§4. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

4.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

В алгебре логики высказывания рассматриваются как единый объект с точки зрения истинности или ложности. Структура и содержание высказываний не рассматриваются.

Однако на практике для построения полноценного логического вывода важно иметь представление о структуре и содержании используемых в выводе высказываний.

Поэтому логика предикатов является, по сути, расширением логики высказывания, которую включает в себя в качестве составной части.

Определение. ***Одноместным предикатом*** $P(x)$ **называется произвольная функция переменной** x**, определенная на множестве** M **и принимающая значение из множества** $\{0, 1\}$**.**

Определение. Предикатом *P* называется *n*-местная функция, определенная на производном множестве *M* и принимающая в качестве значений элементы из двухэлементного множества $\{0, 1\}$, где *0* и *1* интерпретируются как ложь и истина соответственно.

Выражение вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно трактовать так, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны отношением *P*.

Используя функциональную форму записи для предикатов, можно сказать, что предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция $P: M^n \rightarrow B$, где *B* – двоичное множество, а *M* – произвольное множество.

Таким образом, *n*-местный предикат, – это двузначная функция от *n* аргументов, определенная на произвольном множестве *M*, принимающая значение *0* или *1* (которые интерпретируются как ложь и истина соответственно).

Область определения *M* называется *предметной областью* предиката, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *предметными переменными*.

Возможность описывать с помощью предикатов не только функции, но и отношения, определяется следующим:

а) если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – элементы множества M, то каждому n - местному отношению R соответствует предикат P такой, что

$P(a_1, a_2, \ldots, a_n)=1$ тогда и только тогда, когда

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$;

б) всякий предикат $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ определяет отношение R, такое, что $(a_1, a_2 \ldots a_n) \in R$, если и только если $P(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$. При этом R задает область истинности предиката P.

Предикат можно поставить в соответствие и непрерывной функции типа $F{:}M^n \to M$.

Такой функции можно поставить в соответствие $(n + 1)$ - местный предикат P такой, что $P(a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1})=1$, если и только если $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=a_{n+1}$.

Таким образом, в общем случае предикат P **– двоичная переменная, то есть переменное высказывание, истинность которого определяется значениями аргументов**

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **, а аргументы** x_i **– чаще нелогические переменные.**

После подстановки вместо x_i **конкретных элементов множества** M **предикат** $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **перестает быть переменной и принимает одно из двух возможных значений (**0 **или** 1**).**

Примеры.

1.Рассмотрим утверждение *«x – целое число»*. Введем предикат I, обозначающий отношение «*быть целым числом*», тогда в виде предикатного выражения утверждение может быть записано так : $I(x)$.

2. Рассмотрим утверждение *x < y*. Введем предикат *S* с двумя аргументами, первый из которых меньше второго, тогда *S(x,y)* соответствует введенному утверждению.

3. Элементы x_i множества *M* – города.

Предикат *P(x)* устанавливается таким образом: *«x – это столица Франции».* **Тогда** *P(Воронеж)=0*, **а** *P(Париж)=1*.

4. Задана функция *z=x+y*, **где** *x, y, z* **– действительные числа. Пусть предикат** *P(x,y,z)* **соответствует этой функции.**

Тогда *P(2, 3, 5)=1*, **а** *P(7, 3, 8)=0.*

Если вместо переменных в предикат подставить объекты $a_1, a_2, \ldots, a_m \in M$, где M – множество, на котором определено P, то значение $P(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ можно рассматривать как истинное или ложное.

Пример(для предикатов определенных в предыдущем примере).

Пусть в обоих случаях предикаты определены на множестве R **– действительных чисел. Тогда**

1) если $x = 5$, **то предикат** $I(5) = 1$;

если $x = 7.3$; **то** $I(7.3) = 0$;

2) если $x = 5$; $y = 10.5$, то $S(5; 10.5) = 1$;

если $x = 27.1$; $y = 4.3$, то $S(27.1; 4.3) = 0$.

Определение. Для предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно выделить множество наборов $b_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ таких, что $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \in M$, которые, будучи подставленными в предикат P, приводят его к значению истина.

Объединение всех этих наборов называется ***множеством истинных наборов предиката*** P, обозначим его I_p.

Пример. Для предиката $S(x,, y)$ определенного ранее, множество I_p может быть определено следующим образом:

$$I_p = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R, x < y\}$$

Определение. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *тождественно истинным*, если его множество I_p образуют все возможные наборы, которые можно определить на множестве *M*.

Определение. Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется ***тождественно ложным***, если его множество $I_P = \varnothing$

Т.к. результат предикатного выражения это значение истина или ложь, то к ним могут быть применены логические операции

Пример. Рассмотрим предикаты $I(x)$ и $S(x,y)$ из предыдущих примеров. Пусть I и S определены на множестве R, тогда:

1) при $x = 3,\ y = 10 : I(3) = 1,\ S(3, 10) = 1$, имеем $I(3) \& S(3, 10) = 1 \& 1 = 1$,

$$S(3, 10) \vee I(3) = 1 \vee 1 = 1;$$

$$\to$$

2) при $x=7.5,\ y=11$: $I(7.5)=0,\ S(7.5,11)=1$, имеем $I(7.5) \& S(7.5,11)=0 \& 1=0$,

$$I(7.5) \vee S(7.5, 11) = 0 \vee 1 = 1;$$

$$\to$$

3) задана вычислительная процедура: *«Повторять цикл, пока переменные* x *и* y *не станут равными, либо прекратить вычисления после* 100 *повторений»*.

