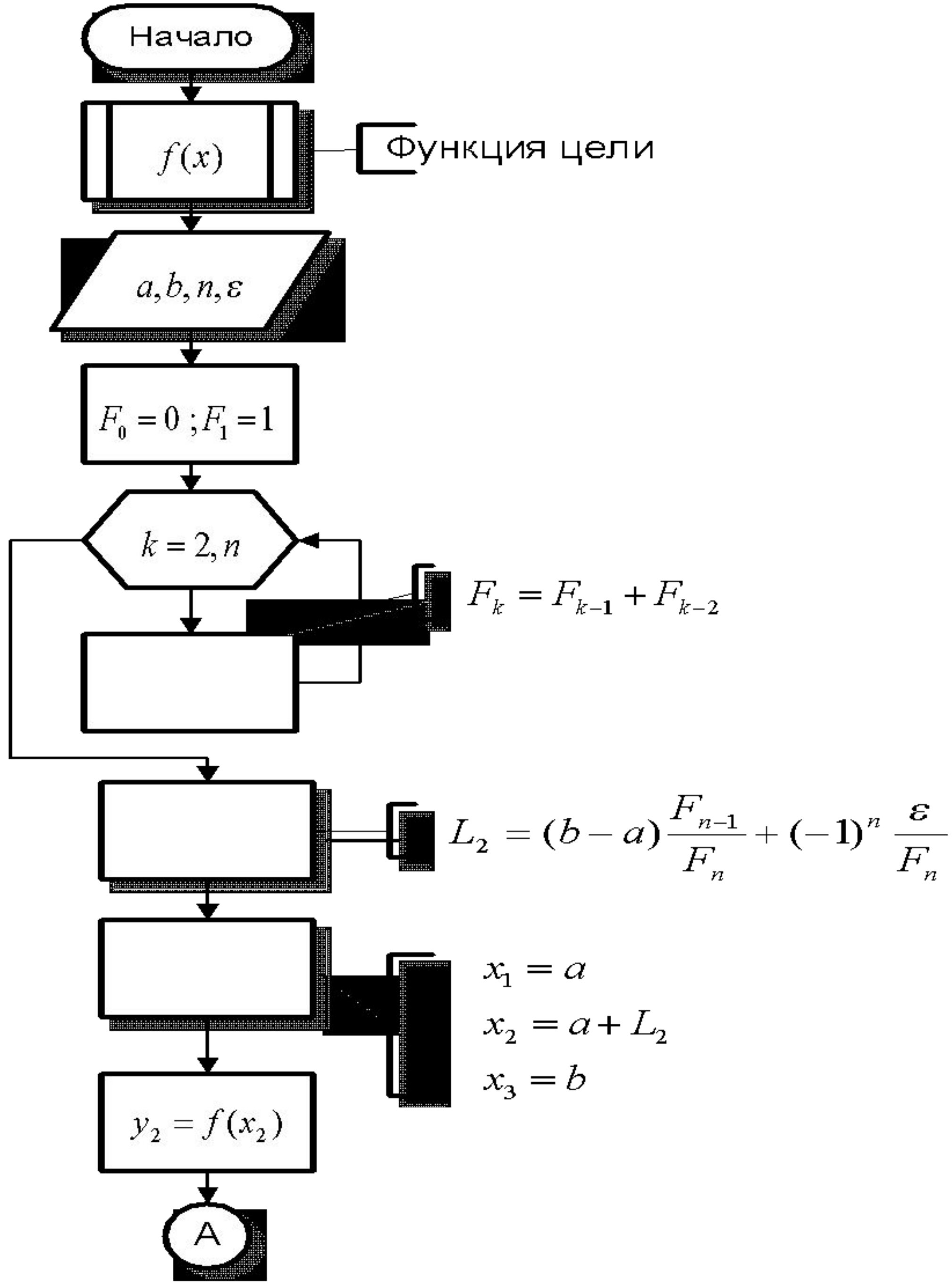
в) если $\begin{cases} x_4 < x_2 \\ y_4 > y_2 \end{cases}$ положить $x_1 = x_4$

