

# §4. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

## **4.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ**



**В алгебре логики высказывания рассматриваются как единый объект с точки зрения истинности или ложности. Структура и содержание высказываний не рассматриваются.**

**Однако на практике для построения полноценного логического вывода важно иметь представление о структуре и содержании используемых в выводе высказываний.**

**Поэтому логика предикатов является, по сути, расширением логики высказывания, которую включает в себя в качестве составной части.**

**Определение. Одноместным предикатом**  
 $P(x)$  называется произвольная функция  
переменной  $x$ , определенная на множестве  $M$  и  
принимающая значение из множества  $\{0, 1\}$ .

**Определение.** Предикатом  $P$  называется  $n$ -местная функция, определенная на произвольном множестве  $M$  и принимающая в качестве значений элементы из двухэлементного множества  $\{0, 1\}$ , где  $0$  и  $1$  интерпретируются как ложь и истина соответственно.

Выражение вида  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можно трактовать так, что переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  связаны отношением  $P$ .

**Используя функциональную форму записи для предикатов, можно сказать, что предикатом  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется функция  $P:M^n \rightarrow B$ , где  $B$  – двоичное множество, а  $M$  – произвольное множество.**

Таким образом,  $n$ -местный предикат, – это двузначная функция от  $n$  аргументов, определенная на произвольном множестве  $M$ , принимающая значение  $0$  или  $1$  (которые интерпретируются как ложь и истина соответственно).

Область определения  $M$  называется **предметной областью** предиката, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – **предметными переменными**.

**Возможность описывать с помощью предикатов не только функции, но и отношения, определяется следующим:**

**а) если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – элементы множества  $M$ , то каждому  $n$  - местному отношению  $R$  соответствует предикат  $P$  такой, что**

**$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$  тогда и только тогда, когда**

**$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ ;**

**б) всякий предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определяет отношение  $R$ , такое, что  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ , если и только если  $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ . При этом  $R$  задает область истинности предиката  $P$ .**



**Предикат можно поставить в соответствие и непрерывной функции типа  $F:M^n \rightarrow M$ .**

**Такой функции можно поставить в соответствие  $(n + 1)$  - местный предикат  $P$  такой, что  $P(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = 1$ , если и только если  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_{n+1}$ .**

Таким образом, в общем случае предикат  $P$  – двоичная переменная, то есть переменное высказывание, истинность которого определяется значениями аргументов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а аргументы  $x_i$  – чаще нелогические переменные.

После подстановки вместо  $x_i$  конкретных элементов множества  $M$  предикат  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  перестает быть переменной и принимает одно из двух возможных значений (0 или 1).

## Примеры.

1. Рассмотрим утверждение « $x$  – целое число». Введем предикат  $I$ , обозначающий отношение «*быть целым числом*», тогда в виде предикатного выражения утверждение может быть записано так :  $I(x)$ .

2. Рассмотрим утверждение  $x < y$ . Введем предикат  $S$  с двумя аргументами, первый из которых меньше второго, тогда  $S(x, y)$  соответствует введенному утверждению.

3. Элементы  $x_i$  множества  $M$  – города.

Предикат  $P(x)$  устанавливается таким образом:  
« $x$  – это столица Франции». Тогда  $P(\text{Воронеж})=0$ ,  
а  $P(\text{Париж})=1$ .

4. Задана функция  $z=x+y$ , где  $x, y, z$  –  
действительные числа. Пусть предикат  $P(x,y,z)$   
соответствует этой функции.

Тогда  $P(2, 3, 5)=1$ , а  $P(7, 3, 8)=0$ .

Если вместо переменных в предикат подставить объекты  $a_1, a_2, \dots, a_m \in M$ , где  $M$  – множество, на котором определено  $P$ , то значение  $P(a_1, a_2, \dots, a_m)$  можно рассматривать как истинное или ложное.

## Пример(для предикатов определенных в предыдущем примере).

Пусть в обоих случаях предикаты определены на множестве  $R$  – действительных чисел. Тогда

1) если  $x = 5$ , то предикат  $I(5) = 1$ ;

если  $x = 7.3$ ; то  $I(7.3) = 0$ ;

2) если  $x = 5$ ;  $y = 10.5$ , то  $S(5; 10.5) = 1$ ;

если  $x = 27.1$ ;  $y = 4.3$ , то  $S(27.1; 4.3) = 0$ .

**Определение.** Для предиката  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$   
можно выделить множество наборов  
 $b_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  **таких, что**  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in} \in M$  **которые,**  
**будучи подставленными в предикат  $P$ ,**  
**приводят его к значению истина.**

Объединение всех этих наборов называется  
***множеством истинных наборов предиката  $P$ ,***  
**обозначим его  $I_p$ .**

Пример. Для предиката  $S(x, y)$   
определенного ранее, множество  $I_p$  может быть  
определено следующим образом:

$$I_p = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R, x < y\}$$



**Определение.** Предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется **тождественно истинным**, если его множество  $I_p$  образуют все возможные наборы, которые можно определить на множестве  $M$ .