Область определения:

$\boldsymbol{x}$ **и** $\boldsymbol{y}$ **– действительные числа;** $\boldsymbol{i}$ **– целое число, которое в каждом шаге увеличивается на единицу.**

Предикат $\boldsymbol{P}$ **задается условием:** $(x/=y) \vee (i<100)$

При этом процедура может задаваться условием: *«Повторять цикл, если* $P=1$*»* .

Квантор всеобщности ($\forall$). Пусть $P(x)$ это предикат, определенный на множестве M. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ – понимается высказывание, которое истинно для любого элемента $x \in M$.

Соответствующее этому высказыванию предложение можно сформулировать так:

«Для любого x выражение $P(x)$ истинно».

Квантор существования (∃). Пусть $P(x)$ это предикат, определенный на множестве M.

Тогда под выражением $\exists x P(x)$ понимается высказывание, которое истинно, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложно в противном случае.

Соответствующее ему предложение:

«Существует x, при котором значение $P(x)$ истинно».

<u>Пример.</u> Пусть предикат определен на множестве *N*. $P(x, y)$ $x \le y$

№	Предикатная запись	Предложение	Значение истинности
1.	$\exists x \forall y P(x, y)$	Существует x, который меньше любого y	1
2.	$\exists x \exists y P(x, y)$	Существуют такие x и y, что $x \le y$	1
3.	$\forall x \forall y P(x, y)$	Для любого x и любого y имеет место $x \le y$	0

Входящие в предикатное выражение переменные могут быть *связанными* или *свободными* и это зависит от того, каким образом определена *область действия квантора*, входящего в формулу.

<u>Пример.</u> Для выражения вида

$$\forall x \exists y (P(x, y) \to \forall z R(x, z))$$

область действия кванторов определена следующим образом:

для кванторa $\forall x$ **–** $\exists y (P(x, y) \to \forall z R(x, z))$**;**

для кванторa $\exists y$ **–** $P(x, y) \to \forall z R(x, z)$**,**

для кванторa $\forall z$ **–** $R(x, z)$**.**

Определение. Вхождение переменной x в формулу называется ***связанным*** , тогда и только тогда, когда оно совпадает с вхождением в квантор $(\forall x)$ или $(\exists y)$ и находится в области действия квантора.

Вхождение переменной в формулу ***свободно*** , тогда и только тогда, когда оно не является связанным.

Определение. Переменная ***свободна*** в формуле, если хотя бы одно ее вхождение в эту формулу свободно.

Отметим, что переменная в формуле может быть свободной и связанной одновременно.

Определение. Переменная называется ***квантифицированной***, если она используема в кванторных операциях, т.е. $\forall x$ или $\exists x$.

Пример.

$P(x)$ – x свободная;

$\forall x P(x), \exists x P(x)$ – x связанная;

$\exists x P(x, y)$ – x связанная, y свободная;

$\exists x \forall y P(x, y)$ – x и y связанные.

4.2 Логика предикатов как формальная система

1. Алфавит.
2. Правила построения формул.
3. Аксиомы.
4. Правила вывода.

1. Алфавит.

- **предметные переменные –** x, y, z **и т.п., которые принимают значение из множества** M**;**
- **индивидные константы –** a, b, c **и т.п., то есть нульместные функциональные константы или константы предметной области;**
- **функциональные константы –** f, g, h **и т.п., используются для обозначения функций;**
- **высказывания –** p, q, r **и т.п.;**
- **предикатные константы –** P, R, H, Q **и т.п.;**
- **символы логических операций –** &, $\vee$, $\rightarrow$ **и т.д.;**
- **символы кванторных операций –** $\forall, \exists$**;**
- **вспомогательные символы –** (,).

2. Правила построения формул.

Термом **является всякая переменная и всякая функциональная форма.**

Функциональная форма **– это функциональная константа, соединенная с некоторым числом термов.**

Если f – функциональная константа (n-местная) и $t_1, \dots, t_n$ - термы, то соответствующая форма записывается так

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Если $n=0$, то f превращается в индивидную константу.

Предикатная форма **– это предикатная константа, соединенная с соответствующим числом термов.**

Если P – предикатная константа (m-местная константа) и $t_1, \ldots, t_m$ – термы, то соответствующая форма записывается так .

$$P(t_1, t_2, \ldots, t_m)$$

Если $m = 0$, то пишут P, т.е.предикатная форма превращается в высказывание

Атом – это предикатная форма или некоторое равенство (выражение вида $s=t$, где s и t – термы).

Для равенства характерно то же, что и для предикатной формы, т.е. о нем можно сказать, что оно истинно или ложно.

Определение понятия формулы

1. Атом есть формула.

2. Если A − формула, то $\overline{A}$ − формула.