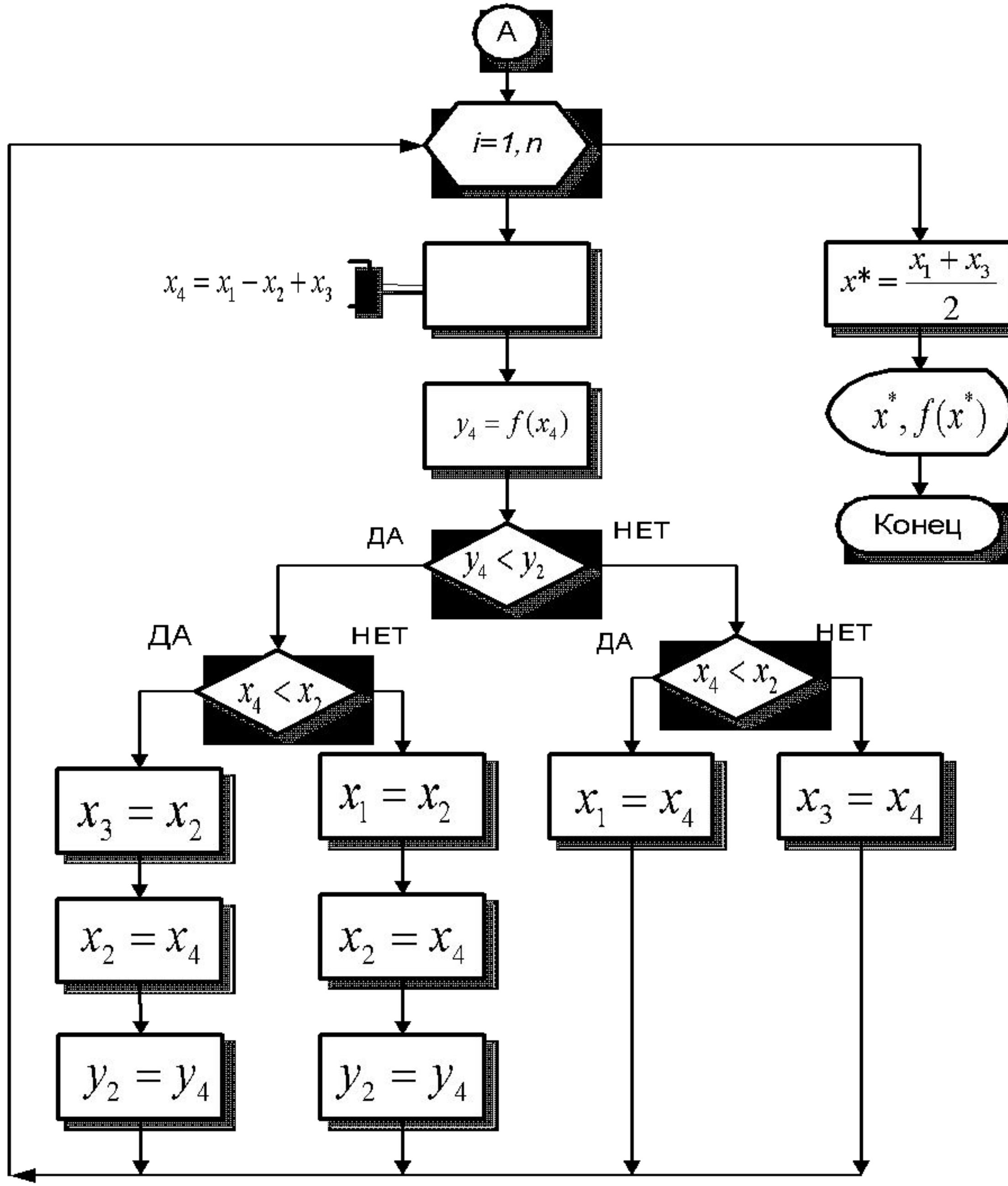


г) если $\begin{cases} x_4 > x_2 \\ y_4 > y_2 \end{cases}$ положить $x_3 = x_4$



Блок-схема алгоритма




A
i=1, n
$x_4 = x_1 - x_2 + x_3$
$y_4 = f(x_4)$
ДА
НЕТ
$y_4 < y_2$
ДА
НЕТ
$x_4 < x_2$
ДА
НЕТ
$x_4 < x_2$
$x_3 = x_2$
$x_2 = x_4$
$y_2 = y_4$
$x_1 = x_2$
$x_2 = x_4$
$y_2 = y_4$
$x_1 = x_4$
$x_3 = x_4$
$x^* = \frac{x_1 + x_3}{2}$
$x^*, f(x^*)$
Конец