**Определение.** Предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$   
называется **тождественно ложным**, если его  
множество  $I_p = \emptyset$

Т.к. результат предикатного выражения это значение истина или ложь, то к ним могут быть применены логические операции

Пример. Рассмотрим предикаты  $I(x)$  и  $S(x,y)$  из предыдущих примеров. Пусть  $I$  и  $S$  определены на множестве  $R$ , тогда:

1) при  $x = 3, y = 10 : I(3) = 1, S(3, 10) = 1$ , имеем  
 $I(3) \& S(3, 10) = 1 \& 1 = 1,$

$$S(3, 10) \vee I(3) = 1 \vee 1 = 1;$$

2) при  $x=7.5, y=\overset{\rightarrow}{11} : I(7.5)=0, S(7.5,11)=1$ , имеем  
 $I(7.5) \& S(7.5,11)=0 \& 1=0,$

$$I(7.5) \vee S(7.5, 11) = 0 \vee 1 = 1;$$

→

**3) задана вычислительная процедура:**  
*«Повторять цикл, пока переменные  $x$  и  $y$  не станут равными, либо прекратить вычисления после 100 повторений».*

**Область определения:**

$x$  и  $y$  – действительные числа;  $i$  – целое число, которое в каждом шаге увеличивается на единицу.

**Предикат  $P$  задается условием:**  $(x=y) \vee (i < 100)$

**При этом процедура может задаваться условием:**  
*«Повторять цикл, если  $P=1$ » .*

**Квантор всеобщности ( $\forall$ ).** Пусть  $P(x)$  это предикат, определенный на множестве  $M$ . Тогда под выражением  $\forall x P(x)$  – понимается высказывание, которое истинно для любого элемента  $x \in M$ .

Соответствующее этому высказыванию предложение можно сформулировать так:

*«Для любого  $x$  выражение  $P(x)$  истинно».*

**Квантор существования ( $\exists$ ).** Пусть  $P(x)$  это предикат, определенный на множестве  $M$ .

Тогда под выражением  $\exists xP(x)$  понимается высказывание, которое истинно, если существует элемент  $x \in M$ , для которого  $P(x)$  истинно, и ложно в противном случае.

**Соответствующее ему предложение:**

*«Существует  $x$ , при котором значение  $P(x)$  истинно».*

**Пример.** Пусть предикат  
определен на множестве  $N$ .

$$P(x, y) \quad x \leq y$$

№	Предикатная запись	Предложение	Значение истинности
1.	$\exists x \forall y P(x, y)$	Существует $x$ , который меньше любого $y$	1
2.	$\exists x \exists y P(x, y)$	Существуют такие $x$ и $y$ , что $x \leq y$	1
3.	$\forall x \forall y P(x, y)$	Для любого $x$ и любого $y$ имеет место $x \leq y$	0

Входящие в предикатное выражение переменные могут быть **связанными** или **свободными** и это зависит от того, каким образом определена **область действия квантора**, входящего в формулу.



Пример. Для выражения вида

$$\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow \forall z R(x, z))$$

область действия кванторов определена  
следующим образом:

для квантора  $\forall x$  —  $\exists y (P(x, y) \rightarrow \forall z R(x, z))$

для квантора  $\exists y$  —  $P(x, y) \rightarrow \forall z R(x, z)$  ,

для квантора  $\forall z$  —  $R(x, z)$  .

**Определение.** Вхождение переменной  $x$  в формулу называется **связанным**, тогда и только тогда, когда оно совпадает с вхождением в квантор  $(\forall x)$  или  $(\exists y)$  и находится в области действия квантора.

Вхождение переменной в формулу **свободно**, тогда и только тогда, когда оно не является **связанным**.

**Определение.** Переменная *свободна* в формуле, если хотя бы одно ее вхождение в эту формулу свободно.

Отметим, что переменная в формуле может быть свободной и связанной одновременно.

**Определение.** Переменная называется *квантифицированной*, если она используется в кванторных операциях, т.е.  $\forall x$  или  $\exists x$ .

## Пример.

$P(x)$  –  $x$  **свободная**;

$\forall xP(x), \exists xP(x)$  –  $x$  **связанная**;

$\exists xP(x, y)$  –  $x$  **связанная**,  $y$  **свободная**;

$\exists x\forall yP(x, y)$  –  $x$  и  $y$  **связанные**.

## **4.2 Логика предикатов как формальная система**



- 1. Алфавит.**
- 2. Правила построения формул.**
- 3. Аксиомы.**
- 4. Правила вывода.**

# 1. Алфавит.

- предметные переменные –  $x, y, z$  и т.п., которые принимают значение из множества  $M$ ;
- индивидные константы –  $a, b, c$  и т.п., то есть нульместные функциональные константы или константы предметной области;
- функциональные константы –  $f, g, h$  и т.п., используются для обозначения функций;
- высказывания –  $p, q, r$  и т.п.;
- предикатные константы –  $P, R, H, Q$  и т.п.;
- символы логических операций –  $\&, \vee, \rightarrow$  и т.д.;
- символы кванторных операций –  $\forall, \exists$ ;
- вспомогательные символы –  $(, )$ .



## 2. Правила построения формул.

**Термом** является всякая переменная и всякая функциональная форма.

**Функциональная форма** – это функциональная константа, соединенная с некоторым числом термов.

Если  $f$  – функциональная константа ( $n$ -местная) и  $t_1, \dots, t_n$  – термы, то соответствующая форма записывается так

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Если  $n=0$ , то  $f$  превращается в индивидуальную константу.