3. Если A и B − формулы,

то , $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \& B)$, $(A \sim B)$ − формулы.

4. Если A − формула и x − переменная, то $\forall x A$, $\exists x A$ − формулы.

3. Определение аксиом.

Выбор системы аксиом в исчислении предикатов может быть осуществлен по-разному.

Один из наиболее простых способов состоит в том, что берутся уже ранее определенные аксиомы из исчисления высказываний и дополняются еще двумя, связанными с использованием кванторов:

$$\forall x F(x) \rightarrow F(y);$$

$$F(t) \rightarrow \exists x\, F(x),$$ где t – не содержит переменной x.

4. Правила вывода.

Правила вывода также полностью заимствуются из логики высказываний, кроме того, к ним добавляются еще два правила следующего вида:

- правило введения квантора существования:

$$\frac{P(x) \rightarrow F}{\exists x\, P(x) \rightarrow F}$$

- правило введения квантора общности:

$$\frac{F \rightarrow P(x)}{F \rightarrow \forall x\, P(x)}$$

Примеры.

1. Утверждение: *«Все слоны серые».*

Вводимые предикаты:

слон(x) – «x – *слон*»;

цвет(x,y) – «x цвета y».

Предикатное выражение:

$$\forall x(\textit{слон}(x) \rightarrow \textit{цвет}(x, \textit{серый}))$$

2. Утверждение: *«Для любого множества x существует множество y такое, что мощность y больше, чем мощность x».*

Вводимые предикаты:

множество(x) – «x – множество»;

мощность(x,u) – «мощность множества x равна u»;

больше(x,u) – «значение x больше значения u».

Предикатное выражение:

$$\forall x(\text{множество}(x) \to (\exists y)(\exists u)(\exists v)((\text{множество}(y) \,\&\, \text{мощность}(x,u) \,\&$$
$$\& \,\text{мощность}(y,v) \,\&\, \text{больше}(v,u))).$$

3. Утверждение: *«Все кубики, находящиеся на кубиках, которые были сдвинуты или были скреплены с кубиками, которые сдвигались, тоже будут сдвинуты».*

Вводимые предикаты:

куб (х)– «*х* – куб»;

сверху (х,у) – «*х* расположен сверху *у*»;

скреплен (х,у) – «*х* скреплен с *у*»;

сдвинут (х) – «*х* – сдвинут».

Предикатное выражение:

$$(\forall x)(\forall y)(куб(x)\ \&\ куб(y)\ \&\ (сверху(x,y) \vee скреплен(x,y))\ \&\ \&\ сдвинут(y)) \to сдвинут(x).$$

4.3 Определение значения истинности предикатных формул

Определение. Две формулы логики предикатов считаются ***равносильными в области*** *M*, если они принимают одинаковые логические значения при всех входящих в них переменных, отнесенных к области *M*.

Определение. Две формулы логики предикатов называются ***равносильными***, если они равносильны на всякой области.

Пусть *A(x)*, *A(x,y)* **и** *B(x)* **– предикаты,** *p* **– высказывание, тогда правила имеют следующий вид:**

1. $\overline{\forall x\, A(x)} = \exists x\, \overline{A}(x).$
2. $\overline{\exists x\, A(x)} = \forall x\, \overline{A}(x).$
3. $\forall x\, A(x) = \overline{\exists x\, \overline{A}(x)}.$
4. $\exists x\, A(x) = \overline{\forall x\, \overline{A}(x)}.$

5. $\forall x\left(A(x)\,\&\,B(x)\right)=\forall x\,A(x)\,\&\,\forall x\,B(x)$.

6. $\forall x\left(A(x)\vee B(x)\right)=\forall x\,A(x)\vee\forall x\,B(x)$.

7. $p\,\&\,\forall x\,A(x)=\forall x\left(p\,\&\,A(x)\right)$.

8. $p\vee\forall x\,A(x)=\forall x\left(p\vee A(x)\right)$.

9. $p\rightarrow\forall x\,B(x)=\forall x\left(p\rightarrow B(x)\right)$.

10. $\forall x\left(B(x)\rightarrow p\right)=\exists x\,B(x)\rightarrow p$.

11. $\exists x\left(A(x)\vee B(x)\right)=\exists x\,A(x)\vee\exists x\,B(x)$.

12. $\exists x\,(A(x)\,\&\,B(x)) = \exists x\,A(x)\,\&\,\exists x\,B(x)$.

13. $p \vee \exists x\,B(x) = \exists x\,(p \vee B(x))$.

14. $p\,\&\,\exists x\,B(x) = \exists x\,(p\,\&\,B(x))$.

15. $\exists x\,A(x)\,\&\,\exists y\,B(x) = \exists x\,\exists y\,(A(x)\,\&\,B(x))$.

16. $\exists x\,\exists y\,A(x,y) = \exists y\,\exists x\,A(x,y)$.

17. $\forall x\,\forall y\,A(x,y) = \forall y\,\forall x\,A(x,y)$.

18. $\exists x\,(B(x) \to p) = \forall x\,B(x) \to p$.