Заметим, что при достаточно больших n значение

$$\frac{F_{n-1}}{F_n}$$

стремится к 0.618, так что методы Фибоначчи и золотого сечения становятся асимптотически эквивалентными

Сравнение методов уменьшения интервала неопределенности

ε	МРП	МД	МДИП	МФ	МЗС
10^{-1}	19	8	5	6	6
10^{-2}	199	14	8	11	11
10^{-3}	1999	20	11	16	16
10^{-4}	19999	28	15	20	21
10^{-5}	199999	34	18	25	25
10^{-6}	1999999	40	21	30	30
10^{-7}	19999999	48	25	35	35
10^{-8}	199999999	54	28	39	40
10^{-9}	1999999999	60	31	44	45
10^{-10}	19999999999	68	35	49	49

МРП - метод равномерного поиска
МД - метода дихотомии
МДИП - метод деления интервала пополам
МФ - метод Фибоначчи
МЗС - метод золотого сечения

2.2.8. Метод квадратичной аппроксимации

Основная идея метода связана с возможностью аппроксимации гладкой функции полиномом и последующего использования аппроксимирующего полинома для оценивания координат точки минимума.

Пусть известны значения целевой функции $f(x)$ в трех различных точках x_1, x_2, x_3, равные соответственно $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ y_3 = f(x_3)$.

Запишем интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2). \qquad (2.2)$$

Вычислим значения $\varphi(x)$ в каждой из трех точек

x_1, x_2, x_3.

При $x = x_1 \rightarrow a_0 = y_1,$ (2.3)

при $x = x_2 \rightarrow y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_1),$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (2.4)$$

при $x = x_3,$

$$\varphi(x_3) = a_0 + a_1(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Разрешая последнее уравнение относительно a_2, получим

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - a_1\right). \qquad (2.5)$$

Из уравнения (2.2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_1 + a_2(x - x_2) + a_2(x - x_1) = 0.$$

находим точку

$$\bar{x} = \frac{x_1 - x_2}{2} - \frac{a_1}{2a_2}. \qquad (2.6)$$

Поскольку аппроксимирующий квадратичный полином является унимодальной функцией, то коэффициент a_2 при старшем члене $\varphi(x)$ будет положителен.

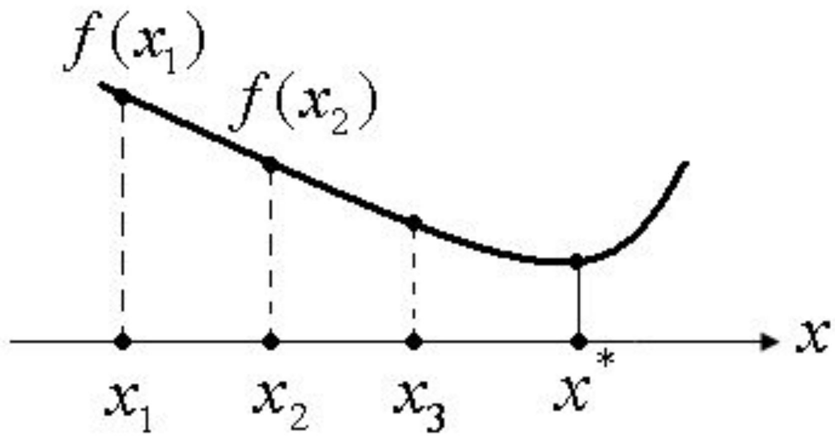
Следовательно, в точке $\bar{x}$ полином $\varphi(x)$ *имеет локальный минимум*.

Рассмотрим алгоритм квадратичной интерполяции, называемый методом Пауэлла.