**Предикатная форма** – это предикатная константа, соединенная с соответствующим числом термов.

Если  $P$  – предикатная константа ( $m$ -местная константа) и  $t_1, \dots, t_m$  – термы, то соответствующая форма записывается так .

$$P(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

Если  $m = 0$ , то пишут  $P$ , т.е. предикатная форма превращается в высказывание

**Атом** – это предикатная форма или некоторое равенство (выражение вида  $s=t$ , где  $s$  и  $t$  – термы).

Для равенства характерно то же, что и для предикатной формы, т.е. о нем можно сказать, что оно истинно или ложно.

## Определение понятия формулы

1. Атом есть формула.

2. Если  $A$  – формула, то  $\bar{A}$  – формула.

3. Если  $A$  и  $B$  – формулы,

то ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \& B)$ ,  $(A \sim B)$  – формулы.

4. Если  $A$  – формула и  $x$  – переменная, то –

$\forall xA$ ,  $\exists xA$  формулы.

### 3. Определение аксиом.

Выбор системы аксиом в исчислении предикатов может быть осуществлен по-разному.

Один из наиболее простых способов состоит в том, что берутся уже ранее определенные аксиомы из исчисления высказываний и дополняются еще двумя, связанными с использованием кванторов:

$$\forall x F(x) \rightarrow F(y);$$

$$F(t) \rightarrow \exists x F(x), \text{ где } t \text{ — не содержит переменной } x.$$

## 4. Правила вывода.

Правила вывода также полностью заимствуются из логики высказываний, кроме того, к ним добавляются еще два правила следующего вида:

- правило введения квантора существования:

$$\frac{P(x) \rightarrow F}{\exists x P(x) \rightarrow F}$$

- правило введения квантора общности:

$$\frac{F \rightarrow P(x)}{F \rightarrow \forall x P(x)}$$

## Примеры.

1. Утверждение: «Все слоны серые».

**Вводимые предикаты:**

$\text{слон}(x)$  – « $x$  – слон»;

$\text{цвет}(x, y)$  – « $x$  цвета  $y$ ».

**Предикатное выражение:**

$$\forall x(\text{слон}(x) \rightarrow \text{цвет}(x, \text{серый}))$$

**2. Утверждение:** «Для любого множества  $x$  существует множество  $y$  такое, что мощность  $y$  больше, чем мощность  $x$ ».

### Вводимые предикаты:

$\text{множество}(x)$  – « $x$  – множество»;

$\text{мощность}(x, u)$  – «мощность множества  $x$  равна  $u$ »;

$\text{больше}(x, u)$  – «значение  $x$  больше значения  $u$ ».

### Предикатное выражение:

$$\forall x(\text{множество}(x) \rightarrow (\exists y)(\exists u)(\exists v)((\text{множество}(y) \& \text{мощность}(x, u) \& \text{мощность}(y, v) \& \text{больше}(v, u)))).$$



**3. Утверждение:** «Все кубики, находящиеся на кубиках, которые были сдвинуты или были скреплены с кубиками, которые сдвигались, тоже будут сдвинуты».

**Вводимые предикаты:**

куб ( $x$ ) – « $x$  – куб»;

сверху ( $x, y$ ) – « $x$  расположен сверху  $y$ »;

скреплен ( $x, y$ ) – « $x$  скреплен с  $y$ »;

сдвинут ( $x$ ) – « $x$  – сдвинут».

**Предикатное выражение:**

$$(\forall x)(\forall y)(\text{куб}(x) \& \text{куб}(y) \& (\text{сверху}(x, y) \vee \text{скреплен}(x, y)) \& \text{сдвинут}(y)) \rightarrow \text{сдвинут}(x).$$

## **4.3 Определение значения истинности предикатных формул**

**Определение.** Две формулы логики предикатов считаются **равносильными** в области  $M$ , если они принимают одинаковые логические значения при всех входящих в них переменных, отнесенных к области  $M$ .

**Определение.** Две формулы логики предикатов называются **равносильными**, если они равносильны на всякой области.

**Пусть  $A(x)$ ,  $A(x,y)$  и  $B(x)$  – предикаты,  $p$  – высказывание, тогда правила имеют следующий вид:**

$$1. \overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}.$$

$$2. \overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}.$$

$$3. \forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}.$$

$$4. \exists x A(x) = \overline{\forall x \overline{A(x)}}.$$

$$5. \quad \forall x (A(x) \& B(x)) = \forall x A(x) \& \forall x B(x).$$

$$6. \quad \forall x (A(x) \vee B(x)) = \forall x A(x) \vee \forall x B(x).$$

$$7. \quad p \& \forall x A(x) = \forall x (p \& A(x)).$$

$$8. \quad p \vee \forall x A(x) = \forall x (p \vee A(x)).$$

$$9. \quad p \rightarrow \forall x B(x) = \forall x (p \rightarrow B(x)).$$

$$10. \quad \forall x (B(x) \rightarrow p) = \exists x B(x) \rightarrow p.$$

$$11. \quad \exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$$

$$12. \exists x (A(x) \& B(x)) = \exists x A(x) \& \exists x B(x).$$

$$13. p \vee \exists x B(x) = \exists x (p \vee B(x)).$$

$$14. p \& \exists x B(x) = \exists x (p \& B(x)).$$

$$15. \exists x A(x) \& \exists y B(x) = \exists x \exists y (A(x) \& B(x)).$$

$$16. \exists x \exists y A(x, y) = \exists y \exists x A(x, y).$$

$$17. \forall x \forall y A(x, y) = \forall y \forall x A(x, y).$$

$$18. \exists x (B(x) \rightarrow p) = \forall x B(x) \rightarrow p.$$

Пример. Доказать тождественную истинность заданного предикатного выражения

$$\begin{aligned}\forall x (P(x) \rightarrow (P(x) \vee P(y))) &= \forall x (\overline{P(x)} \vee P(x) \vee P(y)) = \\ &= \forall x (1 \vee P(y)) = \forall x (1) = 1.\end{aligned}$$