<u>Пример.</u> Доказать тождественную истинность заданного предикатного выражения

$$\forall x\left(P(x)\to\left(P(x)\vee P(y)\right)\right)=\forall x\left(\overline{P}(x)\vee P(x)\vee P(y)\right)=$$

$$=\forall x\left(1\vee P(y)\right)=\forall x\left(1\right)=1.$$

Пример. Доказать тождественную ложность заданного предикатного выражения

$$\exists x \exists y \left(\left(F(x) \to F(y)\right) \& \left(F(x) \to \overline{F}(y)\right) \& F(x)\right) =$$

$$= \exists x \exists y \left(\left(\overline{F}(x) \vee F(y)\right) \& \left(\overline{F}(x) \vee \overline{F}(y)\right) \& F(x)\right) =$$

$$= \exists x \exists y (\left(\overline{F}(x) \vee F(y)\right) \& \left(\overline{F}(x) \& F(x) \vee \overline{F}(y) \& F(x)\right) =$$

$$= \exists x \exists y (\left(\overline{F}(x) \vee F(y)\right) \& \left(0 \vee \overline{F}(y) \& F(x)\right) =$$

$$= \exists x \exists y \left(\left(\overline{F}(x) \vee F(y)\right) \& \overline{F}(y) \& F(x)\right) =$$

$$= \exists x \exists y (\overline{F}(x) \& \overline{F}(y) \& F(x) \vee F(y) \& \overline{F}(y) \& F(x)) =$$

$$= \exists x \exists y (0 \vee 0) = 0.$$

4.4 Метод резолюций для логики предикатов

Так как анализ выражений в формальных системах осуществляется в чисто синтаксической форме, без учета семантики, то возникает необходимость приведения отдельных выражений к единой форме.

Эти приведения базируются на использовании *унификации*.

88888888888888888888888888888888888888888
88888888888888887

Например, для создания $W_2(A)$ из $\forall x(W_1(x) \rightarrow W_2(x))$ и $W_1(A)$ необходимо найти подстановку «*A вместо x*», которая сделает идентичными $W_1(A)$ и $W_1(x)$.

Поиск подстановок термов на место переменных называется *унификацией*.

Унификация основывается на другом понятии – *подстановка*.

Определение. ***Подстановочным частным случаем*** **называется подстановка в некоторое выражение термов вместо переменных.**

Пример.

Для выражения $P(x, f(y), B)$ имеется четыре частных случая подстановки:

- $P(z, f(\omega), B)$ – алфавитная, просто замена одних переменных на другие;
- $P(x, f(A), B)$ – константу подставили в функцию f;
- $P(g(z), f(A), B)$ – функциональное выражение вместо переменной x;
- $P(C, f(A), B)$ – основной частный случай, т.к. везде подставлены константы вместо переменных.

Любую подстановку можно представить с помощью множества упорядоченных пар вида

$$S = \{t_1/v_1,\ t_2/v_2,\ \dots,\ t_n/v_n\},$$

где пара t_i/v_i **означает, что переменная** v_i **заменяется на терм** t_i.

При выполнении подстановки должны соблюдаться два правила:

- каждое вхождение переменной заменяется на один и тот же терм;
- переменную нельзя заменить на терм, содержащий ту же самую переменную.

Для предыдущего примера подстановки описанные с помощью введенного формализма, имеют следующий вид:

1) $S_1 = \{z/x, \omega/y\};$
2) $S_2 = \{A/y\};$
3) $S_3 = \{g(z)/x, A/y\};$
4) $S_4 = \{C/x, A/y\}.$

Для обозначения подстановки часто используется следующая запись.

Если S – подстановка, а E – выражение, к которому она применяется, то пишут E_S.

Если подстановка S применяется к каждому элементу некоторого множества $\{E_i\}$, то множество подстановочных примеров обозначается $\{E_i\}_S$.

Определение. Говорят, что множество $E=\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ ***унифицируемо***, если существует такая подстановка S, что

$$E_1{}^S = E_2{}^S = \ldots = E_n{}^S.$$

В этом случае подстановка S называется ***унификатором*** для множества E, т.к. после ее применения множество склеивается в один элемент.

Пример. **Пусть** $A=\{P(x, f(y), B), P(x, f(B), B)\}$,

рассмотрим подстановку $S=\{C/x, B/y\}$,

унифицируем и получаем $A = \{P(A, f(B), B)\}$

(*в подстановке С необходимости не было*).

$$P(x, f(y), B)\ {}_{S_1} = P(z, f(\omega), B).$$

Унификация производится при следующих условиях:

1. Если термы – константы, то они унифицируемы тогда и только тогда, когда они совпадают.
2. Если в первом дизъюнкте терм – переменная, а во втором – константа, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется константа.
3. Если терм в первом дизъюнкте – переменная и во втором дизъюнкте терм тоже переменная, то они унифицируемы.
4. Если в первом дизъюнкте терм – переменная, а во втором – употребление функции, то они унифицируемы, при этом вместо переменной подставляется употребление функции.
5. Унифицируются между собой термы, стоящие на одинаковых местах в одинаковых предикатах.

Пример.