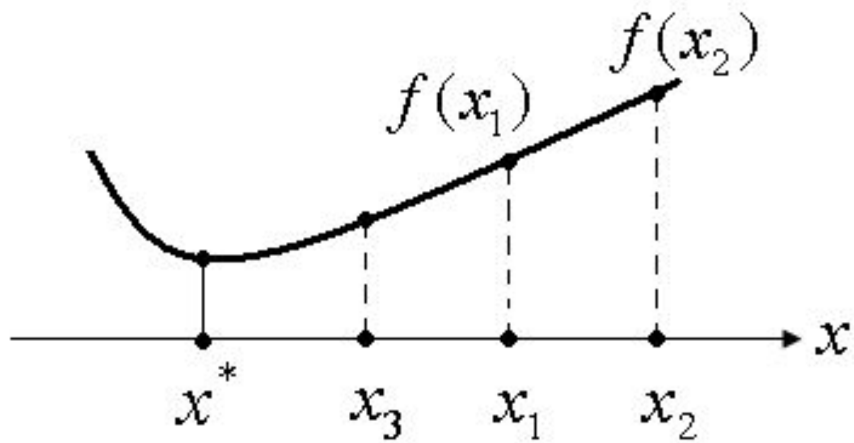
Пусть x_1 – начальная точка, Δx - величина шага по оси x и $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – числа, характеризующие точность поиска.

1. Вычислить точку $x_2 = x_1 + \Delta x$.
2. Вычислить значения целевой функции в точках x_1, x_2 : $y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$.
3. Сравнить значения $f(x_1),\ f(x_2)$ и найти точку x_3 так, чтобы точки x_1, x_2, x_3 были как можно ближе к искомой точке минимума.

а) если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x_3 = x_1 + 2\Delta x$



б) если $f(x_1) < f(x_2)$, то $x_3 = x_1 - \Delta x$



4. Вычислить $y_3 = f(x_3)$.

5. Найти $F_{\min} = \{f(x_1) \quad f(x_2) \quad f(x_3)\}$, $x_{\min} = x_i$, $f(x_i) = F_{\min}$.

6. По трем точкам x_1, x_2, x_3 вычислить $\bar{x}$, используя формулу (2.6) и величину $f(\bar{x})$.

Если знаменатель в формуле (2.6) на некоторой итерации обращается в нуль, то результатом интерполяции будет прямая. В этом случае рекомендуется обозначить $x_1 = x_{\min}$ и перейти к пункту 1.

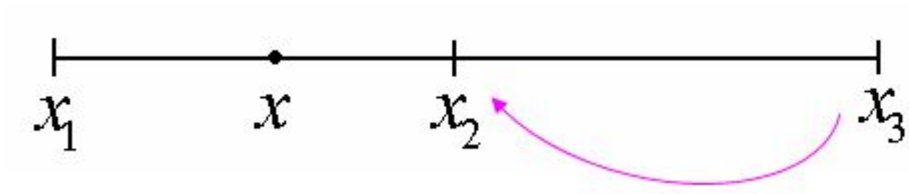
6. Проверить условие окончания процесса вычислений

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| \le \varepsilon_1, \quad \left[\frac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right] \le \varepsilon_2.$$

Если оба условия выполнены, то поиск закончен и $x^* = \bar{x}.$ В противном случае выбрать наилучшую точку ($x_{\min}$ или $\bar{\boldsymbol{x}}$) и две точки по обе стороны от нее. Обозначить их в естественном порядке и перейти к пункту 5.

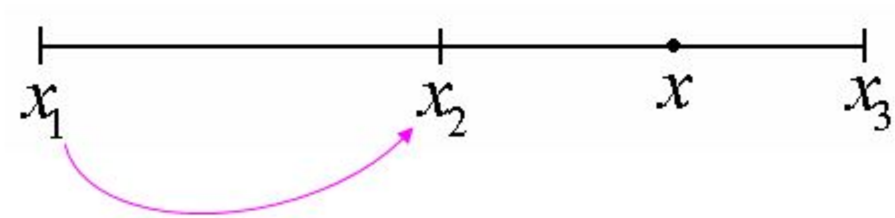
Выбор двух точек слева и справа от наилучшей точки x ($x = x_{\min}$ или $x = x$) осуществляется следующим образом:

а) если точка x находится между точками x_1 и x_2,



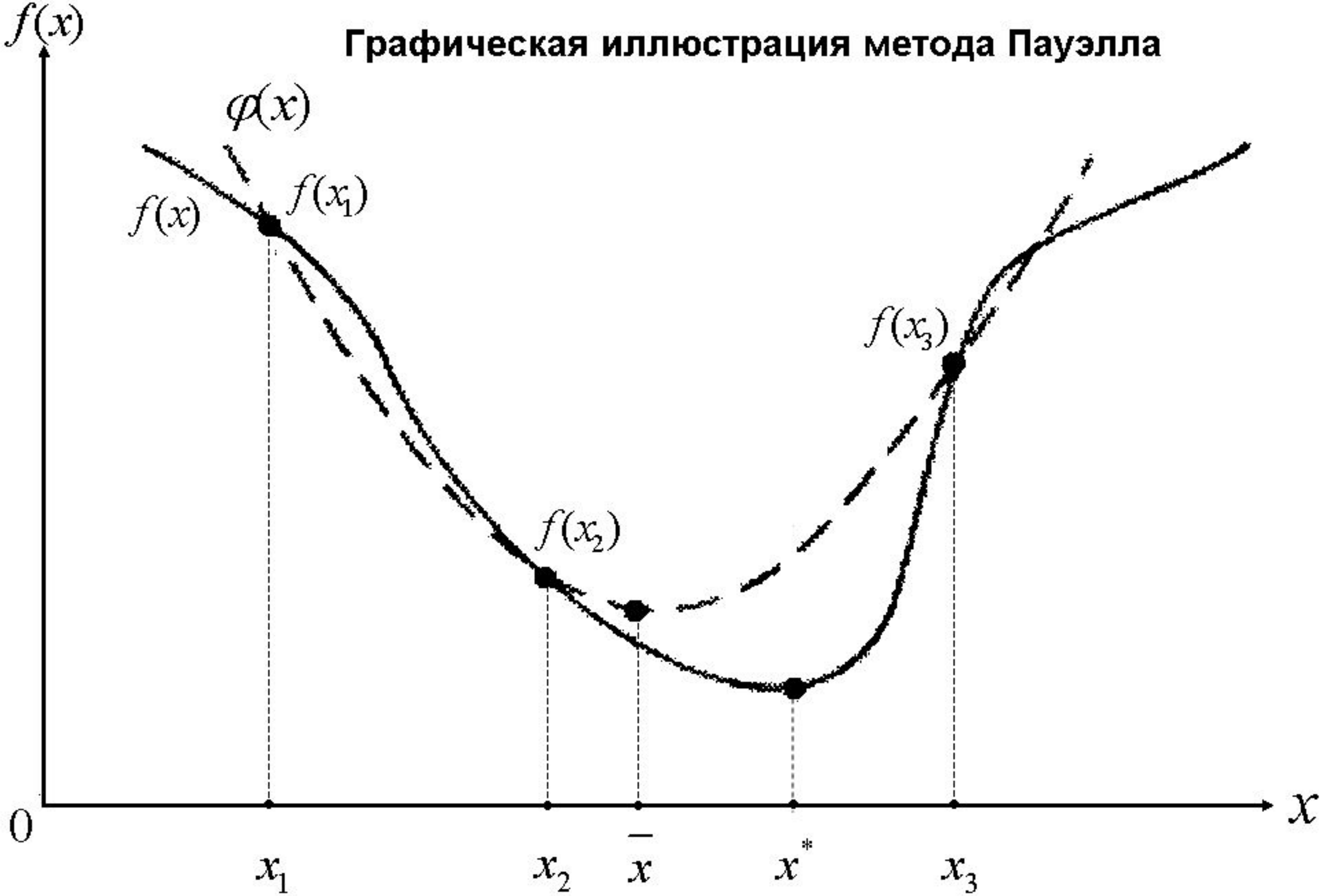
то $x_3 = x_2,\ y_3 = y_2,\ x_2 = x;$

б) если точка x находится между точками x_2 и x_3,

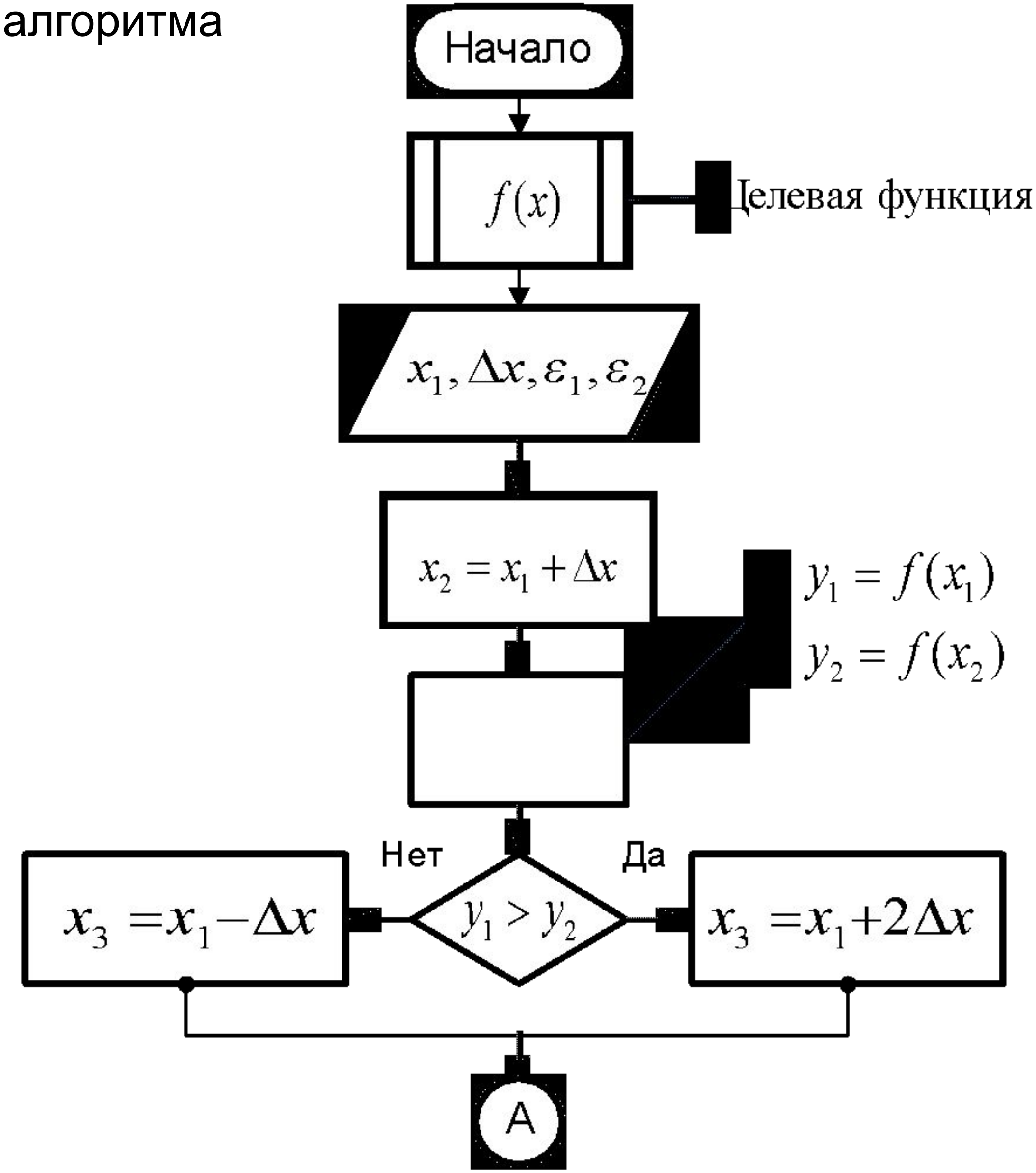


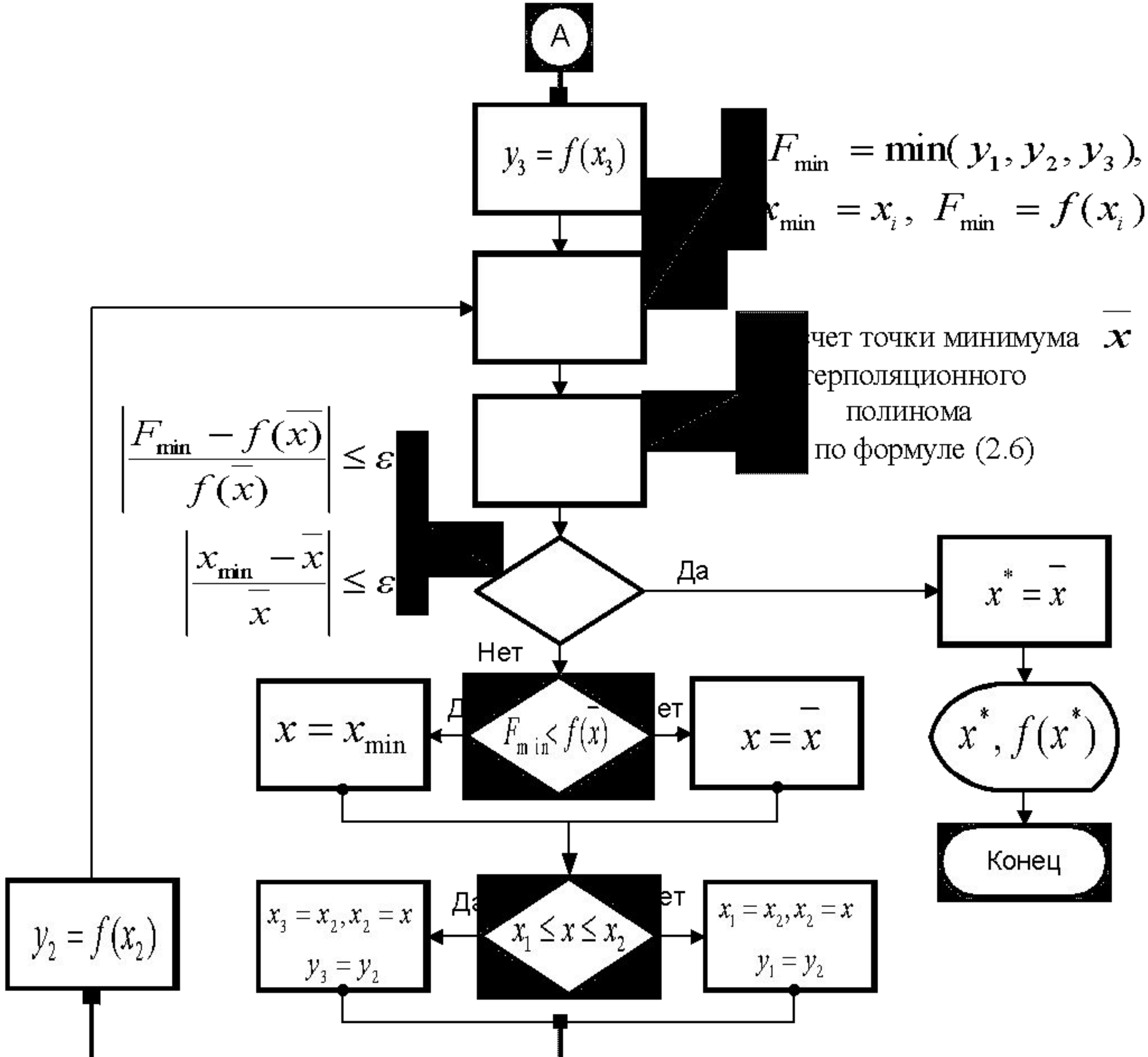
то $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ x_2 = x.$

Графическая иллюстрация метода Пауэлла



Блок-схема алгоритма





A
$y_3 = f(x_3)$
$F_{\min} = \min(y_1, y_2, y_3)$,
$x_{\min} = x_i$, $F_{\min} = f(x_i)$
точки минимума $\bar{x}$
полинома
по формуле (2.6)
$\left|\dfrac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| \le \varepsilon$
$\left|\dfrac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| \le \varepsilon$
Да
$x^* = \bar{x}$
Нет
$F_{\min} < f(\bar{x})$
$x = x_{\min}$
$x = \bar{x}$
$x^*, f(x^*)$
Конец
$x_1 \le x \le x_2$
$x_3 = x_2, x_2 = x$
$y_3 = y_2$
$x_1 = x_2, x_2 = x$
$y_1 = y_2$
$y_2 = f(x_2)$