**Пример. Доказать тождественную ложность заданного предикатного выражения**

$$\begin{aligned}
 & \exists x \exists y \left( (F(x) \rightarrow F(y)) \& (F(x) \rightarrow \bar{F}(y)) \& F(x) \right) = \\
 & = \exists x \exists y \left( (\bar{F}(x) \vee F(y)) \& (\bar{F}(x) \vee \bar{F}(y)) \& F(x) \right) = \\
 & = \exists x \exists y \left( (\bar{F}(x) \vee F(y)) \& (\bar{F}(x) \& F(x) \vee \bar{F}(y) \& F(x)) \right) = \\
 & = \exists x \exists y \left( (\bar{F}(x) \vee F(y)) \& (0 \vee \bar{F}(y) \& F(x)) \right) = \\
 & = \exists x \exists y \left( (\bar{F}(x) \vee F(y)) \& \bar{F}(y) \& F(x) \right) = \\
 & = \exists x \exists y (\bar{F}(x) \& \bar{F}(y) \& F(x) \vee F(y) \& \bar{F}(y) \& F(x)) = \\
 & = \exists x \exists y (0 \vee 0) = 0.
 \end{aligned}$$



## **4.4 Метод резолюций для логики предикатов**

Так как анализ выражений в формальных системах осуществляется в чисто синтаксической форме, без учета семантики, то возникает необходимость приведения отдельных выражений к единой форме.

Эти приведения базируются на использовании *унификации*.



**Определение. Подстановочным частным случаем** называется подстановка в некоторое выражение термов вместо переменных.

## Пример.

Для выражения  $P(x, f(y), B)$  имеется четыре частных случая подстановки:

- $P(z, f(\omega), B)$  – алфавитная, просто замена одних переменных на другие;
- $P(x, f(A), B)$  – константу подставили в функцию  $f$ ;
- $P(g(z), f(A), B)$  – функциональное выражение вместо переменной  $x$ ;
- $P(C, f(A), B)$  – основной частный случай, т.к. везде подставлены константы вместо переменных.

**Любую подстановку можно представить с помощью множества упорядоченных пар вида**

$$S = \{t_1/v_1, t_2/v_2, \dots, t_n/v_n\},$$

**где пара  $t_i/v_i$  означает, что переменная  $v_i$  заменяется на терм  $t_i$ .**

**При выполнении подстановки должны соблюдаться два правила:**

- **каждое вхождение переменной заменяется на один и тот же терм;**
- **переменную нельзя заменить на терм, содержащий ту же самую переменную.**

Для предыдущего примера подстановки описанные с помощью введенного формализма, имеют следующий вид:

$$1) S_1 = \{z/x, \omega/y\};$$

$$2) S_2 = \{A/y\};$$

$$3) S_3 = \{g(z)/x, A/y\};$$

$$4) S_4 = \{C/x, A/y\}.$$



Для обозначения подстановки часто используется следующая запись.

Если  $S$  – подстановка, а  $E$  – выражение, к которому она применяется, то пишут  $E_S$ .

Если подстановка  $S$  применяется к каждому элементу некоторого множества  $\{E_i\}$ , то множество подстановочных примеров обозначается  $\{E_i\}_S$ .

**Определение.** Говорят, что множество  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  **унифицируемо**, если существует такая подстановка  $S$ , что

$$E_1^s = E_2^s = \dots = E_n^s.$$

В этом случае подстановка  $S$  называется **унификатором** для множества  $E$ , т.к. после ее применения множество склеивается в один элемент.

**Пример.** Пусть  $A = \{P(x, f(y), B), P(x, f(B), B)\}$ ,  
рассмотрим подстановку  $S = \{C/x, B/y\}$ ,  
унифицируем и получаем  $A = \{P(A, f(B), B)\}$   
(в подстановке  $S$  необходимости не было).

$$P(x, f(y), B)_{S_1} = P(z, f(\omega), B).$$

## **Унификация производится при следующих условиях:**

- 1. Если термы – константы, то они унифицируемы тогда и только тогда, когда они совпадают.**
- 2. Если в первом дизъюнкте терм – переменная, а во втором – константа, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется константа.**
- 3. Если терм в первом дизъюнкте – переменная и во втором дизъюнкте терм тоже переменная, то они унифицируемы.**
- 4. Если в первом дизъюнкте терм – переменная, а во втором – употребление функции, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется употребление функции.**
- 5. Унифицируются между собой термы, стоящие на одинаковых местах в одинаковых предикатах.**

## Пример.

Рассмотрим дизъюнкты:

1)  $Q(a, b, c)$  и  $Q(a, d, l)$ .

Дизъюнкты не унифицируемы.

2)  $Q(a, b, c)$  и  $Q(x, y, z)$ .