Рассмотрим дизъюнкты:

1) $Q(a, b, c)$ **и** $Q(a, d, l)$.

Дизъюнкты не унифицируемы.

2) $Q(a, b, c)$ *и* $Q(x, y, z)$.

Дизъюнкты унифицируемы. Унификатор – $S=(a/x,b/y,c/z)$.

Если необходимо последовательно выполнить несколько подстановок: S_1**,** S_2**, то можно записать** $E_{S_1 S_2}$

На этом действии базируется такое понятие, как ***композиция подстановок.***

Если S и S' являются двумя множествами подстановок, то их композиция S и S' (пишется $S\,S'$) получается после применения S' к элементам S и добавления результата к S.

Композиция подстановок – это метод, с помощью которого объединяются подстановки унификации.

Определение. **Композиция подстановок** g **и** s **есть функция** gs, **определяемая следующим образом:**

$$(gs)[t]=g[s[t]],$$

где t **– терм,**

g **и** s **– подстановки,**

а $s[t]$ **– терм, который получается из** t **путем применения к нему подстановки** s.

Пример. Пусть задана последовательность подстановок

$$\{x/y, w/z\},\ \{v/x\},\ \{A/v,\ f(B)/w\},$$

они эквивалентны одной подстановке $\{A/y, f(B)/z\}$.

Последняя подстановка была выведена путем компоновки $\{x/y, w/z\}$ и $\{v/x\}$ для получения $\{v/y, w/z\}$ и компоновки результата с $\{A/v,\ f(B)/w\}$ для получения $\{A/y, f(B)/z\}$.

Основное требование алгоритма унификации состоит в том, что унификатор должен быть максимально общим, т.е. для любых двух выражений должен быть найден *наиболее общий унификатор* (*НОУ*).

Определение. Если s – произвольный унификатор выражения E, а g – ***наиболее общий унификатор*** этого набора выражений, то в случае применения s к E будет существовать еще один унификатор s' такой, что $Es = Egs'$, где g и s', – композиции унификация, примененные к выражению E.

Определение. ***Множество рассогласований*** непустого множества дизъюнктов $\{E_1, \ldots, E_n\}$ получается путем выявления первой (слева) позиции, на которой не для всех дизъюнктов из E стоит один и тот же символ, и выписывания из каждого дизъюнкта терма, который начинается с символа, занимающего данную позицию.

Множество термов и есть множество рассогласований в E.

Пример.

Рассмотрим дизъюнкты:

$$\{P(x, f(y, z)), P(x, a), P(x, g(h(k(x))))\}.$$

Множество рассогласований состоит из термов, которые начинаются с пятой позиции, и представляет собой множество

$$\{f(x, y), a, g(h(k(x)))\}.$$

Алгоритм унификации

Пусть E – множество дизъюнктов,

D – множество рассогласований,

k – номер итерации,

g_k – наиболее общий унификатор на k-й итерации.

Шаг 1.

Пусть $k=0,$

$g_k=e$ **(пустой унификатор),**

$E_k=E$.

Шаг 2.

Если для E_k не существует множества рассогласований D_k, то алгоритм завершает работу и g_k – наиболее общий унификатор для E.

Иначе найдем множество рассогласований D_k.

Шаг 3.

Если существуют такие элементы v_k и t_k в D_k, что v_k – переменная, не входящая в терм t_k, то перейдем к *шагу 4.*

В противном случае алгоритм завершает работу и E не унифицируемо.

Шаг 4.

Пусть $g_{k+1}=g_k\{\,t_k\,/\,v_k\}$, заменим во всех дизъюнктах E_k переменную v_k. на терм t_k

Шаг 5.

$k=k+1$. **Перейти к *шагу 2.***

Пример.

Рассмотрим дизъюнкты:

$$E=\{P(f(a), g(x)), P(y, y)\}.$$

Итерация 1.

Шаг 1. $E_0=E,\ k=0,\ g_0=e.$

Шаг 2. $D_0=\{f(a),y\}.$

Шаг 3. $v_0=y,\ t_0=f(a).$

Шаг 4. $g_1=\{f(a)/y\},\ \ E_1=\{P(f(a),\ g(x)),\ P(f(a),\ f(a))\}.$

Переход на шаг 2.

Итерация 2.

Шаг 2. $D_1=\{g(x),f(a)\}$.

Шаг 3. **Так как нет переменной в множестве рассогласований D_1, то, следовательно, алгоритм унификации завершается, множество E – не унифицируемо.**

Обычно унификацию используют для приведения в соответствие различных выражений.

Если в одном из выражений подставлены вместо переменных константы, а другие выражения приводятся в соответствие с ним, то это называется *сравнением с образом.*

Как отмечалось ранее, метод резолюций применим к множеству дизъюнктов.

Поэтому рассмотрим *последовательность действий, которую необходимо реализовать, для приведения любой формулы логики предикатов к множеству дизъюнктов*.

Пусть задано следующее предикатное выражение:

$$(\forall x)(P(x) \to (\forall y)(P(y) \to P(f(x,y))) \,\&\, \overline{\forall y(Q(x,y) \to P(y)))}$$

Его следует привести к множеству предложений.