Пример 2.3. Минимизировать функцию

$$f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x}$$

методом Пауэлла с точностью $\varepsilon_1 = 0{,}003,\ \varepsilon_2 = 0{,}03.$

Решение. Зададим начальную точку $x_1 = 1$ и величину шага $\Delta x = 1.$

Итерация 1. Вычислим $x_2 = x_1 + \Delta x = 2$ и $f(x_1) = 18,\ f(x_2) = 16.$
Так как $f(x_1) > f(x_2),$ то положим $x_3 = x_1 + 2\Delta x = 1 + 2 = 3.$
Вычислим $f(x_3) = 23{,}33.$
Найдем $F_{\min} = (18; 16; 23{,}33) = 16,\quad x_{\min} = x_2 = 2.$
По формулам (2.4) и (2.5) найдем $a_1 = -2,\ a_2 = 4{,}665.$
По формуле (2.6) вычислим точку интерполяционного полинома $\bar{x} = 1{,}714$ и величину целевой функции $f(\bar{x}) = 15{,}21.$

Проверим условие окончания поиска

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| = \left|\frac{16 - 15{,}21}{15{,}21}\right| = 0{,}0519 > 0{,}003$$ (не выполняется),

следовательно продолжаем поиск. Учитывая, что $F_{\min} > f(\bar{x})$ выбираем $\bar{x} = 1{,}714$ как наилучшую точку. Слева от нее $x_1 = 1,$ а справа $x_3 = 2.$

Обозначим их в естественном порядке $x_1 = 1;\ x_2 = 1{,}714;\ x_3 = 2.$

Этим точкам соответствуют значения целевой функции

$$f(x_1) = 18;\quad f(x_2) = 15{,}21;\quad f(x_3) = 16.$$

Итерация 2. $F_{\min} = (18;\ 15{,}21;\ 16) = 15{,}21;\ x_{\min} = 1{,}714.$

По формулам (2.4) и (2.5) найдем $a_1 = -3{,}908;\ a_2 = 6{,}671.$

По формуле (2.6) вычислим точку интерполяционного полинома

$\bar{x} = 1{,}650$ и величину целевой функции $f(\bar{x}) = 15{,}142.$

Проверим условие окончания поиска

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| = \left|\frac{15{,}21 - 15{,}142}{15{,}142}\right| = 0{,}0045 > 0{,}003$$

- условие не выполняется.

Выбираем $\bar{x} = 1{,}65$ как наилучшую точку. Слева от нее $x_1 = 1,$ а справа $x_3 = 1{,}714.$

Обозначим их в естественном порядке $x_1 = 1;\ x_2 = 1{,}65;\ x_3 = 1{,}714.$

Этим точкам соответствуют значения целевой функции

$$f(x_1) = 18;\quad f(x_2) = 15{,}142;\quad f(x_3) = 15{,}21.$$

Итерация 3. $F_{\min} = (18; 15{,}142; 15{,}21) = 15{,}142; \ x_{\min} = x_2 = 1{,}65.$

По формулам (2.4) и (2.5) найдем $a_1 = -4{,}397; \ a_2 = 7{,}647.$

По формуле (2.6) вычислим точку интерполяционного полинома

$\bar{x} = 1{,}6125$ и величину целевой функции $f(\bar{x}) = 15{,}123.$

Проверим условие окончания поиска

$$\left|\frac{F_{\min} - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| = \left|\frac{15{,}142 - 15{,}123}{15{,}123}\right| = 0{,}0013 < 0{,}003;$$

$$\left|\frac{x_{\min} - \bar{x}}{\bar{x}}\right| = \left|\frac{1{,}65 - 1{,}6125}{1{,}6125}\right| = 0{,}023 < 0{,}03.$$

Следовательно, поиск закончен. Решение

$$x^* = \bar{x} = 1{,}6125; f(x^*) = 15{,}123.$$

Найдем аналитически координату точки минимума

$$\frac{df(x)}{dx} = 4x - \frac{16}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 4 \;\rightarrow\; x^* = \sqrt[3]{4} = 1{,}5874.$$

Проверим выполнение достаточного условия экстремума

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 4 + \frac{32}{x^3}.$$

В точке $x^* = 1{,}5874$ выполняется условие $\dfrac{d^2 f(x^*)}{dx^2} = 12 > 0$

- следовательно целевая функция в данной точке имеет минимум.

Графическая иллюстрация примера 2.3