Дизъюнкты унифицируемы. Унификатор –  
 $S=(a/x, b/y, c/z)$ .

Если необходимо последовательно выполнить несколько подстановок:  $S_1, S_2$ , то можно записать  $E_{S_1 S_2}$

На этом действии базируется такое понятие, как ***композиция подстановок***.

Если  $S$  и  $S'$  являются двумя множествами подстановок, то их композиция  $S$  и  $S'$  (пишется  $S S'$ ) получается после применения  $S'$  к элементам  $S$  и добавления результата к  $S$ .

***Композиция подстановок*** – это метод, с помощью которого объединяются подстановки унификации.

**Определение.** Композиция подстановок  $g$  и  $s$  есть функция  $gs$ , определяемая следующим образом:

$$(gs) [t] = g[ s[t]],$$

где  $t$  – терм,

$g$  и  $s$  – подстановки,

а  $s[t]$  – терм, который получается из  $t$  путем применения к нему подстановки  $s$ .



**Пример. Пусть задана последовательность  
подстановок**

$$\{x/y, w/z\}, \{v/x\}, \{A/v, f(B)/w\},$$

**они эквивалентны одной подстановке  
 $\{A/y, f(B)/z\}$ .**

**Последняя подстановка была выведена путем  
компоновки  $\{x/y, w/z\}$  и  $\{v/x\}$  для получения  
 $\{v/y, w/z\}$  и компоновки результата с  $\{A/v, f(B)/w\}$   
для получения  $\{A/y, f(B)/z\}$ .**



Основное требование алгоритма унификации состоит в том, что унификатор должен быть максимально общим, т.е. для любых двух выражений должен быть найден **наиболее общий унификатор (НОУ)**.

**Определение.** Если  $s$  – произвольный унификатор выражения  $E$ , а  $g$  – **наиболее общий унификатор** этого набора выражений, то в случае применения  $s$  к  $E$  будет существовать еще один унификатор  $s'$  такой, что  $Es = Egs'$ , где  $g$  и  $s'$ , – композиции унификации, примененные к выражению  $E$ .

**Определение. Множество рассогласований** непустого множества дизъюнктов  $\{E_1, \dots, E_n\}$  получается путем выявления первой (слева) позиции, на которой не для всех дизъюнктов из  $E$  стоит один и тот же символ, и выписывания из каждого дизъюнкта термина, который начинается с символа, занимающего данную позицию.

Множество термов и есть множество рассогласований в  $E$ .

## Пример.

**Рассмотрим дизъюнкты:**

$$\{P(x, f(y, z)), P(x, a), P(x, g(h(k(x))))\}.$$

**Множество рассогласований состоит из термов, которые начинаются с пятой позиции, и представляет собой множество**

$$\{f(x, y), a, g(h(k(x)))\}.$$

## Алгоритм унификации

Пусть  $E$  – множество дизъюнктов,

$D$  – множество рассогласований,

$k$  – номер итерации,

$g_k$  – наиболее общий унификатор на  $k$ -й итерации.

## Шаг 1.

Пусть  $k=0$ ,

$g_k = e$  (пустой унификатор),

$E_k = E$ .

## Шаг 2.

Если для  $E_k$  не существует множества расогласований  $D_k$ , то алгоритм завершает работу и  $g_k$  – наиболее общий унификатор для  $E$ .  
Иначе найдем множество расогласований  $D_k$ .



### **Шаг 3.**

Если существуют такие элементы  $v_k$  и  $t_k$  в  $D_k$ , что  $v_k$  – переменная, не входящая в терм  $t_k$ , то перейдем к шагу 4.

В противном случае алгоритм завершает работу и  $E$  не унифицируемо.

## Шаг 4.

Пусть  $g_{k+1} = g_k \{ t_k / v_k \}$ , заменим во всех дизъюнктах  $E_k$  переменную  $v_k$  на терм  $t_k$

**Шаг 5.**

$k=k+1$ . Перейти к **шагу 2.**

## Пример.

### Рассмотрим дизъюнкты:

$$E = \{P(f(a), g(x)), P(y, y)\}.$$

### Итерация 1.

Шаг 1.  $E_0 = E$ ,  $k=0$ ,  $g_0 = e$ .

Шаг 2.  $D_0 = \{f(a), y\}$ .

Шаг 3.  $v_0 = y$ ,  $t_0 = f(a)$ .

Шаг 4.  $g_1 = \{f(a)/y\}$ ,  $E_1 = \{P(f(a), g(x)), P(f(a), f(a))\}$ .

Переход на шаг 2.

## Итерация 2.

Шаг 2.  $D_1 = \{g(x), f(a)\}$ .

Шаг 3. Так как нет переменной в множестве рассогласований  $D_1$ , то, следовательно, алгоритм унификации завершается, множество  $E$  – не унифицируемо.



Обычно унификацию используют для приведения в соответствие различных выражений.

Если в одном из выражений подставлены вместо переменных константы, а другие выражения приводятся в соответствие с ним, то это называется *сравнением с образом*.

Как отмечалось ранее, метод резолюций применим к множеству дизъюнктов.