На каждом шаге будем приводить пример, который демонстрирует результат применения действий соответствующего шага к заданному выражению.

Шаг 1. **Используя правила эквивалентных преобразований, в исходном выражении все логические операции записывают через операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.**

То есть результат будет записан как выражение, определенное в рамках следующей функционально полной системы логических функций $\{\vee, \&, {}^{-}\}$

Пример.

$$\forall x(\overline{P}(x) \vee \forall y(\overline{P}(y) \vee P(f(x,y))) \& \overline{\forall y(\overline{Q}(x,y) \vee P(y))})$$

Шаг 2. Используя правила де Моргана, выполняют преобразования, обеспечивающие применение операции отрицания только к литералам.

Пример.

$$\forall x(\overline{P}(x) \vee \forall y(\overline{P}(y) \vee P(f(x,y))) \& \exists y(Q(x,y) \& \overline{P}(y)))$$

Шаг 3. Разделение переменных. **Так как в пределах области действия квантора можно заменить любую переменную на другую и от этого значение истинности формулы не изменится, можно преобразовать формулу так, чтобы каждый квантор имел свою собственную переменную, например вместо**

$(\forall x)(P(x) \to \exists x Q(x))$ **пишется** $(\forall x)(P(x) \to \exists y Q(y))$

Пример.

$$(\forall x)(\overline{P}(x) \vee \forall y(\overline{P}(y) \vee P(f(x,y))) \& \exists\omega(Q(x,\omega) \& \overline{P}(\omega)))$$

Шаг 4. Исключение кванторов существования.

Рассмотрим формулу

$$(\forall y)(\exists x P(x, y))$$

В этой формуле получается, что все выражение выполняется для любого y и некоторого x, который, возможно, зависит от y.

Эту зависимость можно обозначить явно с помощью некоторой функции $g(y)$, отображающей каждое значение y в то x, которое существует.

Такая функция называется *сколемовской функцией*.

Если заменить на эту формулу переменную *x*, то квантор существования можно убрать и переписать выражение в новом виде

$$\forall y P(g(y), y)$$

Пример.

Привести к сколемовской форме следующую формулу:

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)\ (P(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w).$$

можно заменить переменную x **на константу** a,

переменную u **– на двухместную** $f(y, z)$,

переменную w **– на трехместную функцию** $g(y, z, v)$.

Таким образом, получаем следующую форму:

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)(P(a,\ y,\ z,\ f(y,\ z),\ g(y,\ z,\ v)).$$

Шаг 5. Преобразование выражения в предваренную (префиксную) форму. Так как в формуле кванторы существования отсутствуют, то все кванторы общности можно переместить в начало формулы.

Формула в таком виде называется *формулой в предварительной форме*, цепочка кванторов перед ней – *префиксом*, а следующее за ним бескванторное выражение – матрицей.

Пример.

$$\forall x \forall y((\overline{P}(x) \vee \overline{P}(y) \vee P(f(x,y))) \& (\overline{P}(x) \vee Q(x,g(x))) \& (\overline{P}(x) \vee \overline{P}(g(x))))$$

Шаг 6. Приведение матрицы выражения к форме КНФ. **Известно, что любая логическая функция может быть представлена в форме КНФ. Для этого чаще всего используется метод эквивалентных преобразований.**

Пример.

Из алгебры логики известны следующие равенства

$$x_1 \vee x_2 x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$$

$$x_1 x_2 \vee x_3 x_4 = (x_1 \vee x_3 x_4)(x_2 \vee x_3 x_4)$$

Применим их к полученному после шага 5 выражению:

$$\forall x \forall y(\underbrace{\overline{P}(x)}_{x_1} \vee (\underbrace{(\overline{P}(y) \vee P(f(x,y)))}_{x_2} \mathbin{\&} \underbrace{Q(x,g(x)) \mathbin{\&} \overline{P}(g(x))}_{x_3}))$$

$$(\overline{P}(x) \vee \overline{P}(y) \vee P(f(x,y))) \mathbin{\&} (\underbrace{\overline{P}(x)}_{x_1} \vee \underbrace{Q(x,g(x))}_{x_2} \mathbin{\&} \underbrace{\overline{P}(g(x))}_{x_3}) =$$

$$= \forall x \forall y(\overline{P}(x) \vee \overline{P}(y) \vee P(f(x,y)) \mathbin{\&} (\overline{P}(x) \vee Q(x,g(x))) \mathbin{\&} (\overline{P}(x) \vee \overline{P}(g(x))).$$

Шаг 7. Исключение кванторов общности. Так как в выражении остались кванторы общности, а их порядок несущественен, то можно эти кванторы опустить, то есть удалить у формулы префикс.

Пример.

$$\overline{P}(x) \vee \overline{P}(y) \vee P(f(x,y)) \,\&\, (\overline{P}(x) \vee Q(x, g(x))) \,\&\, (\overline{P}(x) \vee \overline{P}(g(x))$$

Шаг 8. Переход от выражения в виде КНФ к множеству предложений. Для этого требуется убрать все операции конъюнкции, а каждый дизъюнкт представить как отдельное предложение, т.е. перейти от выражения вида $x_1 \& x_2$ к выражению $\{x_1, x_2\}$, в котором каждый элемент − предложение.

Пример.

$$\{\overline{P}(x) \vee \overline{P}(y) \vee P(f(x,y)), \overline{P}(x) \vee Q(x, g(x)), \overline{P}(x) \vee \overline{P}(g(x))\}.$$

Шаг 9. Переименование переменных. Символы переменных должны быть изменены так, чтобы каждый появлялся не более чем в одном предложении. Этот процесс называется ***разделением переменных***.

Пример.

$$\{\overline{P}(x_1)\vee\overline{P}(y)\vee P(f(x_1,y)),\overline{P}(x_2)\vee Q(x_2,g(x_2)),\overline{P}(x_3)\vee\overline{P}(g(x_3))\}$$

При построении вывода с помощью метода резолюций следует учитывать следующее:

1. Если во множестве присутствуют только предложения, содержащие предикаты без переменных, то вывод строится, как и в случае с высказываниями, т.к. логика высказываний – это частный случай логики предикатов.

2. Для того чтобы применить резолюцию к предложениям, содержащим переменные, необходимо иметь возможность найти такую подстановку, которая, будучи применена к родительским предложениям, приведет к тому, что они будут содержать дополнительные литералы.

Пример.

Рассмотрим дизъюнкты:

C_1: $P(x) \vee Q(x)$,

C_2: $R(x) \vee \overline{P}(f(x))$

Так как аргументы предиката P в C_1 и C_2. различны, то невозможно построить на их основе резольвенту, но если подставить $f(a)$ вместо x в C_1 и а вместо x в C_2, то исходные дизъюнкты примут вид.

C_1’: $P(f(a)) \vee Q(f(a))$,

C_2’: $R(a) \vee \overline{P}(f(a))$

Следовательно, можно получить резольвенту

$$C_3': Q(f(a)) \vee R(a).$$

В общем случае, подставив $f(x)$ вместо x в C_1, получим

$$C_1'': P(f(x)) \vee Q(f(x)).$$

Предикат $P(f(x))$ в C_1'' и предикат в C_2 позволяют получить резольвенту

$$C_3: Q(f(x)) \vee R(x).$$

Определение. Если два или более предиката (с одинаковым знаком) дизъюнкта C имеют наиболее общий унификатор g, то Cg – называется ***склейкой*** C.

Пример.

Рассмотрим дизъюнкт

$$C = P(x) \vee P(f(y)) \vee \overline{Q}(x)$$

В этом дизъюнкте первый и второй предикаты имеют наиболее общий унификатор $g=\{f(y)/x\}$.

Следовательно,

$$Cg = P(f(y)) \vee \overline{Q}(f(y))$$

есть склейка *C*.

Определение. Пусть C_1 и C_2 – два дизъюнкта, которые не имеют никаких общих переменных. Пусть L_1 и L_2 – два предиката в C_1 и C_2. Если L_1 и L_2 имеют наиболее общий унификатор g, то дизъюнкт $(C_{1g} \backslash L_{1g}) \vee (C_{2g} \backslash L_{2g})$ называется ***резольвентой*** C_1 и C_2.

Пример.

Пусть $C_1 = P(x) \vee Q(x)$ **и** $C_2 = \overline{P}(a) \vee R(x)$.

Так как x **входит в** C_1 **и** C_2, **то заменим переменную в** C_2 **и пусть** $C_2 = \overline{P}(a) \vee R(y)$.

Выбираем $L_1 = P(x)$ **и** $L_2 = \overline{P}(a)$

L_1 **и** L_2 **имеют наиболее общий унификатор** $g=\{a/x\}$.

Следовательно, $Q(a) \vee R(y)$ **– резольвента** C_1 **и** C_2.

Пример.

$$\{P(x,f(A))\vee P(x,f(y))\vee Q(y),\ \overline{P}(z,f(A))\vee\overline{Q}(z)\}$$

Тогда при

$L_1=\{P(x,f(A))\}$ и $L_2=\{\overline{P}(z,f(A))\}$ полагаем $g=\{z/x\}$

и получаем резольвенту

$$P(z,f(y))\vee\overline{Q}(z)\vee Q(y)$$

а при

$$L_1=\{P(x,f(A)),P(x,f(y))\}\text{ и }L_2=\{\overline{P}(z,f(A))\}$$

полагаем $g=\{z/x,A/y\}$ и

получаем резольвенту $Q(A)\vee\overline{Q}(z)$.

Переформулируем теперь уже известный алгоритм метода резолюций применительно к логике предикатов.

Шаг 1. **Если в** S **есть пустой дизъюнкт, то множество** S **не выполнимо и алгоритм завершает работу, иначе переходим к**

шагу 2.