Поэтому рассмотрим *последовательность действий, которую необходимо реализовать, для приведения любой формулы логики предикатов к множеству дизъюнктов.*

**Пусть задано следующее предикатное выражение:**

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(P(y) \rightarrow P(f(x, y))) \& \overline{\forall y(Q(x, y) \rightarrow P(y))})$$

**Его следует привести к множеству предложений.**

**На каждом шаге будем приводить пример, который демонстрирует результат применения действий соответствующего шага к заданному выражению.**



**Шаг 1.** Используя правила эквивалентных преобразований, в исходном выражении все логические операции записывают через операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

То есть результат будет записан как выражение, определенное в рамках следующей функционально полной системы логических функций  $\{\vee, \&, \bar{\phantom{x}}\}$

**Пример.**

$$\forall x(\bar{P}(x) \vee \forall y(\bar{P}(y) \vee P(f(x, y)))) \& \overline{\forall y(\bar{Q}(x, y) \vee P(y))}$$

**Шаг 2.** Используя правила де Моргана, выполняют преобразования, обеспечивающие применение операции отрицания только к литералам.

**Пример.**

$$\forall x(\bar{P}(x) \vee \forall y(\bar{P}(y) \vee P(f(x, y))) \& \exists y(Q(x, y) \& \bar{P}(y)))$$

**Шаг 3. Разделение переменных.** Так как в пределах области действия квантора можно заменить любую переменную на другую и от этого значение истинности формулы не изменится, можно преобразовать формулу так, чтобы каждый квантор имел свою собственную переменную, например вместо

$(\forall x)(P(x) \rightarrow \exists xQ(x))$  пишется  $(\forall x)(P(x) \rightarrow \exists yQ(y))$

**Пример.**

$(\forall x)(\bar{P}(x) \vee \forall y(\bar{P}(y) \vee P(f(x, y)))) \& \exists \omega(Q(x, \omega) \& \bar{P}(\omega))$

## Шаг 4. Исключение кванторов существования.

Рассмотрим формулу

$$(\forall y)(\exists x P(x, y))$$

В этой формуле получается, что все выражение выполняется для любого  $y$  и некоторого  $x$ , который, возможно, зависит от  $y$ .

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции  $g(y)$ , отображающей каждое значение  $y$  в то  $x$ , которое существует.

Такая функция называется **сколемовской функцией**.

**Если заменить на эту формулу переменную  $x$ , то квантор существования можно убрать и переписать выражение в новом виде**

$$\forall y P(g(y), y)$$

## Пример.

Привести к сколемовской форме следующую формулу:

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)(P(x, y, z, u, v, w)).$$

можно заменить переменную  $x$  на константу  $a$ ,

переменную  $u$  – на двухместную  $f(y, z)$ ,

переменную  $w$  – на трехместную функцию  $g(y, z, v)$ .

Таким образом, получаем следующую форму:

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)(P(a, y, z, f(y, z), g(y, z, v))).$$

Шаг 5. Преобразование выражения в предваренную (префиксную) форму. Так как в формуле кванторы существования отсутствуют, то все кванторы общности можно переместить в начало формулы.

Формула в таком виде называется **формулой в предварительной форме**, цепочка кванторов перед ней – **префиксом**, а следующее за ним бескванторное выражение – матрицей.

Пример.

$$\forall x \forall y ((\bar{P}(x) \vee \bar{P}(y) \vee P(f(x, y))) \& (\bar{P}(x) \vee Q(x, g(x))) \& (\bar{P}(x) \vee \bar{P}(g(x))))$$

**Шаг 6. Приведение матрицы выражения к форме КНФ.** Известно, что любая логическая функция может быть представлена в форме КНФ. Для этого чаще всего используется метод эквивалентных преобразований.

**Пример.**

Из алгебры логики известны следующие равенства

$$x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$$

$$x_1 x_2 \vee x_3 x_4 = (x_1 \vee x_3 x_4)(x_2 \vee x_3 x_4)$$



Применим их к полученному после шага 5  
выражению:

$$\forall x \forall y (\overline{P}(x) \vee ((\overline{P}(y) \vee P(f(x, y))) \& Q(x, g(x))) \& \overline{P}(g(x)))$$

$x_1$                                    $x_2$      $x_3$

$$(\overline{P}(x) \vee \overline{P}(y) \vee P(f(x, y))) \& (\overline{P}(x) \vee Q(x, g(x))) \& \overline{P}(g(x)) =$$

$x_1$                                    $x_2$      $x_3$

$$= \forall x \forall y (\overline{P}(x) \vee \overline{P}(y) \vee P(f(x, y)) \& (\overline{P}(x) \vee Q(x, g(x))) \& (\overline{P}(x) \vee \overline{P}(g(x))))$$

## Шаг 7. Исключение кванторов общности.

Так как в выражении остались кванторы общности, а их порядок несущественен, то можно эти кванторы опустить, то есть удалить у формулы префикс.

### Пример.

$$\bar{P}(x) \vee \bar{P}(y) \vee P(f(x, y)) \& (\bar{P}(x) \vee Q(x, g(x))) \& (\bar{P}(x) \vee \bar{P}(g(x)))$$

**Шаг 8. Переход от выражения в виде КНФ к множеству предложений.** Для этого требуется убрать все операции конъюнкции, а каждый дизъюнкт представить как отдельное предложение, т.е. перейти от выражения вида  $x_1 \& x_2$  к выражению  $\{x_1, x_2\}$  в котором каждый элемент – предложение.

**Пример.**

$$\{\bar{P}(x) \vee \bar{P}(y) \vee P(f(x, y)), \bar{P}(x) \vee Q(x, g(x)), \bar{P}(x) \vee \bar{P}(g(x))\}.$$

**Шаг 9. Переименование переменных.** Символы переменных должны быть изменены так, чтобы каждый появлялся не более чем в одном предложении. Этот процесс называется ***разделением переменных.***

**Пример.**

$$\{\bar{P}(x_1) \vee \bar{P}(y) \vee P(f(x_1, y)), \bar{P}(x_2) \vee Q(x_2, g(x_2)), \bar{P}(x_3) \vee \bar{P}(g(x_3))\}$$

**При построении вывода с помощью метода резолюций следует учитывать следующее:**

**1. Если во множестве присутствуют только предложения, содержащие предикаты без переменных, то вывод строится, как и в случае с высказываниями, т.к. логика высказываний – это частный случай логики предикатов.**

**2. Для того чтобы применить резолюцию к предложениям, содержащим переменные, необходимо иметь возможность найти такую подстановку, которая, будучи применена к родительским предложениям, приведет к тому, что они будут содержать дополнительные литералы.**

## Пример.

Рассмотрим дизъюнкты:

$$C_1: P(x) \vee Q(x),$$

$$C_2: R(x) \vee \bar{P}(f(x))$$

Так как аргументы предиката  $P$  в  $C_1$  и  $C_2$  различны, то невозможно построить на их основе резольвенту, но если подставить  $f(a)$  вместо  $x$  в  $C_1$  и  $a$  вместо  $x$  в  $C_2$ , то исходные дизъюнкты примут вид.

$$C_1': P(f(a)) \vee Q(f(a)),$$

$$C_2': R(a) \vee \bar{P}(f(a))$$

**Следовательно, можно получить  
резольвенту**

$$C_3': Q(f(a)) \vee R(a).$$

**В общем случае, подставив  $f(x)$  вместо  $x$  в  $C_1$ ,  
получим**

$$C_1'': P(f(x)) \vee Q(f(x)).$$

**Предикат  $P(f(x))$  в  $C_1''$  и предикат в  $C_2$   
позволяют получить резольвенту**

$$C_3: Q(f(x)) \vee R(x).$$

**Определение.** Если два или более предиката (с одинаковым знаком) дизъюнкта  $C$  имеют наиболее общий унификатор  $g$ , то  $Cg$  – называется **склежкой**  $C$ .



## Пример.

Рассмотрим дизъюнкт

$$C = P(x) \vee P(f(y)) \vee \bar{Q}(x)$$

В этом дизъюнкте первый и второй предикаты имеют наиболее общий унификатор  $g = \{f(y)/x\}$ .

Следовательно,

$$Cg = P(f(y)) \vee \bar{Q}(f(y))$$

есть склейка  $C$ .

**Определение.** Пусть  $C_1$  и  $C_2$  – два дизъюнкта, которые не имеют никаких общих переменных. Пусть  $L_1$  и  $L_2$  – два предиката в  $C_1$  и  $C_2$ . Если  $L_1$  и  $L_2$  имеют наиболее общий унификатор  $g$ , то дизъюнкт  $(C_{1g} \setminus L_{1g}) \vee (C_{2g} \setminus L_{2g})$  называется **резольвентой**  $C_1$  и  $C_2$ .

### Пример.

Пусть  $C_1 = P(x) \vee Q(x)$  и  $C_2 = \forall x \overline{P(x)} \vee R(x)$ .

Так как  $x$  входит в  $C_1$  и  $C_2$ , то заменим переменную в  $C_2$  и пусть  $C_2 = \forall y \overline{P(a)} \vee R(y)$ .

Выбираем  $L_1 = P(x)$  и  $L_2 = \overline{P(a)}$

$L_1$  и  $L_2$  имеют наиболее общий унификатор  $g = \{a/x\}$ .

Следовательно,  $Q(a) \vee R(y)$  – резольвента  $C_1$  и  $C_2$ .

## Пример.

$$\{P(x, f(A)) \vee P(x, f(y)) \vee Q(y), \bar{P}(z, f(A)) \vee \bar{Q}(z)\}$$

Тогда при

$$L_1 = \{P(x, f(A))\} \text{ и } L_2 = \{\bar{P}(z, f(A))\} \text{ полагаем } g = \{z/x\}$$

и получаем резольвенту

$$P(z, f(y)) \vee \bar{Q}(z) \vee Q(y)$$

а при

$$L_1 = \{P(x, f(A)), P(x, f(y))\} \text{ и } L_2 = \{\bar{P}(z, f(A))\}$$

полагаем  $g = \{z/x, A/y\}$  и

получаем резольвенту  $Q(A) \vee \bar{Q}(z)$ .



**Переформулируем теперь уже известный алгоритм метода резолюций применительно к логике предикатов.**

**Шаг 1.** Если в  $S$  есть пустой дизъюнкт, то множество  $S$  не выполнимо и алгоритм завершает работу, иначе переходим к **шагу 2.**

**Шаг 2.** Найти в исходном множестве  $S$  такие дизъюнкты или склейки дизъюнктов  $C_1$  и  $C_2$ , которые содержат унифицируемые литералы  $L_1 \in C_1$  и  $L_2 \in C_2$ .

Если таких дизъюнктов нет, то исходное множество выполнимо и алгоритм завершает работу, иначе переходим к шагу 3.