Шаг 2. **Найти в исходном множестве S такие дизъюнкты или склейки дизъюнктов C_1 и C_2, которые содержат унифицируемые литералы $L_1 \in C_1$ и $L_2 \in C_2$.**

Если таких дизъюнктов нет, то исходное множество выполнимо и алгоритм завершает работу, иначе переходим к *шагу 3.*

Шаг 3. **Вычислить резольвенту** C_1 **и** C_2, **добавить ее в множество** S **и перейти к** ***шагу 1.***

Пример 1. **Докажем с помощью метода резолюций справедливость следующих рассуждений.**

- *Каждый член демократической партии голосует за президента и не любит коммунистов.*
- *Некоторые демократы являются предпринимателями.*
- *Следовательно, существуют предприниматели, которые не любят коммунистов*

Введем следующие предикаты:

$C(x)$ – "x – *член демократической партии*";

$W(x)$ – "x – *голосует за президента* ";

$R(x)$ - "x – *не любит коммунистов* ";

$P(x)$ – "x – *является предпринимателем*".

$$h1 = \forall x(C(x) \rightarrow W(x) \& R(x)),$$

$$h2 = \exists x(C(x) \& P(x)),$$

$$S = \exists x(P(x) \& R(x)).$$

Решение:

1. $\overline{C}(x) \vee W(x)$

2 $\overline{C}(x) \vee R(x)$

3 $C(A)$

4 $P(A)$

5 $\overline{P}(x) \vee \overline{R}(x)$

---

6. 2 – 3 $S_2 = \{A/x\}$

$R(A)$

7. 5 – 6 $S_5 = \{A/x\}$

$\overline{P}(A)$

8 4 – 7 Пустой дизъюнкт

Пример 2. **Докажем с помощью метода резолюций справедливость следующих рассуждений.**

- *Некоторые руководители с уважением относятся ко всем программистам.*
- *Ни один руководитель не уважает бездельников.*
- *Следовательно, ни один программист не является бездельником.*

Введем следующие предикаты:

C(x) – "x – руководитель";

P(x) – "x – программист";

B(x) – "x – бездельник";

U(x,y) – "x уважает y".

Тогда посылки, записанные в виде предикатных выражений будут выглядеть так:

$$\exists x(C(x)\,\&\,\forall y(P(y) \to U(x,y)))$$

$$\forall x(C(x) \to \forall y(B(y) \to \overline{U}(x,y)))$$

Заключение примет следующий вид:

$$\forall y(P(y) \to \overline{B}(y))$$

Преобразовав посылки и следствие, которое надо взять с отрицанием, в совокупность дизъюнктов, получим множество предложений, невыполнимость которого докажем, используя метод резолюций.

$$\{C(a), \overline{P}(y) \vee U(x,y), \overline{C}(x) \vee \overline{B}(y) \vee \overline{U}(x,y), P(b), B(b)\}$$

1) $C(a)$

2) $\overline{P}(y) \cup U(x, y)$

3) $\overline{C}(x) \vee \overline{B}(y) \vee \overline{U}(x, y)$

4) $P(b)$

5) $B(b)$

6) $\overline{B}(y) \vee \overline{U}(a, y)$ (1,3) / $s = \{a/x\}$

7) $U(a, b)$ (2,4) / $s = \{b/y\}$

8) $\overline{B}(b)$ (6,7) / $s = \{b/y\}$

9) Пустой дизъюнкт (5,8)

<u>*Пример 3.*</u> Докажем с помощью метода резолюций справедливость следующих рассуждений.

- *Если родитель мужчина, то это отец.*
- *Если ребёнок мужчина, то это сын.*
- *Иван мужчина.*
- *Сидор мужчина.*
- *Иван родитель Сидора.*
- *Следовательно, Иван отец и Сидор сын*

Введем следующие предикаты:

C(x) – "x – сын";

O(x) – "x – отец ";

R(x,y) - "x – родитель y ";

M(x) – "x – мужчина".

Константы: D – Иван, B – Сидор.

$h1 = \forall x \forall y(R(x, y) \& M(x) \rightarrow O(x)),$

$h2 = \forall x \forall y(R(x, y) \& M(y) \rightarrow C(y)),$

$h3 = M(D),$

$h4 = M(B),$

$h5 = R(D,B),$

$S = O(D) \& C(B)).$

Решение:

1. $\overline{R}(x,y) \vee \overline{M}(x) \vee O(x)$
2. $\overline{R}(x,y) \vee \overline{M}(y) \vee C(y)$
3. $M(D)$
4. $M(B)$
5. $R(D,B)$
6. $\overline{O}(D) \vee \overline{C}(B)$

---

7. 1 – 5 $S=\{D/x, B/y\}$

$\overline{M}(D) \vee O(D)$

8. 2 – 5 $S=\{D/x, B/y\}$

$\overline{M}(B) \vee C(B)$

9. 3 – 7 $O(D)$
10. 6 – 9 $\overline{C}(B)$
11. 8 – 10 $\overline{M}(B)$
12. 4 – 11 Пустой дизъюнкт.

Определение. ***Сколемовской формой*** **предикатного выражения называется формула логики предикатов, в которой все вхождения переменных, у которых кванторы существования находятся в области действия кванторов общности, заменены на сколемовские функции.**

Определение. ***Клаузальной формой*** называется такая сколемовская форма, матрица которой имеет вид КНФ.

Любая сколемовская форма допускает эквивалентную ей клаузальную форму.