**Шаг 3. Вычислить резольвенту  $C_1$  и  $C_2$ ,  
добавить ее в множество  $S$  и перейти к  
шагу 1.**



**Пример 1. Докажем с помощью метода резолюций справедливость следующих рассуждений.**

- *Каждый член демократической партии голосует за президента и не любит коммунистов.*
- *Некоторые демократы являются предпринимателями.*
- *Следовательно, существуют предприниматели, которые не любят коммунистов*

## Введем следующие предикаты:

$C(x)$  – "x – член демократической партии";

$W(x)$  – "x – голосует за президента";

$R(x)$  – "x – не любит коммунистов";

$P(x)$  – "x – является предпринимателем".

$$h1 = \forall x(C(x) \rightarrow W(x) \& R(x)),$$

$$h2 = \exists x(C(x) \& P(x)),$$

$$S = \exists x(P(x) \& R(x)).$$

## Решение:

$$1. \quad \overline{C(x)} \vee W(x)$$

$$2. \quad \overline{C(x)} \vee R(x)$$

$$3. \quad C(A)$$

$$4. \quad P(A)$$

$$5. \quad \overline{P(x)} \vee \overline{R(x)}$$

$$6. \quad 2 - 3 \quad S_2 = \{A/x\}$$

$$R(A)$$

$$7. \quad 5 - 6 \quad S_5 = \{A/x\}$$

$$\overline{P(A)}$$

$$8. \quad 4 - 7 \quad \text{Пустой дизъюнкт}$$

**Пример 2. Докажем с помощью метода резолюций справедливость следующих рассуждений.**

- *Некоторые руководители с уважением относятся ко всем программистам.*
- *Ни один руководитель не уважает бездельников.*
- *Следовательно, ни один программист не является бездельником.*

## Введем следующие предикаты:

$C(x)$  – "x – руководитель";

$P(x)$  – "x – программист";

$B(x)$  – "x – бездельник";

$U(x, y)$  – "x уважает y".

**Тогда посылки, записанные в виде предикатных выражений будут выглядеть так:**

$$\exists x(C(x) \& \forall y(P(y) \rightarrow U(x, y)))$$

$$\forall x(C(x) \rightarrow \forall y(B(y) \rightarrow \bar{U}(x, y)))$$

**Заключение примет следующий вид:**

$$\forall y(P(y) \rightarrow \bar{B}(y))$$

Преобразовав посылки и следствие, которое надо взять с отрицанием, в совокупность дизъюнктов, получим множество предложений, невыполнимость которого докажем, используя метод резолюций.

$$\{C(a), \bar{P}(y) \vee U(x, y), \bar{C}(x) \vee \bar{B}(y) \vee \bar{U}(x, y), P(b), B(b)\}$$

1)  $C(a)$

2)  $\bar{P}(y) \cup U(x, y)$

3)  $\bar{C}(x) \vee \bar{B}(y) \vee \bar{U}(x, y)$

4)  $P(b)$

5)  $B(b)$

6)  $\bar{B}(y) \vee \bar{U}(a, y)$  (1,3) /  $s = \{a/x\}$

7)  $U(a, b)$  (2,4) /  $s = \{b/y\}$

8)  $\bar{B}(b)$  (6,7) /  $s = \{b/y\}$

9) Пустой дизъюнкнт (5,8)



**Пример 3. Докажем с помощью метода резолюций справедливость следующих рассуждений.**

- *Если родитель мужчина, то это отец.*
- *Если ребёнок мужчина, то это сын.*
- *Иван мужчина.*
- *Сидор мужчина.*
- *Иван родитель Сидора.*
- *Следовательно, Иван отец и Сидор сын*

## Введем следующие предикаты:

$C(x)$  – "x – сын";

$O(x)$  – "x – отец";

$R(x,y)$  – "x – родитель y";

$M(x)$  – "x – мужчина".

*Константы: D – Иван, B – Сидор.*

$$h1 = \forall x \forall y (R(x, y) \& M(x) \rightarrow O(x)),$$

$$h2 = \forall x \forall y (R(x, y) \& M(y) \rightarrow C(y)),$$

$$h3 = M(D),$$

$$h4 = M(B),$$

$$h5 = R(D, B),$$

$$S = O(D) \& C(B).$$

## Решение:

1.  $\overline{R}(x, y) \vee \overline{M}(x) \vee O(x)$
2.  $\overline{R}(x, y) \vee \overline{M}(y) \vee C(y)$
3.  $M(A)$
4.  $M(B)$
5.  $R(A, B)$
6.  $\overline{O}(A) \vee \overline{C}(B)$

---

7. 1-5  $S = \{A/x, B/y\}$   
 $\overline{M}(A) \vee O(A)$

8. 2-5  $S = \{A/x, B/y\}$   
 $\overline{M}(B) \vee C(B)$

9. 3-7  $O(A)$

10. 6-9  $\overline{C}(B)$

11. 8-10  $\overline{M}(B)$

12. 4-11 Ложной функцией.

**Определение. Сколемовской формой**  
предикатного выражения называется формула  
логики предикатов, в которой все вхождения  
переменных, у которых кванторы  
существования находятся в области действия  
кванторов общности, заменены на  
сколемовские функции.

**Определение.** *Клаузальной формой* называется такая сколемовская форма, матрица которой имеет вид КНФ.

Любая сколемовская форма допускает эквивалентную ей клаузальную форму.